Казахский национальный университет им. аль-Фараби

УДК 621.01:681.5

На правах рукописи

ЖИЛКИБАЕВА САЛТАНАТ КУБЕЕВНА

Разработка методики расчета прочности и жесткости плоских механизмов и манипуляторов с учетом распределенных динамических нагрузок

6D060300 – Механика

Диссертация на соискание степени
доктора философии (PhD)

Отечественный научный консультант:
Утенов М. У.,
д. т. н., профессор

Зарубежный научный консультант:
Tarek M. Sobh,
Ph.D., professor

Республика Казахстан
Алматы, 2020

СОДЕРЖАНИЕ

НОРМАТИВНЫЕ ССЫЛКИ…….. 4
ВВЕДЕНИЕ……..... 5
1 КИНЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ ПЛОСКИХ МЕХАНИЗМОВ И МАНИПУЛЯТОРОВ И ДИНАМИЧЕСКИЕ РАСПРЕДЕЛЕННЫЕ НАГРУЗКИ……..... 14
1.1 Определение положений звеньев плоских механизмов..... 14
1.2 Определение скоростей и ускорений звеньев плоских механизмов…….. 15
1.3 Определение положений звеньев плоского манипулятора с замкнутым контуром и двумя степенями свободы..... 18
1.4 Определение скоростей и ускорений звеньев плоского манипулятора..... 20
1.5 Динамические распределенные нагрузки, возникающие от собственных масс звеньев с постоянными вдоль звена сечениями при их плоскопараллельном движении..... 23
1.6 Краткие выводы по разделу 1..... 28
2 МАТРИЦЫ АППРОКСИМАЦИЙ ЗВЕНЬЕВ И РАСЧЕТНЫЕ И УСЛОВНЫЕ СХЕМЫ ДЛЯ ПОСТРОЕНИЯ ДИСКРЕТНЫХ МОДЕЛЕЙ ЭЛЕМЕНТОВ И МЕХАНИЗМОВ……..... 29
2.1 Матрица аппроксимации усилий элемента, подверженного действию динамических распределенных нагрузок…..... 29
2.2 Расчетная схема шестизвенного механизма второго класса..... 32
2.3 Используемые условные схемы при построении дискретных моделей элементов и механизмов..... 34
2.4 Три вида элементов и вектора усилий в расчетных сечениях этих элементов..... 36
2.5 Дискретная модель механизма второго класса и вектора усилий в расчетных сечениях..... 39
2.6 Краткие выводы по разделу 2..... 41
3 ДИНАМИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ РАВНОВЕСИЯ ЭЛЕМЕНТОВ И УЗЛОВ, УЧИТЫВАЮЩИЕ РАСПРЕДЕЛЕННЫЕ ДИНАМИЧЕСКИЕ НАГРУЗКИ И ВЫРАЖЕННЫЕ ЧЕРЕЗ ИСКОМЫЕ ПАРАМЕТРЫ..... 43
3.1 Динамические уравнения равновесия дискретной модели элементов, находящегося под действием распределенных динамических нагрузок и динамические уравнения равновесия узлов..... 42
3.2 Разрешающие уравнения для определения внутренних усилий в сечениях звеньев механизма второго класса со статически определимой структурой…….. 46

3.3 Анимация движения исследуемого механизма с построением на звеньях эпюр изгибающих моментов, поперечных и продольных сил..... 53
3.6 Краткие выводы по разделу 3..... 58
4 ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПЕРЕМЕЩЕНИЙ В ЗВЕНЬЯХ ПРИ ДЕЙСТВИИ НА НИХ РАСПРЕДЕЛЕННЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ И ВНЕШНИХ НАГРУЗОК..... 59
4.1 Определение углов поворота, поперечных и продольных перемещений звеньев..... 59
4.2 Анимация движения плоского механизма с построением на звеньях эпюр углов поворота, поперечных (прогибы) и продольных перемещений сечений звеньев..... 70
4.3 Краткие выводы по разделу 4..... 73
5 ПОДБОР ФОРМЫ СЕЧЕНИЙ ЗВЕНЬЕВ И ОПРЕДЕЛЕНИЕ ИХ ЛИНЕЙНЫХ РАЗМЕРОВ..... 74
5.1 Оптимизация общей массы механизмов..... 74
5.2 Геометрические характеристики прямоугольного коробчатого сечения, выраженные через искомый параметр b_1 76
5.3 Расчет на прочность при центральном растяжении или сжатии звена..... 78
5.4 Расчет на прочность при изгибе с растяжением (сжатием)..... 80
5.5 Краткие выводы по разделу 5..... 85
ЗАКЛЮЧЕНИЕ..... 86
СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ..... 87
ПРИЛОЖЕНИЕ А..... 92

НОРМАТИВНЫЕ ССЫЛКИ

В настоящей диссертации использованы ссылки на следующие стандарты:

ГОСО РК 5.04.034-2011: Государственный общеобязательный стандарт образования Республики Казахстан. Послевузовское образование. Докторантура. Основные положения (изменения от 23 августа 2012 г. №1080).

ГОСТ 7.32-2001 (изменения от 2006 г.). Отчет о научно-исследовательской работе. Структура и правила оформления.

ГОСТ 7.1-2003. Библиографическая запись. Библиографическое описание. Общие требования и правила составления.

ВВЕДЕНИЕ

Современное состояние решаемой научной проблемы и актуальность темы исследования. Одной из важных проблем при проектировании механизмов и манипуляторов является обеспечение прочности и жесткости их звеньев с помощью анализа напряженно-деформированного состояния в течение полного рабочего процесса.

Для анализа напряженно-деформированного состояния стержневых систем применяются в основном следующие три подхода. Первый из них это графоаналитические методы для статически неопределимых и неподвижных стержневых систем, к которым относятся метод сил и метод перемещений [1-4]. При расчете по методу сил основными искомыми величинами являются усилия в лишних связях. При расчете по методу перемещений основными искомыми величинами являются перемещения узловых точек, вызванные деформацией системы. Второй подход к решению задачи динамического расчета упругих систем является метод сосредоточенных параметров, который основан на идее приближенной замены системы с бесконечной степенью свободы системой с конечной степенью, путем замены распределенной массы сосредоточенной. С использованием метода сосредоточенных параметров достаточно много работ и он используется для исследования колебаний и определения собственных частот балок. Для динамического исследования механизмов с упругими звеньями метод сосредоточенных параметров использован в ряде опубликованных работ [5-15].

Широкий обзор литературы, связанный с динамическим анализом упругих роботизированных манипуляторов был проведён в работе [16].

В работе [17] основное внимание уделяется изучению полного динамического моделирования и вычислению максимальной динамической грузоподъёмности манипулятора установленного на подвижной базе с n-упругими звеньями и n-упругими сочленениями. Нелинейный динамический анализ опирается на теорию балок Тимошенко. Для полного и точного моделирования системы рассмотрены нелинейные отношения деформации и смещения, полезная нагрузка и неголономные ограничения. Моделирование выполняется для мобильного базового манипулятора с двумя упругими звеньями и сочленениями.

В работе Ли [18] показано, что традиционное лагранжево моделирование роботов с упругими звеньями не полностью включает механизм изгиба упругого звена, поскольку он позволяет свободное удлинение звена в дополнение к прогибу звена. Это удлинение вызывает неточность моделирования для звеньев с вращением. Чтобы исправить это, он предложил новую динамическую модель.

Лагеревым [19] представлен алгоритм определения напряжений в стержневых элементах конструкций гидравлических кранов-манипуляторов. Изложены методики вычисления геометрических и инерциальных характеристик поперечных сечений и участков стержней произвольной формы. Выполнен

динамико-прочностной анализ для трёх начальных положений рукояти крана-манипулятора АсТ-4-А.

В работе [20] приведены уравнения и алгоритмы для наиболее важных вычислений динамики манипуляторов, выраженных в общих обозначениях для облегчения их представления и сравнения.

Исследованиям динамики манипуляторов с одним упругим звеном посвящены работы [21-24], где упругое звено рассматривается как балка Эйлера-Бернулли и решается динамическое уравнение, чтобы максимизировать жесткость и свести к минимуму массу манипулятора.

Али Ахмад Абдул Хуссайн [25] предложил метод расчета, позволяющий определять местные деформации с учётом податливости звеньев. Он показал, что его методика подходит для определения упругих характеристик манипулятора, а так же отдельных звеньев и комбинаций их соединений.

Третьим из наиболее распространённых современных численных методов, позволяющим решать задачи статического, динамического напряжённо-деформированного состояния конструкций является метод конечных элементов [26-27]. Он лежит в основе таких мощных пакетов, как ANSYS, NASTRAN, APM WinMachine 2010, Autodesk Simulation Mechanical и многих других. Основоположником теории МКЭ считается Р. Курант (1943 г.). М. Тернер, Х. Мартин и др. внедрили МКЭ в строительную механику и механику сплошных сред (конец пятидесятых – начало шестидесятых годов двадцатого века). существенно расширили область применения МКЭ Б. сабо, О. Зенкевич и др. (конец шестидесятых – начало семидесятых годов), показав, что его можно использовать для решения любых дифференциальных уравнений.

Несмотря на то, что этот метод может рассчитывать напряжённо-деформированное состояние детали любой формы при любых нагрузках, к сожалению, не существует метода, позволяющего заранее предсказать размер конечных элементов, достаточный для получения требуемой точности расчёта. Поэтому не следует думать, что метод конечных элементов может полностью заменить собой все другие методы расчётов. У него тоже есть свои ограничения и проблемы применения .

До настоящего времени этот метод развивается и применяется во многих работах по исследованию различных задач напряжённо-деформируемого состояния подвижных и неподвижных стержневых систем.

Работа [28] посвящена исследованию напряжённо-деформированного состояния грузонесущей стрелы лесного крана. Оценка напряжённого состояния выполнена интегрированной системой прочностного анализа по методу конечных элементов.

В работе [29] с помощью метода конечных элементов был проведен расчет напряжённо-деформированной металлоконструкции манипулятора, подтвердивший возможность эксплуатации мобильного робота при действии

дополнительных рабочих нагрузок. Обоснован выбор базовых типов конечных элементов для моделирования манипулятора – стержневых и оболочечных.

Базирующиеся на методе конечных элементов полная и раздельная модели и методики анализа напряжённо-деформированного состояния и нагруженности металлоконструкции крана-манипулятора были разработаны в работе [30], а также в ней даны рекомендации по их рациональному использованию. Обладающая наибольшей достоверностью полная конечноэлементная модель эффективна при проектных расчетах, так как рассматривает кран-манипулятор (включая шарниры и приводные гидродвигатели) как единую систему. Раздельная конечноэлементная модель эффективна при проверочных расчетах, когда желательна быстрая верхняя оценка уровня действующих напряжений и деформаций.

В работе [31] на основе метода конечных элементов исследована деформация различных сечений звеньев промышленных роботов, определены численные значения деформаций, вызванных воздействием силы и момента, графически отражено деформированное состояние звена робота.

В работе [32] рассмотрен алгоритм численного решения геометрически нелинейных задач деформирования шарнирно-стержневых систем (большие перемещения и повороты) как при жёстком, так и при мягком нагружениях на основе разрабатываемого авторами метода конечных элементов в форме классического смешанного метода. На примере решения задачи о статическом деформировании плоской механической шарнирно-стержневой системы, состоящей из двух линейно-упругих стержней, показаны простота и эффективность алгоритма при нахождении всего множества равновесных состояний системы.

В работе [33] построена модель и расчетная схема пространственной конструкции, смоделирована система нагрузок и произведен проектировочный расчет элементов конструкции. Приведены результаты расчета напряжённо-деформированного состояния стержневых элементов конструкции из стали 15ХсНД, расчета на устойчивость и влияния частот собственных колебаний в модуле АРМ Structure 3D. Использование данного модуля позволяет выполнить проверку несущей способности, а также реализовывается возможность подбора оптимального поперечного сечения стержневого элемента по критериям прочности и устойчивости.

Тохи и др. [34,35], Чунг и Ю [36], Ду и Линг [37], Шейкер и Госал [38], Юэ [39] рассматривали нелинейную модель плоских упругих манипуляторов с одним и двумя вращательными кинематическими парами, используя математические модели нелинейных конечных элементов.

Некоторые исследователи изучили и сформулировали максимальную динамическую допустимую нагрузку для жестких и упругих манипуляторов. Например, Уанг и Равани [40] вычислили грузоподъемность манипулятора на заданной траектории динамического робота. Корейем и Басу представили

алгоритм вычисления динамической грузоподъемности упругих манипуляторов путем введения ограничений точности и крутящего момента [41,42]. Корейем и Гариблу [43] разработали алгоритм, чтобы найти максимально допустимую динамическую нагрузку жестких мобильных манипуляторов на заданной траектории. Также Корейем и Хайдари [44,45] разработали алгоритм для нахождения максимально допустимой динамической нагрузки упругих манипуляторов не имеющих большого перемещения. считается, что полная динамическая модель характеризует движение податливого звена, способной к большому прогибу. Точность исполнительного механизма, амплитуда ограничений остаточной вибрации и ограничение максимального напряжения в качестве нового ограничения учитываются для предложенного алгоритма при движении по заданной траектории. К динамике механизмов с упругими звеньями посвящены следующие работы [60-62], где рассмотрены нелинейные деформации, устойчивость и вибрация элементов высокоскоростных механизмов.

Однако, все эти графоаналитические и численные методы расчета напряженно-деформированного состояния применялись к неподвижным стержневым системам и имеют свои ограничения и проблемы применения к подвижным стержневым системам. А также в этих методах не учитываются распределенные динамические нагрузки, зависящие от физических, геометрических и кинематических характеристик звеньев, которые появляются во время движения стержневых механизмов и манипуляторов. Эти нагрузки оказывают большое влияние на напряженно–деформированное состояние звеньев.

Чтобы более корректно анализировать характер напряженно-деформируемого состояния для полного рабочего цикла механизмов и манипуляторов необходимо учитывать кроме приложенных к системе сосредоточенных сил и распределенные динамические нагрузки, которые меняют свои значения и направления в зависимости от физических, геометрических и кинематических характеристик звеньев. Следовательно, необходимо, в первую очередь, установить закономерности распределения динамических распределенных нагрузок.

Так как все стержневые системы имеют распределенную массу, они всегда являются системами со степенью свободы, равной бесконечности. Поэтому, необходимо разработать дискретную модель механизмов и манипуляторов, где внутренние усилия каждого звена однозначно определялся конечным набором внутренних усилий в отдельных его сечениях, т.е. чтобы задача сводилась к вычислению внутренних усилий в конечном числе сечений звеньев.

Поэтому актуальна разработка метода аналитического определения внутренних усилий и перемещений в звеньях манипуляционных систем. Преимущество аналитического метода в точности и скорости расчета. А также актуально разработка алгоритма минимизации общей массы проектируемых манипуляционных систем при ограничениях по напряжениям в звеньях.

Результаты этих исследований позволяют выбрать поперечные размеры звеньев с наименьшей площадью, обеспечивающие прочность звеньев, проектируемых манипуляционных систем под действием статических и динамических нагрузок.

Цель данной диссертационной работы заключается в разработке методики для подбора рациональной формы сечений звеньев и определение их линейных размеров, обеспечивающие прочность звеньев в полном цикле рабочего процесса.

Объектом исследования являются плоские стержневые механизмы и манипуляторы.

Предмет исследования – прочность и жесткость плоских стержневых механизмов и манипуляторов.

В соответствии с поставленной целью определяются следующие **задачи исследования:**

- разработка алгоритмов определения кинематических характеристик плоских механизмов и манипуляторов с применением известных методов, необходимых для определения продольных и поперечных распределенных динамических нагрузок и разработка компьютерных программ, позволяющих производить анимацию движения механизма и манипулятора с автоматическим построением на звеньях эпюр продольных и поперечных распределенных динамических нагрузок;
- получить разрешающие динамические уравнения равновесия элементов и узлов дискретной модели механизма и манипулятора с помощью метода, приведенного в работе [65] для аналитического определения внутренних усилий в звеньях и разработка компьютерных программ, позволяющих производить анимацию движения механизма и манипулятора с автоматическим построением на звеньях эпюр изгибающих моментов, поперечных и продольных сил;
- разработка методики аналитического определения продольных, поперечных перемещений (прогибов) и углов поворота поперечных сечений звеньев и разработка компьютерных программ, позволяющих производить анимацию движения механизма с автоматическим построением на звеньях эпюр продольных, поперечных перемещений и углов поворота поперечных сечений звеньев;
- разработать алгоритмы и компьютерные программы автоматизации методики оптимизации массы механизма по допускаемым напряжениям в звеньях и получить численные результаты, с помощью которых будут подобраны формы поперечных сечений и определены их линейные размеры, обеспечивающие прочность звеньев в полном цикле рабочего процесса.

Методы исследования: современные аналитические и численные методы решения задач механики машин.

Научная новизна работы заключается в следующем:

- разработаны алгоритмы и компьютерные программы, позволяющие производить анимацию движения механизма и манипулятора с автоматическим построением на звеньях эпюр распределенных динамических нагрузок и внутренних усилий;

- разработаны алгоритмы и компьютерные программы, позволяющие производить анимацию движения механизма с автоматическим построением на звеньях эпюр деформаций звеньев;
- разработаны алгоритмы и компьютерные программы автоматизации методики оптимизации массы механизма по допускаемым напряжениям и реализованы численные результаты, т.е. подобраны формы поперечных сечений звеньев и определены их линейные размеры, обеспечивающие прочность звеньев в течение полного рабочего процесса на примере плоского шестизвенного механизма.

Теоретическая и практическая значимость исследования. Разработанную методику можно использовать для проведения дальнейшего теоретического исследования напряженно–деформируемого состояния элементов пространственных подвижных систем (пространственные стержневые механизмы, манипуляторы, фермы, рамы и т.д.) со статической определимой и неопределимой структурами и автоматизации этого исследования с помощью современных компьютерных программ. Практическая значимость исследования состоит в применении разработанной методики при исследовании напряженно–деформируемого состояния проектируемых, а также существующих стержневых систем (плоские стержневые механизмы, манипуляторы, фермы, рамы и т.д.).

Научные положения, выносимые на защиту:
- разработка алгоритмов и компьютерных программ, позволяющих производить анимацию движения механизма и манипулятора с автоматическим построением на звеньях эпюр распределенных динамических нагрузок, внутренних усилий в звеньях механизма и манипулятора для полного рабочего цикла;
- разработка алгоритмов и компьютерных программ, позволяющих производить анимацию движения механизма с автоматическим построением на звеньях эпюр деформаций звеньев механизма для полного рабочего цикла;
- разработка алгоритмов и компьютерных программ автоматизации методики оптимизации массы механизма по допускаемым напряжениям, обеспечивающих прочность звеньев для полного рабочего цикла.

Достоверность и обоснованность научных положений, выводов и результатов диссертации. Основные расчетные уравнения, использованные в диссертационной работе, получены с корректным использованием основных положений теоретической механики, математического анализа, высшей алгебры, дифференциальных уравнений, основ робототехники, теории машин и механизмов и механики деформируемого твердого тела.

При разработке алгоритмов и при создании компьютерных программ использованы полученные в диссертационной работе расчетные уравнения и возможности программной среды Maple. Достоверность результатов наглядно видна при анимации движения рассматриваемых механизма и манипулятора с автоматическим построением на звеньях эпюр внутренних усилий и деформаций по следующим признакам: (а) между интенсивностью поперечных динамических

нагрузок, поперечных сил, изгибающих моментов и интенсивностью продольной динамической нагрузки, продольной силы, а также между изгибающим моментом, углом поворота сечений и прогибом, продольной силой и продольными перемещениями сечений звеньев имеются дифференциальные зависимости, которые можно использовать для проверки полученных результатов; (б) граничные условия в стойках, шарнирных узлах и т.д.

Полученные линейные размеры поперечных сечений звеньев можно проверить, определив напряжение в любом сечении любого звена и в любом положении механизма, это значение не должно превышать допускаемого напряжения.

Связь диссертационной работы с другими научно-исследовательскими работами. Данная диссертационная работа выполнялась в рамках научного проекта программы грантового финансирования фундаментальных исследований в области естественных наук МОН РК «Разработка аналитической теории прогнозирования прочности и жесткости робототехнических систем и механизмов» (2015-2017 гг., № ГР 0115РК00783).

Апробация работы. Основные положения и результаты диссертационной работы докладывались и обсуждались на следующих научных мероприятиях:

- Международная научно-практическая конференция: «Сто конкретных шагов. Современное государство для всех» - стратегический путь индустриально-инновационного развития страны (Шымкент, Казахстан, 29-30 октября 2015 г.);
- 7th European Congress on Computational Methods in Applied Sciences and Engineering (ECCOMAS 2016) (Crete, Greece, June 5-10, 2016);
- Республиканская научно-методическая конференция «Актуальные вопросы механики и математики», посвященная 20-летию Евразийского национального университета им. Л.Н. Гумилева и 10-летию основания кафедры «Механика» механико-математического факультета Евразийского национального университета им. Л.Н. Гумилева (Астана, Казахстан, 14-15 ноября 2016 г.);
- 2nd International Conference on Robotics, Control and Automation (ICRCA 2017) (Kitakyushu, Japan, September 15-18, 2017);
- научные семинары кафедры механики КазНУ им. аль-Фараби (Алматы, Казахстан, 2015-2018 гг.).

Публикации. По теме диссертации автором было опубликовано 8 работ, в том числе 3 публикации в научных изданиях, рекомендованных Комитетом по контролю в сфере образования и науки МОН РК для публикации основных результатов научной деятельности [46-48]; 3 публикации в научных журналах и трудах международных конференций, индексируемых базой данных Scopus и Web of Science [49-51] и 2 публикации в сборниках отечественных конференций [52, 53].

Личный вклад автора состоит в:
- участии на всех этапах процесса разработки методики расчета прочности и жесткости плоских механизмов и манипуляторов с учетом распределенных динамических нагрузок;
- непосредственном участии соискателя в разработке программ, позволяющих производить анимацию движения механизма и манипулятора с автоматическим построением на звеньях эпюр – продольных и поперечных распределенных динамических нагрузок; изгибающих моментов, поперечных и продольных сил; продольных, поперечных перемещений и углов поворота поперечных сечений звеньев и определении линейных размеров сечений с наименьшей площадью, обеспечивающие прочность звеньев в полном рабочем процессе механизма;
- личном участии в апробации результатов исследования;
- подготовке основных публикаций по выполненной работе.

Структура и объем диссертации. Диссертация включает титульный лист, содержание, введение, пять разделов, заключение и список использованных источников, состоящий из 65 наименований. Общий объем диссертации составляет 91 страницу, включая 45 иллюстраций и 2 таблиц.

Основное содержание диссертации. Введение включает анализ современного состояния исследуемой проблемы с обзором существующих работ, обоснование актуальности темы диссертационного исследования, цель работы, объект, предмет, задачи исследования, научную новизну, теоретическую и практическую значимости, основные положения, выносимые на защиту, сведения об опубликованных работах по теме диссертации и степень ее разработанности.

Первый раздел диссертации посвящен кинематическому анализу и определению закономерностей распределения поперечных и продольных динамических распределенных нагрузок по длине звеньев. Разработаны компьютерные программы, позволяющие производить анимацию движения механизма и манипулятора с автоматическим построением на звеньях эпюр продольных и поперечных распределенных динамических нагрузок.

Во втором разделе диссертации приведены матрицы аппроксимаций звеньев и внутренние усилия, выраженные с помощью матрицы аппроксимаций и искомых векторов усилий в расчетных сечениях, а также приведены расчетные и условные схемы для построения дискретных моделей элементов и механизмов. Для упругого расчета стержневых механизмов, на основе принципа Даламбера, механизмы приводились к конструкциям (расчетным схемам механизма), степень подвижности которых равна нулю. Для определения внутренних усилий в звеньях (в элементах) расчетной схемы механизма, конструкция разделена на элементы и узлы. Для построения дискретной модели элементов были применены условные схемы, которые показывают, какие искомые величины внутренних усилий определяются в рассматриваемом сечении. Построены дискретные модели элементов с постоянными сечениями и дискретная модель всего механизма.

В третьем разделе приведены динамические уравнения равновесия элементов и узлов дискретной модели механизмов, находящегося под действием сосредоточенных сил и распределенных динамических нагрузок, полученные в работе [65, с. 124]. С помощью этих уравнений получены разрешающие уравнения, аналитически определяющие внутренние усилия в звеньях шестизвенного механизма. Разработаны компьютерные программы и приведены решения для шестизвенного механизма и манипулятора с двумя степенями свободы в виде движущегося механизма и манипулятора, на звеньях которых автоматически построены эпюры изгибающих моментов, поперечных и продольных сил для наглядного изображения и правильного понимания этих параметров.

В четвертом разделе для определения поперечных перемещений и углов поворота сечений звеньев использовано основное дифференциальное уравнение упругой линии балки, а для определения продольных перемещений точек звеньев использован закон Гука. Разработаны алгоритмы определения постоянных интегрирования в уравнениях прогибов и продольных перемещений в звеньях. Звенья рассматриваются как элементы с закреплениями, приведенными в расчетной схеме механизма. Определение постоянных интегрирования в этих уравнениях позволяет определить углы поворота поперечных сечений, поперечные (прогибы) и продольные перемещения точек звеньев. Разработаны компьютерные программы, позволяющие производить анимацию движения механизма с автоматическим построением на звеньях эпюр углов поворота поперечных сечений, поперечных (прогибы) и продольных перемещений точек звеньев под действием распределенных динамических и внешних нагрузок.

В пятом разделе разработан алгоритм автоматизированного расчета оптимизации массы проектируемых механизмов и манипуляторов по допускаемым напряжениям в звеньях. Результаты этих исследований позволяют подобрать рациональную форму и определить линейные размеры сечений звеньев с наименьшей площадью, обеспечивающие прочность звеньев в полном рабочем процессе проектируемых стержневых механизмов и манипуляторов под действием сосредоточенных сил и распределенных динамических нагрузок. Получены численные результаты – определены геометрические характеристики, линейные размеры сечений, максимальные значения внутренних усилий и оптимальные веса звеньев шестизвенного механизма.

В заключении приводятся основные результаты и выводы диссертационного исследования, оценка полноты решения поставленных задач, рекомендации и исходные данные по конкретному использованию результатов, оценка технико-экономической эффективности внедрения, оценка научного уровня выполненной работы в сравнении с лучшими достижениями в данной области.

1 КИНЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ ПЛОСКИХ МЕХАНИЗМОВ И МАНИПУЛЯТОРОВ И ДИНАМИЧЕСКИЕ РАСПРЕДЕЛЕННЫЕ НАГРУЗКИ

Для разработки методики расчета прочности и жесткости плоских механизмов и манипуляторов с учетом внешних сосредоточенных и распределенных динамических нагрузок необходимо производить анимацию движения исследуемых механизмов и манипуляторов для полного рабочего цикла с построением на звеньях эпюр: распределенных динамических нагрузок, внутренних усилий, перемещений и углов поворота сечений звеньев. По построенным эпюрам этих параметров можно корректно анализировать характер напряженно-деформируемого состояния каждого звена в течение полного рабочего цикла манипуляционных систем, где будет наглядно видно изменение значений и направлений этих параметров, которые меняются в зависимости от физических, геометрических и кинематических характеристик звеньев, следовательно, необходим кинематический анализ исследуемых механизмов и манипуляторов.

1.1 Определение положений звеньев плоских механизмов

Для определения положений всех звеньев механизма достаточно задать значение обобщенной координаты θ_1 и постоянные параметры механизма: длины звеньев AB, BC, CD, CG, DG, GE, α, координаты стоек $A(x_A, y_A)$, $D(x_D, y_D)$, координата y_E точки E.

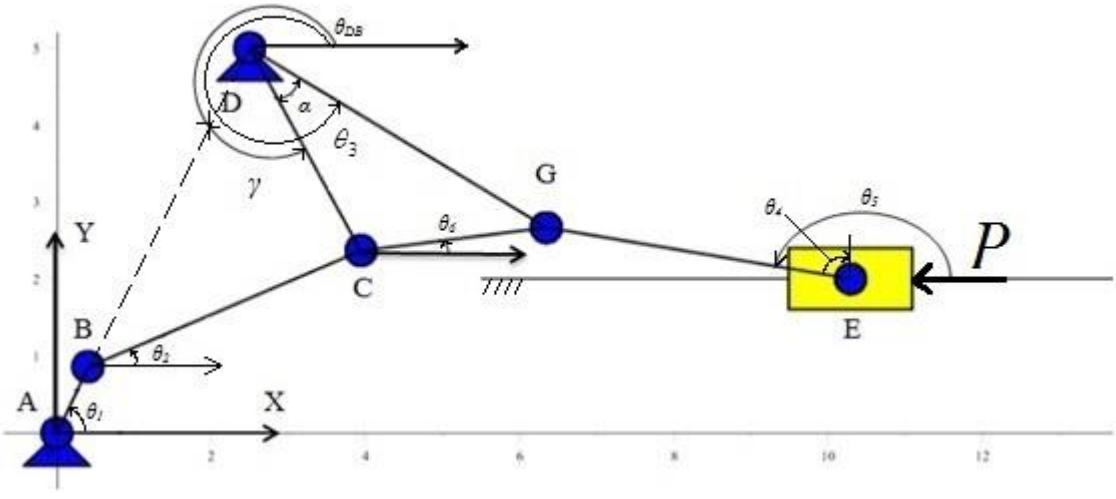


Рисунок 1.1 - Плоский шестизвенный механизм второго класса

Координаты точки $B(x_B, y_B)$ относительно неподвижной системы координат определяются из соотношения:

$$\begin{Bmatrix} x_B \\ y_B \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta_1 & -\sin\theta_1 \\ \sin\theta_1 & \cos\theta_1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} AB \\ 0 \end{Bmatrix}. \quad (1.1)$$

Для определения координаты точки C сначала находим расстояние BD:

$$BD = \sqrt{(x_B - x_D)^2 + (y_B - y_D)^2}. \quad (1.2)$$

Находим угол $\theta_{DB} = arctg\left(\frac{y_B - y_D}{x_B - x_D}\right)$ и по теореме косинусов находим угол $\gamma = \arccos\left(\frac{CD^2 + BD^2 - BC^2}{2 \cdot CD \cdot BD}\right)$, показанный на рисунке 1.1.

Соответственно, координаты точек $C(x_C, y_C), G(x_G, y_G), E(x_E, y_E)$ определяются из следующих соотношений:

$$\begin{Bmatrix} x_C \\ y_C \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} x_D \\ y_D \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \cos\theta_3 & -\sin\theta_3 \\ \sin\theta_3 & \cos\theta_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} CD \\ 0 \end{Bmatrix}, \quad (1.3)$$

где $\theta_3 = \theta_{DB} + \gamma$.

$$\begin{Bmatrix} x_G \\ y_G \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} x_D \\ y_D \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \cos(\theta_3 + \alpha) & -\sin(\theta_3 + \alpha) \\ \sin(\theta_3 + \alpha) & \cos(\theta_3 + \alpha) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} DG \\ 0 \end{Bmatrix}, \quad (1.4)$$

$$x_E = x_G + GE \cdot \sin\theta_4; \quad (1.5)$$

где $\theta_4 = \arccos\left(\frac{H}{GE}\right)$, $H = y_G - y_E$.

1.2 Определение скоростей и ускорений звеньев плоских механизмов

При кинематическом исследовании для определения скоростей и ускорений точек звеньев необходимо определить аналоги угловых скоростей и ускорений звеньев. Дифференцируя по обобщенной координате уравнения независимых замкнутых контуров один раз можно определить аналог угловых скоростей, дифференцируя по обобщенной координате второй раз определим аналог угловых ускорений звеньев [63, 64].

Например, для шестизвенного механизма второго класса, показанного на рисунке 1.1 для независимых контуров *ABCDA* и *DGEKD* (на рисунке 1.2) уравнения замкнутости контуров имеет вид:

$$\begin{cases} AB\cos(\theta_1)+BC\cos(\theta_2)-x_D-DC\cos(\theta_3)=0, \\ AB\sin(\theta_1)+BC\sin(\theta_2)-y_D-DC\sin(\theta_3)=0. \end{cases} \tag{1.6}$$

$$\begin{cases} DG\cos(\theta_3+\alpha)+GE\cos(\theta_{51})-(x_E-x_D)=0, \\ DG\sin(\theta_3+\alpha)+GE\sin(\theta_{51})-(y_D-y_E)=0. \end{cases} \tag{1.7}$$

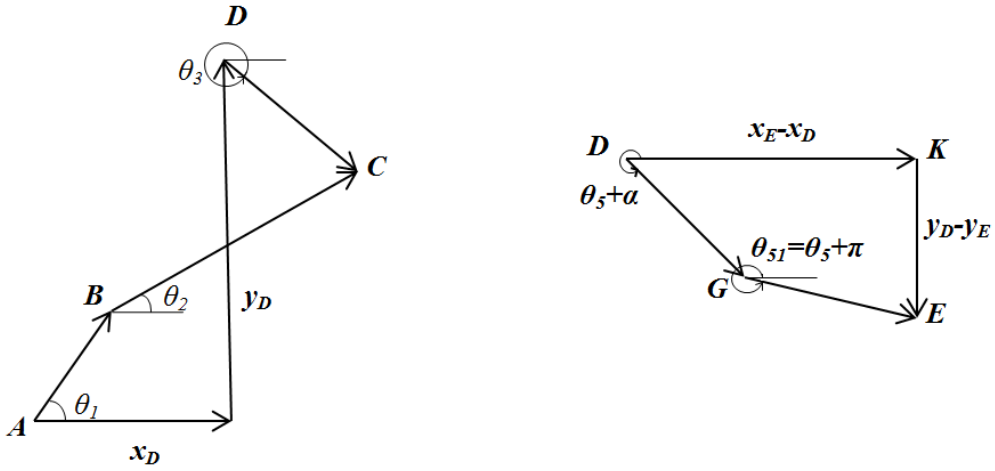


Рисунок 1.2 – Контуры *ABCDA* и *DGEKD*

По системам уравнений (1.6) и (1.7) берём производную по обобщённой координате θ_1:

$$\begin{cases} -AB\sin(\theta_1)-BC\sin(\theta_2)\dfrac{d\theta_2}{d\theta_1}+DC\sin(\theta_3)\dfrac{d\theta_3}{d\theta_1}=0, \\ AB\cos(\theta_1)+BC\cos(\theta_2)\dfrac{d\theta_2}{d\theta_1}-DC\cos(\theta_3)\dfrac{d\theta_3}{d\theta_1}=0. \end{cases} \tag{1.8}$$

$$\begin{cases} -DG\sin(\theta_3+\alpha)\dfrac{d\theta_3}{d\theta_1}-GE\sin(\theta_{51})\dfrac{d\theta_{51}}{d\theta_1}-\dfrac{dx_E}{d\theta_1}=0; \\ DG\cos(\theta_3+\alpha)\dfrac{d\theta_3}{d\theta_1}+GE\cos(\theta_{51})\dfrac{d\theta_{51}}{d\theta_1}=0. \end{cases} \tag{1.9}$$

Из систем уравнений (1.8) определим аналоги угловых скоростей $\frac{d\theta_2}{d\theta_1}$ и $\frac{d\theta_3}{d\theta_1}$ углов θ_2 и θ_3. Из систем уравнений (1.9) определим аналоги угловых скоростей $\frac{d\theta_{51}}{d\theta_1}$ угла θ_{51} и аналог линейной скорости $\frac{dx_E}{d\theta_1}$ координаты точки x_E, учитывая, что $\frac{d\theta_6}{d\theta_1}=\frac{d\theta_3}{d\theta_1}$.

Дифференцируя системы уравнений (1.8) и (1.9) по обобщённой координате θ_1 второй раз, получим следующие системы уравнений:

$$\begin{cases} -AB\cos(\theta_1)-BC\cos(\theta_2)\left(\frac{d\theta_2}{d\theta_1}\right)^2-BC\sin(\theta_2)\frac{d^2\theta_2}{d\theta_1^2}+DC\cos(\theta_3)\left(\frac{d\theta_3}{d\theta_1}\right)^2+DC\sin(\theta_3)\frac{d^2\theta_3}{d\theta_1^2}=0, \\ -AB\sin(\theta_1)-BC\sin(\theta_2)\left(\frac{d\theta_2}{d\theta_1}\right)^2+BC\cos(\theta_2)\left(\frac{d^2\theta_2}{d\theta_1^2}\right)+DC\sin(\theta_3)\left(\frac{d\theta_3}{d\theta_1}\right)^2-DC\cos(\theta_3)\frac{d^2\theta_3}{d\theta_1^2}=0. \end{cases} \quad (1.10)$$

$$\begin{cases} -DG\cos(\theta_3+\alpha)\left(\frac{d\theta_3}{d\theta_1}\right)^2-DG\sin(\theta_3+\alpha)\frac{d^2\theta_3}{d\theta_1^2}-GE\cos(\theta_{51})\left(\frac{d\theta_{51}}{d\theta_1}\right)^2-GE\sin(\theta_{51})\frac{d^2\theta_{51}}{d\theta_1^2}-\frac{d^2x_E}{d\theta_1^2}=0, \\ -DG\sin(\theta_3+\alpha)\left(\frac{d\theta_3}{d\theta_1}\right)^2+DG\cos(\theta_3+\alpha)\frac{d^2\theta_3}{d\theta_1^2}-GE\sin(\theta_{51})\left(\frac{d\theta_{51}}{d\theta_1}\right)^2+GE\cos(\theta_{51})\frac{d^2\theta_{51}}{d\theta_1^2}=0. \end{cases} \quad (1.11)$$

Из полученных систем уравнений (1.10) и (1.11) находим аналоги угловых ускорений $\frac{d^2\theta_2}{d\theta_1^2},\frac{d^2\theta_3}{d\theta_1^2},\frac{d^2\theta_{51}}{d\theta_1^2}$ углов θ_2,θ_3 и θ_{51}, учитывая, что $\frac{d^2\theta_6}{d\theta_1^2}=\frac{d^2\theta_3}{d\theta_1^2}$, а также аналог линейного ускорения $\frac{d^2x_E}{d\theta_1^2}$ координаты точки x_E. Эти системы уравнений (1.8)-(1.11) позволяют определить угловые скорости, угловые ускорения звеньев и линейные скорости и ускорения точек звеньев.

Определим истинные угловые скорости, ускорения и линейные скорости точек звеньев механизма необходимые для дальнейшего расчета:

$$\omega_2=\frac{d\theta_2}{dt}=\frac{d\theta_2}{d\theta_1}\cdot\frac{d\theta_1}{dt},\ \ \varepsilon_2=\frac{d^2\theta_2}{dt^2}=\frac{d^2\theta_1}{d\theta_1^2}\cdot\left(\frac{d\theta_1}{dt}\right)^2+\frac{d\theta_2}{d\theta_1}\cdot\frac{d^2\theta_1}{dt^2}, \quad (1.12)$$

$$\omega_3=\frac{d\theta_3}{dt}=\frac{d\theta_3}{d\theta_1}\cdot\frac{d\theta_1}{dt},\ \ \varepsilon_3=\frac{d^2\theta_3}{dt^2}=\frac{d^2\theta_3}{d\theta_1^2}\cdot\left(\frac{d\theta_1}{dt}\right)^2+\frac{d\theta_3}{d\theta_1}\cdot\frac{d^2\theta_1}{dt^2}, \quad (1.13)$$

$$\omega_4 = \frac{d\theta_4}{dt} = \frac{d\theta_4}{d\theta_1}\cdot\frac{d\theta_1}{dt},\ \ \varepsilon_4 = \frac{d^2\theta_4}{dt^2} = \frac{d^2\theta_4}{d\theta_1^{\,2}}\cdot\left(\frac{d\theta_1}{dt}\right)^2 + \frac{d\theta_4}{d\theta_1}\cdot\frac{d^2\theta_1}{dt^2}, \tag{1.14}$$

$$\omega_5 = \frac{d\theta_5}{dt} = \frac{d\theta_5}{d\theta_1}\cdot\frac{d\theta_1}{dt},\ \ \varepsilon_5 = \frac{d^2\theta_5}{dt^2} = \frac{d^2\theta_5}{d\theta_1^{\,2}}\cdot\left(\frac{d\theta_1}{dt}\right)^2 + \frac{d\theta_5}{d\theta_1}\cdot\frac{d^2\theta_1}{dt^2}, \tag{1.15}$$

$$\omega_6 = \frac{d\theta_6}{dt} = \frac{d\theta_6}{d\theta_1}\cdot\frac{d\theta_1}{dt},\ \ \varepsilon_6 = \frac{d^2\theta_6}{dt^2} = \frac{d^2\theta_6}{d\varphi_1^{\,2}}\cdot\left(\frac{d\theta_1}{dt}\right)^2 + \frac{d\theta_6}{d\theta_1}\cdot\frac{d^2\theta_1}{dt^2}. \tag{1.16}$$

Дифференцируя дважды уравнения (1.1), (1.3), (1.4), (1.5) по времени, получим следующие выражения для линейных ускорений точек B, C, G, E:

$$ax_B = \frac{d^2x_B}{dt^2} = -AB\cdot\cos(\theta_1)\cdot\omega_1^{\,2} - AB\cdot\sin(\theta_1)\cdot\varepsilon_1, \tag{1.17}$$

$$ay_B = \frac{d^2y_B}{dt^2} = -AB\cdot\sin(\theta_1)\cdot\omega_1^{\,2} + AB\cdot\cos(\theta_1)\cdot\varepsilon_1, \tag{1.18}$$

$$ax_C = \frac{d^2x_C}{dt^2} = -CD\cdot\cos(\theta_3)\cdot\left(\frac{d\theta_3}{d\theta_1}\right)^2\cdot\omega_1^{\,2} - CD\cdot\sin(\theta_3)\cdot\frac{d^2\theta_3}{d\theta_1^{\,2}}\cdot\omega_1^{\,2} - CD\cdot\sin(\theta_3)\cdot\frac{d\theta_3}{d\theta_1}\cdot\varepsilon_1, \tag{1.19}$$

$$ay_C = \frac{d^2y_C}{dt^2} = -CD\cdot\sin(\theta_3)\cdot\left(\frac{d\theta_3}{d\theta_1}\right)^2\cdot\omega_1^{\,2} + CD\cdot\cos(\theta_3)\cdot\frac{d^2\theta_3}{d\theta_1^{\,2}}\cdot\omega_1^{\,2} + CD\cdot\cos(\theta_3)\cdot\frac{d\theta_3}{d\theta_1}\cdot\varepsilon_1, \tag{1.20}$$

$$ax_G = \frac{d^2x_G}{dt^2} = -DG\cdot\cos(\theta_3+\alpha)\cdot\left(\frac{d\theta_3}{d\theta_1}\right)^2\cdot\omega_1^{\,2} - DG\cdot\sin(\theta_3+\alpha)\cdot\frac{d^2\theta_3}{d\theta_1^{\,2}}\cdot\omega_1^{\,2} - DG\cdot\sin(\theta_3+\alpha)\cdot\frac{d\theta_3}{d\theta_1}\cdot\varepsilon_1, \tag{1.21}$$

$$ay_G = \frac{d^2y_G}{dt^2} = -DG\cdot\sin(\theta_3+\alpha)\cdot\left(\frac{d\theta_3}{d\theta_1}\right)^2\cdot\omega_1^{\,2} + DG\cdot\cos(\theta_3+\alpha)\cdot\frac{d^2\theta_3}{d\theta_1^{\,2}}\cdot\omega_1^{\,2} + DG\cdot\cos(\theta_3+\alpha)\cdot\frac{d\theta_3}{d\theta_1}\cdot\varepsilon_1, \tag{1.22}$$

$$ax_E = \frac{d^2x_E}{dt^2} = \frac{d^2x_E}{d\theta_1^{\,2}}\cdot\left(\frac{d\theta_1}{dt}\right)^2 + \frac{dx_E}{d\theta_1}\cdot\frac{d^2\theta_1}{dt^2}, \tag{1.23}$$

где $\frac{dx_E}{d\theta_1}, \frac{d^2x_E}{d\theta_1^{\,2}}$ - аналоги линейной скорости и линейного ускорения точки E, которые определяются из формул (1.9) и (1.11), соответственно.

1.3 Определение положений звеньев плоского манипулятора с замкнутым контуром и двумя степенями свободы

Для определения положений всех звеньев манипулятора достаточно задать значение обобщенных координат θ_1 и θ_4 и постоянные параметры механизма: длины звеньев AB, BC, CD, DE, координаты стоек $A(x_A, y_A)$, $E(x_E, y_E)$ относительно неподвижной системы координат AXY.

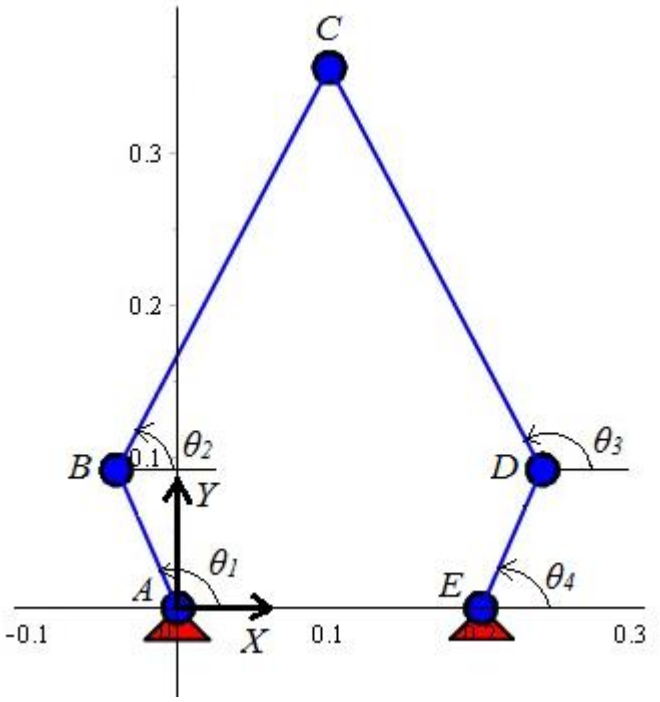


Рисунок 1.3 - Плоский манипулятор с замкнутым контуром и двумя степенями свободы

Координаты точки $B(x_B, y_B)$ относительно неподвижной системы координат определяются из соотношения:

$$\begin{Bmatrix} x_B \\ y_B \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta_1 & -\sin\theta_1 \\ \sin\theta_1 & \cos\theta_1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} AB \\ 0 \end{Bmatrix}. \tag{1.24}$$

Запишем уравнение замкнутости контуров манипулятора, который имеет вид:

$$\begin{cases} AB\cos(\theta_1) + BC\cos(\theta_2) - AE - DE\cos(\theta_4) - CD\cos(\theta_3) = 0, \\ AB\sin(\theta_1) + BC\sin(\theta_2) - DE\sin(\theta_4) - CD\sin(\theta_3) = 0. \end{cases} \tag{1.25}$$

Из системы уравнений (1.25) определим значения θ_2 и θ_3.

Координаты точки $C(x_C, y_C), D(x_D, y_D)$ определяются из следующих соотношений:

$$\begin{Bmatrix} x_C \\ y_C \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} x_B \\ y_B \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \cos\theta_2 & -\sin\theta_2 \\ \sin\theta_2 & \cos\theta_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} BC \\ 0 \end{Bmatrix}, \tag{1.26}$$

$$\begin{Bmatrix} x_D \\ y_D \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} x_E \\ y_E \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \cos(\theta_4) & -\sin(\theta_4) \\ \sin(\theta_4) & \cos(\theta_4) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} DE \\ 0 \end{Bmatrix}. \tag{1.27}$$

1.4 Определение скоростей и ускорений звеньев плоского манипулятора

Дифференцируя (1.25) по обобщённой координате θ_1 при фиксированном θ_4:

$$\begin{cases} -AB\sin(\theta_1) - BC\sin(\theta_2)\dfrac{\partial\theta_2}{\partial\theta_1} + CD\sin(\theta_3)\dfrac{\partial\theta_3}{\partial\theta_1} = 0, \\ AB\cos(\theta_1) + BC\cos(\theta_2)\dfrac{\partial\theta_2}{\partial\theta_1} - CD\cos(\theta_3)\dfrac{\partial\theta_3}{\partial\theta_1} = 0. \end{cases} \tag{1.28}$$

Из системы уравнений (1.28) определим частные производные пообобщенной координате θ_1 углов θ_2, θ_3, соответственно $\dfrac{\partial\theta_2}{\partial\theta_1}$ и $\dfrac{\partial\theta_3}{\partial\theta_1}$.

Дифференцируя (1.25) по обобщённой координате θ_4 при фиксированном θ_1:

$$\begin{cases} -BC\sin(\theta_2)\dfrac{\partial\theta_2}{\partial\theta_4} + DE\sin(\theta_4) + CD\sin(\theta_3)\dfrac{\partial\theta_3}{\partial\theta_4} = 0, \\ BC\cos(\theta_2)\dfrac{\partial\theta_2}{\partial\theta_4} - DE\cos(\theta_4) - CD\cos(\theta_3)\dfrac{\partial\theta_3}{\partial\theta_4} = 0. \end{cases} \tag{1.29}$$

Из системы уравнений (1.29) определим частные производные пообобщенной координате θ_4 углов θ_2, θ_3, соответственно $\dfrac{\partial\theta_2}{\partial\theta_4}$ и $\dfrac{\partial\theta_3}{\partial\theta_4}$.

Дифференцируя систему уравнений (1.28) второй раз по обобщённой координате θ_4, получим следующую систему уравнений:

$$\begin{cases} -BC\cos(\theta_2)\dfrac{\partial\theta_2}{\partial\theta_1}\dfrac{\partial\theta_2}{\partial\theta_4} - BC\sin(\theta_2)\dfrac{\partial^2\theta_2}{\partial\theta_1\partial\theta_4} + CD\cos(\theta_3)\dfrac{\partial\theta_3}{\partial\theta_1}\dfrac{\partial\theta_3}{\partial\theta_4} + CD\sin(\theta_3)\dfrac{\partial^2\theta_3}{\partial\theta_1\partial\theta_4} = 0, \\ -BC\sin(\theta_2)\dfrac{\partial\theta_2}{\partial\theta_1}\dfrac{\partial\theta_2}{\partial\theta_4} + BC\cos(\theta_2)\dfrac{\partial^2\theta_2}{\partial\theta_1\partial\theta_4} + CD\sin(\theta_3)\dfrac{\partial\theta_3}{\partial\theta_1}\dfrac{\partial\theta_3}{\partial\theta_4} - CD\cos(\theta_3)\dfrac{\partial^2\theta_3}{\partial\theta_1\partial\theta_4} = 0. \end{cases} \tag{1.30}$$

Из системы уравнений (1.30) определим смешанные частные производные углов θ_2, θ_3 , соответственно $\frac{\partial^2 \theta_2}{\partial \theta_1 \partial \theta_4}$ и $\frac{\partial^2 \theta_3}{\partial \theta_1 \partial \theta_4}$.

Дифференцируя систему уравнений (1.28) по обобщённой координате θ_1, получим следующую систему уравнений:

$$\begin{cases} -AB\cos(\theta_1) - BC\cos(\theta_2)\left(\frac{\partial \theta_2}{\partial \theta_1}\right)^2 - BC\sin(\theta_2)\frac{\partial^2 \theta_2}{\partial \theta_1^{\,2}} + CD\cos(\theta_3)\left(\frac{\partial \theta_3}{\partial \theta_1}\right)^2 + CD\sin(\theta_3)\frac{\partial^2 \theta_3}{\partial \theta_1^{\,2}} = 0, \\ -AB\sin(\theta_1) - BC\sin(\theta_2)\left(\frac{\partial \theta_2}{\partial \theta_1}\right)^2 + BC\cos(\theta_2)\frac{\partial^2 \theta_2}{\partial \theta_1^{\,2}} + CD\sin(\theta_3)\left(\frac{\partial \theta_3}{\partial \theta_1}\right)^2 - CD\cos(\theta_3)\frac{\partial^2 \theta_3}{\partial \theta_1^{\,2}} = 0. \end{cases} \quad (1.31)$$

Из системы уравнений (1.31) определим частные производные второгопорядка пообобщённой координате θ_1 углов θ_2, θ_3 , соответственно $\frac{\partial^2 \theta_2}{\partial \theta_1^{\,2}}$ и $\frac{\partial^2 \theta_3}{\partial \theta_1^{\,2}}$.

Дифференцируя систему уравнений (1.29) по обобщённой координате θ_4, получим следующую систему уравнений:

$$\begin{cases} -BC\cos(\theta_2)\left(\frac{\partial \theta_2}{\partial \theta_4}\right)^2 - BC\sin(\theta_2)\frac{\partial^2 \theta_2}{\partial \theta_4^{\,2}} + DE\cos(\theta_4) + CD\cos(\theta_3)\left(\frac{\partial \theta_3}{\partial \theta_4}\right)^2 + CD\sin(\theta_3)\frac{\partial^2 \theta_3}{\partial \theta_4^{\,2}} = 0, \\ -BC\sin(\theta_2)\left(\frac{\partial \theta_2}{\partial \theta_4}\right)^2 + BC\cos(\theta_2)\frac{\partial^2 \theta_2}{\partial \theta_4^{\,2}} + DE\sin(\theta_4) + CD\sin(\theta_3)\left(\frac{\partial \theta_3}{\partial \theta_4}\right)^2 - CD\cos(\theta_3)\frac{\partial^2 \theta_3}{\partial \theta_4^{\,2}} = 0. \end{cases} \quad (1.32)$$

Из системы уравнений (1.32) определим частные производные второгопорядка пообобщённой координате θ_4 углов θ_2, θ_3 , соответственно $\frac{\partial^2 \theta_2}{\partial \theta_4^{\,2}}$ и $\frac{\partial^2 \theta_3}{\partial \theta_4^{\,2}}$.

Угловые скорости звеньев *2* и *3* определим дифференцируя повремени углов θ_2, θ_3 :

$$\omega_2 = \frac{d\theta_2}{dt} = \frac{\partial \theta_2}{\partial \theta_1} \cdot \frac{d\theta_1}{dt} + \frac{\partial \theta_2}{\partial \theta_4} \cdot \frac{d\theta_4}{dt}, \quad (1.33)$$

$$\omega_3 = \frac{d\theta_3}{dt} = \frac{\partial \theta_3}{\partial \theta_1} \cdot \frac{d\theta_1}{dt} + \frac{\partial \theta_3}{\partial \theta_4} \cdot \frac{d\theta_4}{dt}, \quad (1.34)$$

Угловые ускорения звеньев *2* и *3* определим дифференцируя дважды повремени углов θ_2, θ_3 :

$$\varepsilon_2 = \frac{d^2\theta_2}{dt^2} = \left(\frac{d^2\theta_2}{d\theta_1^{\,2}} \cdot \omega_1 + \frac{\partial^2\theta_2}{\partial\theta_1\partial\theta_4} \cdot \omega_4 \right) \cdot \omega_1 + \frac{\partial\theta_2}{\partial\theta_1} \cdot \varepsilon_1 + \\ + \left(\frac{\partial^2\theta_2}{\partial\theta_1\partial\theta_4} \cdot \omega_1 + \frac{\partial^2\theta_2}{\partial\theta_4^{\,2}} \cdot \omega_4 \right) \cdot \omega_4 + \frac{\partial\theta_2}{\partial\theta_4} \cdot \varepsilon_4 \tag{1.35}$$

$$\varepsilon_3 = \frac{d^2\theta_3}{dt^2} = \left(\frac{\partial^2\theta_3}{\partial\theta_1^{\,2}} \cdot \omega_1 + \frac{\partial^2\theta_3}{\partial\theta_1\partial\theta_4} \cdot \omega_4 \right) \cdot \omega_1 + \frac{\partial\theta_3}{\partial\theta_1} \cdot \varepsilon_1 + \\ + \left(\frac{\partial^2\theta_3}{\partial\theta_1\partial\theta_4} \cdot \omega_1 + \frac{\partial^2\theta_3}{\partial\theta_4^{\,2}} \cdot \omega_4 \right) \cdot \omega_4 + \frac{\partial\theta_3}{\partial\theta_4} \cdot \varepsilon_4 \tag{1.36}$$

Дифференцируя дважды уравнения (1.24), (1.26), (1.27) по времени, получим следующие выражения для линейных скоростей точек B, C, D:

$$\begin{cases} \upsilon x_B = -AB \cdot \sin(\theta_1) \cdot \omega_1, \\ \upsilon y_B = AB \cdot \cos(\theta_1) \cdot \omega_1, \end{cases} \tag{1.37}$$

$$\begin{cases} \upsilon x_D = -DE \cdot \sin(\theta_4) \cdot \omega_4, \\ \upsilon y_D = DE \cdot \cos(\theta_4) \cdot \omega_4, \end{cases} \tag{1.38}$$

$$\begin{cases} \upsilon x_C = -AB \cdot \sin(\theta_1) \cdot \omega_1 - BC \cdot \sin(\theta_2) \cdot \left(\frac{\partial\theta_2}{\partial\theta_1} \cdot \omega_1 + \frac{\partial\theta_2}{\partial\theta_4} \cdot \omega_4 \right), \\ \upsilon y_C = AB \cdot \cos(\theta_1) \cdot \omega_1 + BC \cdot \cos(\theta_2) \cdot \left(\frac{\partial\theta_2}{\partial\theta_1} \cdot \omega_1 + \frac{\partial\theta_2}{\partial\theta_4} \cdot \omega_4 \right), \end{cases} \tag{1.39}$$

Дифференцируя уравнения (1.37), (1.38), (1.39) по времени, получим следующие выражения для линейных ускорений точек B, C, D:

$$\begin{cases} ax_B = \frac{d^2x_B}{dt^2} = -AB \cdot \cos(\theta_1) \cdot \omega_1^{\,2} - AB \cdot \sin(\theta_1) \cdot \varepsilon_1, \\ ay_B = \frac{d^2y_B}{dt^2} = -AB \cdot \sin(\theta_1) \cdot \omega_1^{\,2} + AB \cdot \cos(\theta_1) \cdot \varepsilon_1, \end{cases} \tag{1.40}$$

$$\begin{cases} ax_D = \dfrac{d^2 x_D}{dt^2} = -DE \cdot \cos(\theta_4) \cdot {\omega_4}^2 - DE \cdot \sin(\theta_4) \cdot \varepsilon_4, \\ ay_D = \dfrac{d^2 y_D}{dt^2} = -DE \cdot \sin(\theta_4) \cdot {\omega_4}^2 + DE \cdot \cos(\theta_4) \cdot \varepsilon_4, \end{cases} \tag{1.41}$$

$$\begin{cases} ax_C = -AB \cdot \cos(\theta_1) \cdot {\omega_1}^2 - AB \cdot \sin(\theta_1) \cdot \varepsilon_1 - BC \cdot \cos(\theta_2) \cdot \left(\dfrac{\partial \theta_2}{\partial \theta_1} \cdot \omega_1 + \dfrac{\partial \theta_2}{\partial \theta_4} \cdot \omega_4 \right)^2 - \\ - BC \cdot \sin(\theta_2) \cdot \left(\begin{array}{l} \left(\dfrac{\partial^2 \theta_2}{\partial {\theta_1}^2} \cdot \omega_1 + \dfrac{\partial^2 \theta_2}{\partial \theta_1 \partial \theta_4} \cdot \omega_4 \right) \cdot \omega_1 + \dfrac{\partial \theta_2}{\partial \theta_1} \cdot \varepsilon_1 + \\ + \left(\dfrac{\partial^2 \theta_2}{\partial \theta_1 \partial \theta_4} \cdot \omega_1 + \dfrac{\partial^2 \theta_2}{\partial {\theta_4}^2} \cdot \omega_4 \right) \cdot \omega_4 + \dfrac{\partial \theta_2}{\partial \theta_4} \cdot \varepsilon_4 \end{array} \right), \\ ay_C = \dfrac{d^2 y_C}{dt^2} = -AB \cdot \sin(\theta_1) \cdot {\omega_1}^2 + AB \cdot \cos(\theta_1) \cdot \varepsilon_1 - BC \cdot \sin(\theta_2) \cdot \left(\dfrac{\partial \theta_2}{\partial \theta_1} \cdot \omega_1 + \dfrac{\partial \theta_2}{\partial \theta_4} \cdot \omega_4 \right)^2 + \\ + BC \cdot \cos(\theta_2) \cdot \left(\begin{array}{l} \left(\dfrac{\partial^2 \theta_2}{\partial {\theta_1}^2} \cdot \omega_1 + \dfrac{\partial^2 \theta_2}{\partial \theta_1 \partial \theta_4} \cdot \omega_4 \right) \cdot \omega_1 + \dfrac{\partial \theta_2}{\partial \theta_1} \cdot \varepsilon_1 + \\ + \left(\dfrac{\partial^2 \theta_2}{\partial \theta_1 \partial \theta_4} \cdot \omega_1 + \dfrac{\partial^2 \theta_2}{\partial {\theta_4}^2} \cdot \omega_4 \right) \cdot \omega_4 + \dfrac{\partial \theta_2}{\partial \theta_4} \cdot \varepsilon_4 \end{array} \right). \end{cases} \tag{1.42}$$

1.5 Динамические распределенные нагрузки, возникающие от собственных масс звеньев с постоянными вдоль звена сечениями при их плоскопараллельном движении

Рассматривая плоскопараллельное движение k -го звена механизма с постоянными сечениями относительно неподвижной системы координат OXY, определены следующие закономерности распределения поперечных и продольных динамических нагрузок вдоль звена, возникающих от собственных масс звеньев [54, 58]:

$$\begin{cases} q_k\left(x_k^{'}\right) = a_{kq} + b_{kq} x_k^{'}, \\ n_k\left(x_k^{'}\right) = a_{kn} + b_{kn} x_k^{'}. \end{cases} \tag{1.43}$$

где $a_{kq} = -\gamma_k A_k \cos\theta_k - \dfrac{\gamma_k A_k}{g} w_{kp}^{y_k^{'}}$, $b_{kq} = -\dfrac{\gamma_k A_k}{g} \varepsilon_k$, $a_{kn} = -\gamma_k A_k \sin\theta_k - \dfrac{\gamma_k A_k}{g} w_{kp}^{x_k^{'}}$, $b_{kn} = \dfrac{\gamma_k A_k}{g} \omega_k^2$, θ_k - угол, определяющий положение звена k относительно неподвижной системе координат OXY , ω_k, ε_k - соответственно, угловая скорость

и угловое ускорение звена k, $w_{kp}^{x_k'}$ и $w_{kp}^{y_k'}$ - компоненты ускорения точки P_k (полюс) звена k направленные по оси звена и перпендикулярно к ней, γ_k - удельный вес материала звена k, A_k - площадь поперечного сечения звена k, g - ускорение свободного падения.

Для рассматриваемого механизма второго класса интенсивности поперечных нагрузок вдоль звеньев будут:

$$a_{1q} = -\gamma_1 \cdot A_1 \cdot \cos(\theta_1) - \frac{\gamma_1 \cdot A_1 \cdot ay_A}{g},\ b_{1q} = -\frac{\gamma_1 \cdot A_1 \cdot \varepsilon_1}{g},$$

$$a_{2q} = -\gamma_2 \cdot A_2 \cdot \cos(\theta_2) - \frac{\gamma_2 \cdot A_2 \cdot (-ax_B \cdot \sin(\theta_2) + ay_B \cdot \cos(\theta_2))}{g},\ b_{2q} = -\frac{\gamma_2 \cdot A_2 \cdot \varepsilon_2}{g},$$

$$a_{3q} = -\gamma_3 \cdot A_3 \cdot \cos(\theta_3) - \frac{\gamma_3 \cdot A_3 \cdot ay_D}{g},\ b_{3q} = -\frac{\gamma_3 \cdot A_3 \cdot \varepsilon_3}{g},$$

$$a_{4q} = -\gamma_4 \cdot A_4 \cdot \cos(\theta_3 + \alpha) - \frac{\gamma_4 \cdot A_4 \cdot ay_D}{g},\ b_{4q} = -\frac{\gamma_4 \cdot A_4 \cdot \varepsilon_4}{g},$$

$$a_{5q} = -\gamma_5 \cdot A_5 \cdot \cos(\theta_5) - \frac{\gamma_5 \cdot A_5 \cdot (-ax_E \cdot \sin(\theta_5))}{g},\ b_{5q} = -\frac{\gamma_5 \cdot A_5 \cdot \varepsilon_5}{g},$$

$$a_{6q} = -\gamma_6 \cdot A_6 \cdot \cos(\theta_6) - \frac{\gamma_6 \cdot A_6 \cdot (-ax_C \cdot \sin(\theta_3) + ay_C \cdot \cos(\theta_3))}{g},\ b_{6q} = -\frac{\gamma_6 \cdot A_6 \cdot \varepsilon_6}{g}.$$

На рисунках 1.4-1.7 представлены результаты полученных продольных и поперечных распределенных динамических нагрузок для механизма, показанного на рисунке 1.1 со следующими данными: координаты стоек $A(0;0)$, $D(0{,}25;0{,}50)$, $y_E = 0{,}20$, постоянный угол $\alpha = \frac{\pi}{6}$ между стержнями CD и DG, длины стержней $AB = 0{,}095 м$, $BC = 0{,}385 м$, $CD = 0{,}30 м$, $DG = 0{,}45 м$, $GE = 0{,}40 м$, площадь сечения звеньев $A_1 = 0.0001663533701 м^2$, $A_2 = 0.0003513416567 м^2$, $A_3 = 0.0002907470432 м^2$, $A_4 = 0.00007765800412 м^2$, $A_5 = 0.0002121774778 м^2$, $A_6 = 0.0001790756909 м^2$ при угловой скорости $\omega_1 = \frac{1}{сек}$, площадь сечения звеньев $A_1 = 0.001830662158 м^2$, $A_2 = 0.000499686649 м^2$, $A_3 = 0.0003790083068 м^2$, $A_4 = 0.0003191190885 м^2$,

$A_5 = 0.0002657887620\,\text{м}^2$, $A_6 = 0.0003467450535\,\text{м}^2$ при угловой скорости $\omega_1 = \frac{100}{сек}$, удельный вес материала $\gamma_1 = \gamma_2 = \gamma_3 = \gamma_4 = \gamma_5 = \gamma_6 = 78 \cdot 10^3 \frac{Н}{м^3}$, ускорение свободного падения $g = 9{,}8 \frac{м}{с^2}$, модуль упругости материала $E_1 = E_2 = E_3 = E_4 = E_5 = E_6 = 2 \cdot 10^{11} \frac{Н}{м^2}$.

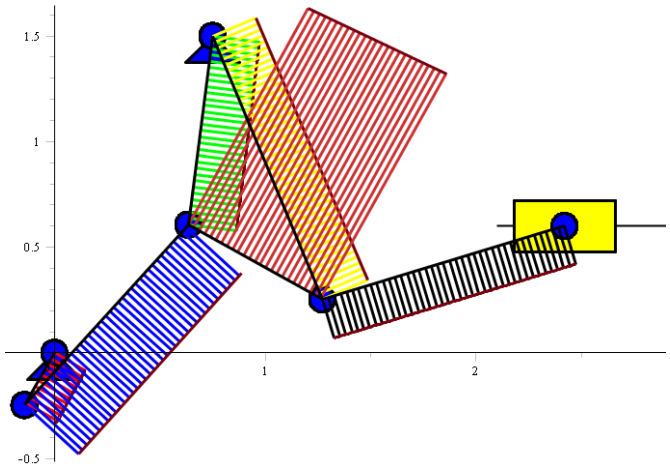


Рисунок 1.4 – Шестизвенный механизм, на звеньях которого построены эпюры продольных распределенных динамических нагрузок, действующих на звенья механизма при угловой скорости $\omega_1 = \frac{1}{сек}$

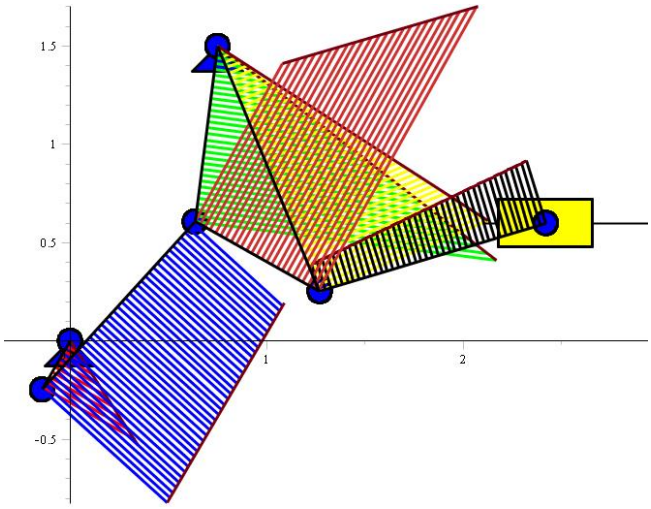


Рисунок 1.5 – Шестизвенный механизм, на звеньях которого построены эпюры продольных распределенных динамических нагрузок, действующих на звенья механизма при угловой скорости $\omega_1 = 100 \cdot \frac{1}{сек}$

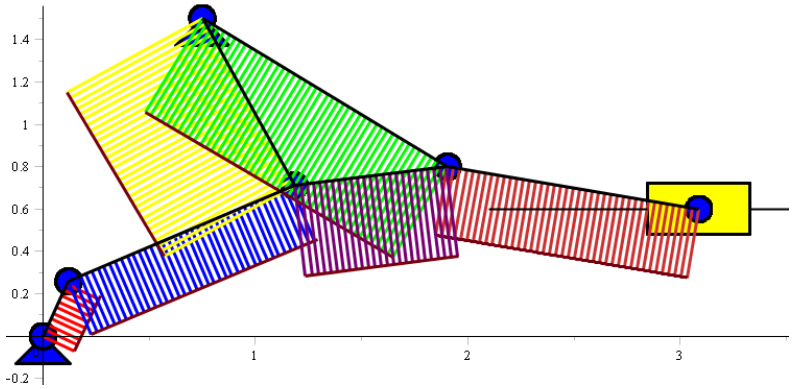


Рисунок 1.6 – Шестизвенный механизм, на звеньях которого построены эпюры поперечных распределенных динамических нагрузок, действующих на звенья механизма при угловой скорости $\omega_1 = \frac{1}{сек}$

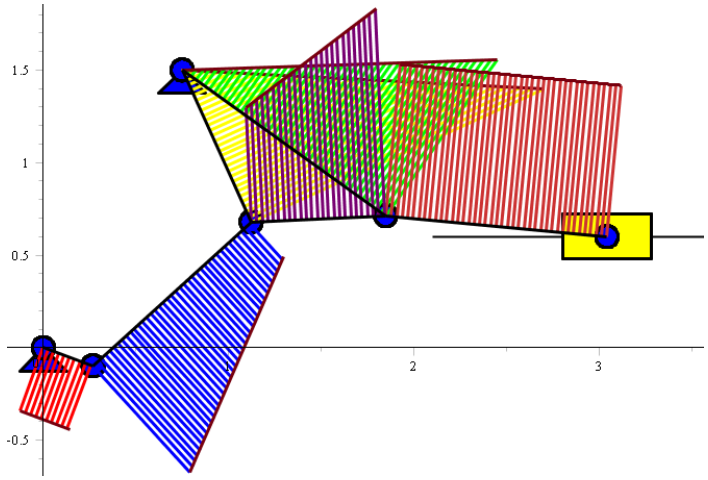


Рисунок 1.7 – Шестизвенный механизм, на звеньях которого построены эпюры поперечных распределенных динамических нагрузок, действующих на звенья механизма при угловой скорости $\omega_1 = 100 \cdot \frac{1}{сек}$

На рисунках 1.8-1.9 представлены результаты полученных продольных и поперечных распределенных динамических нагрузок для манипулятора на рисунке 1.3 со следующими данными: координаты стоек $A(0;0)$, $E(0,2;0)$, длины стержней $AB = 0{,}10\,м$, $BC = 0{,}30\,м$, $CD = 0{,}30\,м$, $DE = 0{,}10\,м$, площадь сечения звеньев $s_1 = s_4 = 0.000931079890м^2$, $s_2 = s_3 = 0.0003191111728м^2$, угловые скорости $\omega_1 = \omega_4 = \frac{100}{сек}$,

удельный вес материала звеньев $\gamma_1 = \gamma_2 = \gamma_3 = \gamma_4 = 78 \cdot 10^3 \frac{H}{м^3}$, ускорение свободного падения $g = 9{,}8 \frac{м}{c^2}$, модуль упругости материала звеньев $E_1 = E_2 = E_3 = E_4 = 2 \cdot 10^{11} \frac{H}{м^2}$.

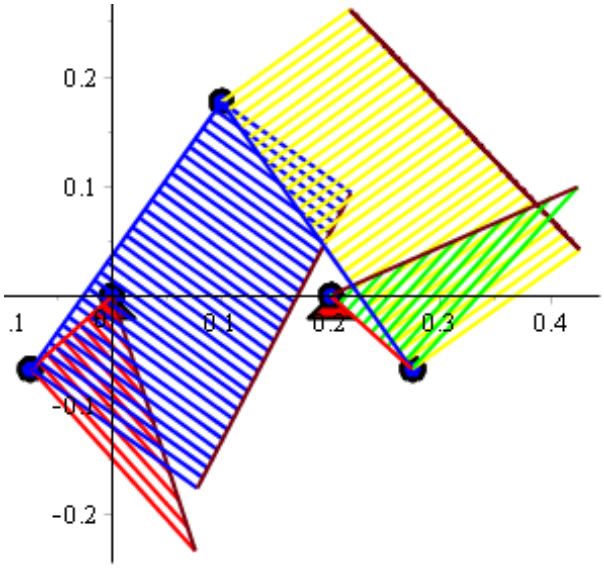


Рисунок 1.8 – Плоский манипулятор, на звеньях которого построены эпюры продольных распределенных динамических нагрузок, действующих на звенья манипулятора при угловой скорости $\omega_1 = 100 \cdot \frac{1}{сек}$

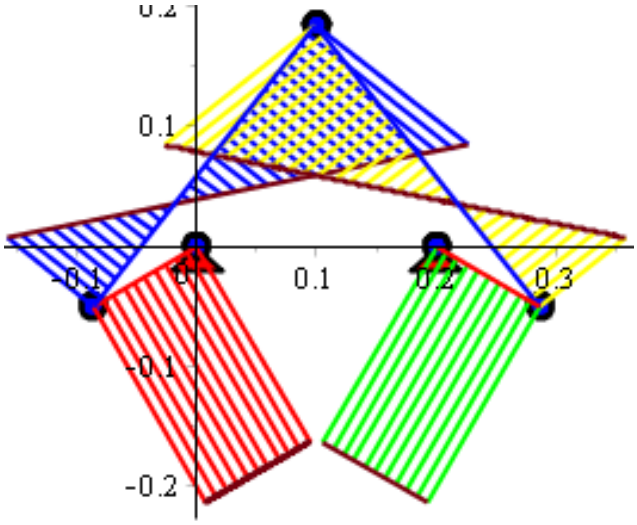


Рисунок 1.9 – Плоский манипулятор, на звеньях которого построены эпюры поперечных распределенных динамических нагрузок, действующих на звенья манипулятора при угловой скорости $\omega_1 = 100 \cdot \frac{1}{сек}$

1.6 Краткие выводы по разделу 1

1. Определены все кинематические параметры, необходимые для определения распределенных динамических нагрузок в звеньях механизма и манипулятора.
2. Разработана компьютерная программа, которая производит анимацию движения механизма и манипулятора.
3. Определены поперечные и продольные динамические распределенные нагрузки вдоль звеньев механизма и манипулятора.
4. Разработаны компьютерные программы, позволяющие производить анимацию движения механизма и манипулятора с построением на звеньях эпюр продольных и поперечных распределенных динамических нагрузок.

2 МАТРИЦЫ АППРОКСИМАЦИЙ ЗВЕНЬЕВ И РАСЧЕТНЫЕ И УСЛОВНЫЕ СХЕМЫ ДЛЯ ПОСТРОЕНИЯ ДИСКРЕТНЫХ МОДЕЛЕЙ ЭЛЕМЕНТОВ И МЕХАНИЗМОВ

Поскольку все стержневые системы имеют распределенную массу, они всегда являются системами со степенью свободы, равной бесконечности. Следовательно, необходимо разработать такую дискретную модель механизма, чтобы внутренние усилия каждого звена однозначно определялись конечным набором внутренних усилий в отдельных его сечениях, и тогда задача сведется к вычислению внутренних усилий в конечном числе сечений звеньев [59]. Приведенные в главе 1 закономерности распределения динамических распределенных нагрузок, зависящих от кинематических, геометрических, физических характеристик звеньев, позволяют определять вид и степень полинома распределения внутренних усилий вдоль оси элемента. Количество постоянных коэффициентов выражений внутренних усилий, записанных в виде полинома с постоянными коэффициентами, определяет количество расчетных сечений. Таким образом, внутренние усилия каждого звена однозначно определяются набором внутренних усилий в отдельных его сечениях и матриц аппроксимаций, поэтому задача сводится к вычислению внутренних усилий в конечном числе сечений элементов.

Вектор усилия $\{S_k(x)\}$ в любом сечений k - го звена выражено с помощью матрицы аппроксимации $[H_k(x)]$ и через вектор усилия $\{S_k\}$ в расчетных сечениях элемента в работе [1, с. 81]:

$$\{S_k(x)\} = [H_k(x)]\{S_k\}. \qquad (2.1)$$

В работе [65, с. 77] определены матрицы аппроксимации $[H_k(x)]$ и количество назначаемых расчетных сечений, где расположены искомые компоненты вектора усилия $\{S_k\}$, с помощью которых однозначно определяются вектора внутренних усилий $\{S_k(x)\}$ звеньев, в звеньях с постоянными сечениями и находящиеся под действием распределенных динамических нагрузок.

2.1 Матрица аппроксимации усилий элемента, подверженного действию динамических распределенных нагрузок

При плоскопараллельном движении на k -тый элемент механизмов и манипуляторов с постоянными сечениями действуют поперечные и продольные распределенные динамические нагрузки (1.43). При действии внешних сил Q_{k1}, Q_{k4} и поперечной распределенной динамической нагрузки, изгибающие моменты по

длине элемента распределены по закону полинома третьей степени (рисунок 2.1) [65, с. 75].

$$M_k\left(x_k^{'}\right)=a_0+a_1x_k^{'}+a_2\left(x_k^{'}\right)^2+a_3\left(x_k^{'}\right)^3, \tag{2.2}$$

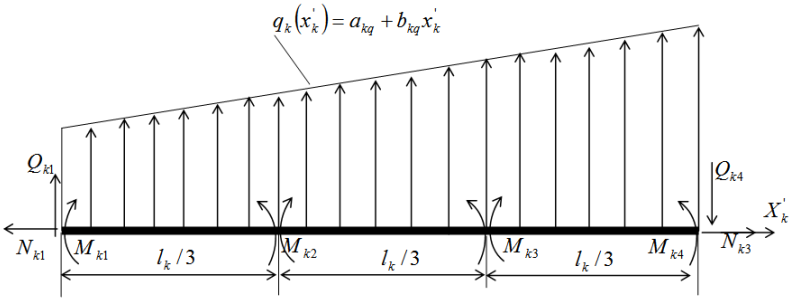


Рисунок 2.1 - Элемент, находящийся под действием внешних сил и поперечной распределенной динамической нагрузки [65, с. 73]

При действии внешних сил N_{k1}, N_{k3} и продольной распределенной нагрузки (1.43), диаграмма которой показана на рисунке 2.2 (ординаты этой эпюры показывают значение интенсивности, а направления показаны стрелками). Тогда продольная сила в любом сечении элемента определяется полиномом второй степени [65, с. 76]:

$$N_k\left(x_k^{'}\right)=b_0+b_1x_k^{'}+b_2\left(x_k^{'}\right)^2. \tag{2.3}$$

В работе [65, с. 77] для элемента, находящегося под действием поперечных и продольных распределенных динамических нагрузок (1.43), получена матрица аппроксимации, связывающая внутренние усилия в любом сечении элемента со значениями внутренних усилий в расчетных сечениях, показанных на рисунках 2.1, 2.2 и имеет вид:

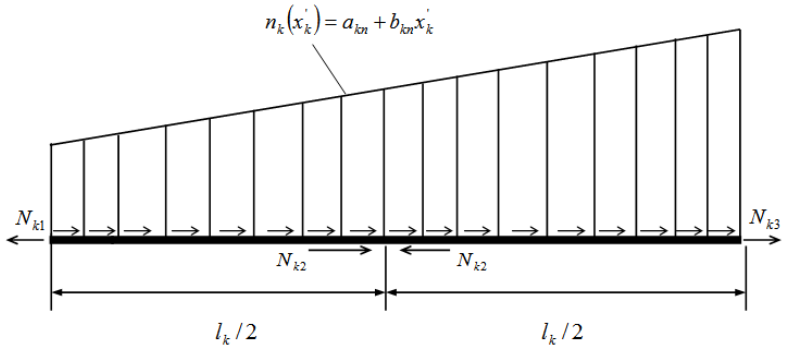


Рисунок 2.2 - Элемент, находящийся под действием распределенной продольной нагрузки [65, с. 76]

$$\left[H_k\left(x_k^{'}\right)\right]=\begin{bmatrix} h_{11}\left(x_k^{'}\right) & h_{12}\left(x_k^{'}\right) & h_{13}\left(x_k^{'}\right) & h_{14}\left(x_k^{'}\right) & 0 & 0 & 0 \\ h_{21}\left(x_k^{'}\right) & h_{22}\left(x_k^{'}\right) & h_{23}\left(x_k^{'}\right) & h_{24}\left(x_k^{'}\right) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & h_{35}\left(x_k^{'}\right) & h_{36}\left(x_k^{'}\right) & h_{37}\left(x_k^{'}\right) \end{bmatrix}, \quad (2.4)$$

где

$$h_{11}\left(x_k^{'}\right)=\left[1-\frac{11}{2l_k}x_k^{'}+\frac{9}{l_k^2}\left(x_k^{'}\right)^2-\frac{9}{2l_k^3}\left(x_k^{'}\right)^3\right],\quad h_{12}\left(x_k^{'}\right)=\left[\frac{9}{l_k}x_k^{'}-\frac{45}{2l_k^2}\left(x_k^{'}\right)^2+\frac{27}{2l_k^3}\left(x_k^{'}\right)^3\right],$$

$$h_{13}\left(x_k^{'}\right)=\left[-\frac{9}{2l_k}x_k^{'}+\frac{18}{l_k^2}\left(x_k^{'}\right)^2-\frac{27}{2l_k^3}\left(x_k^{'}\right)^3\right],\quad h_{14}\left(x_k^{'}\right)=\left[\frac{1}{l_k}x_k^{'}-\frac{9}{2l_k^2}\left(x_k^{'}\right)^2+\frac{9}{2l_k^3}\left(x_k^{'}\right)^3\right],$$

$$h_{21}\left(x_k^{'}\right)=\left[-\frac{11}{2l_k}x_k^{'}+\frac{18}{l_k^2}\left(x_k^{'}\right)^2-\frac{27}{2l_k^3}\left(x_k^{'}\right)^3\right],\quad h_{22}\left(x_k^{'}\right)=\left[\frac{9}{l_k}-\frac{45}{l_k^2}x_k^{'}+\frac{81}{2l_k^3}\left(x_k^{'}\right)^3\right],$$

$$h_{23}\left(x_k^{'}\right)=\left[-\frac{9}{2l_k}+\frac{36}{l_k^2}x_k^{'}-\frac{81}{2l_k^3}\left(x_k^{'}\right)^2\right],\quad h_{24}\left(x_k^{'}\right)=\left[\frac{1}{l_k}-\frac{9}{l_k^2}x_k^{'}+\frac{27}{2l_k^3}\left(x_k^{'}\right)^2\right],$$

$$h_{35}=\left[1-\frac{3}{l_k}x_k^{'}+\frac{2}{l_k^2}\left(x_k^{'}\right)^2\right],\ h_{36}\left(x_k^{'}\right)=\left[\frac{4}{l_k}x_k^{'}-\frac{4}{l_k^2}\left(x_k^{'}\right)^2\right],\ h_{37}\left(x_k^{'}\right)=\left[-\frac{1}{l_k}x_k^{'}+\frac{2}{l_k^2}\left(x_k^{'}\right)^2\right].$$

Матрица аппроксимации усилий определяет зависимость между вектором усилий $\left\{S_k\left(x_k^{'}\right)\right\}$ в любом сечении $x_k^{'}$ элемента и вектором усилий в назначенных сечениях $\{S_k\}$. $\left\{S_k\left(x_k^{'}\right)\right\}$ и $\{S_k\}$ выглядят следующим образом [65, с. 109]:

$$\left\{S_k\left(x_k^{'}\right)\right\}=\begin{Bmatrix} M_k\left(x_k^{'}\right) \\ Q_k\left(x_k^{'}\right) \\ N_k\left(x_k^{'}\right) \end{Bmatrix},\ \left\{S_k\right\}^T=\left\{M_{k1},M_{k2},M_{k3},M_{k4},N_{k1},N_{k2},N_{k3}\right\}. \quad (2.5)$$

Используя уравнение (2.1) получено выражение внутренних усилий в искомых величинах [65, с. 75]:

$$\begin{aligned} M_k\left(x_k^{'}\right)=&\left[1-\frac{11}{2l_k}x_k^{'}+\frac{9}{l_k^2}\left(x_k^{'}\right)^2-\frac{9}{2l_k^3}\left(x_k^{'}\right)^3\right]M_{k1}+\left[\frac{9}{l_k}x_k^{'}-\frac{45}{2l_k^2}\left(x_k^{'}\right)^2+\frac{27}{2l_k^3}\left(x_k^{'}\right)^3\right]M_{k2}+\\ &+\left[-\frac{9}{2l_k}x_k^{'}+\frac{18}{l_k^2}\left(x_k^{'}\right)^2-\frac{27}{2l_k^3}\left(x_k^{'}\right)^3\right]M_{k3}+\left[\frac{1}{l_k}x_k^{'}-\frac{9}{2l_k^2}\left(x_k^{'}\right)^2+\frac{9}{2l_k^3}\left(x_k^{'}\right)^3\right]M_{k4}, \end{aligned} \quad (2.6)$$

$$Q_k\left(x_k^{'}\right)=\left[-\frac{11}{2l_k}+\frac{18}{l_k^2}x_k^{'}-\frac{27}{2l_k^3}\left(x_k^{'}\right)^2\right]M_{k1}+\left[\frac{9}{l_k}-\frac{45}{l_k^2}x_k^{'}+\frac{81}{2l_k^3}\left(x_k^{'}\right)^2\right]M_{k2}+$$
$$+\left[-\frac{9}{2l_k}+\frac{36}{l_k^2}x_k^{'}-\frac{81}{2l_k^3}\left(x_k^{'}\right)^2\right]M_{k3}+\left[\frac{1}{l_k}-\frac{9}{l_k^2}x_k^{'}+\frac{27}{2l_k^3}\left(x_k^{'}\right)^2\right]M_{k4}, \quad (2.7)$$

$$N_k\left(x_k^{'}\right)=\left[1-\frac{3}{l_k}x_k^{'}+\frac{2}{l_k^2}\left(x_k^{'}\right)^2\right]N_{k1}+\left[\frac{4}{l_k}x_k^{'}-\frac{4}{l_k^2}\left(x_k^{'}\right)^2\right]N_{k2}+\left[-\frac{1}{l_k}x_k^{'}+\frac{2}{l_k^2}\left(x_k^{'}\right)^2\right]N_{k3}. \quad (2.8)$$

Таким образом, из уравнений изгибающего момента, поперечных и продольных сил, выраженных через искомые величины в расчетных сечениях, заметим, что для определения внутренних усилий каждого элемента механизма достаточно знать значения этих усилий в конечном числе сечений.

2.2 Расчетная схема шестизвенного механизма второго класса

Для упругого расчета стержневых механизмов применим принцип Даламбера. Для этого приложим к звеньям все динамические нагрузки и внешние силы, а к ведущим звеньям приложим неизвестные движущие моменты (силы), обеспечивающие заданные законы их движения. В результате получим конструкцию, степень подвижности которой равна нулю (рисунок 2.3).

Например, механизм второго класса, показанный на рисунке 2.3, можно рассмотреть как геометрическую неизменяемую систему (рисунок 2.4), если ведущее звено в стойке заменить консолью. Полученную систему назовем расчетной схемой исследуемого механизма.

Степень подвижности этой системы определим по формуле [1, с. 78]:

$$W = 3D - 2Ш - C_0. \quad (2.9)$$

где W - степень подвижности системы, D - количество дисков в рассматриваемой системе, $Ш$ - количество простых (одиночных) шарниров в рассматриваемой системе, C_0 - количество опорных стержней рассматриваемой системы. Для рассматриваемой системы имеем: $D = 4$ (здесь звено 3 рассмотрено как один диск), $Ш = 3$, $C_0 = 6$. Тогда подставляя значения этих величин в формулу (2.12) имеем, что $W = 0$, т.е. полученная система геометрически неизменяема (необходимое условие).

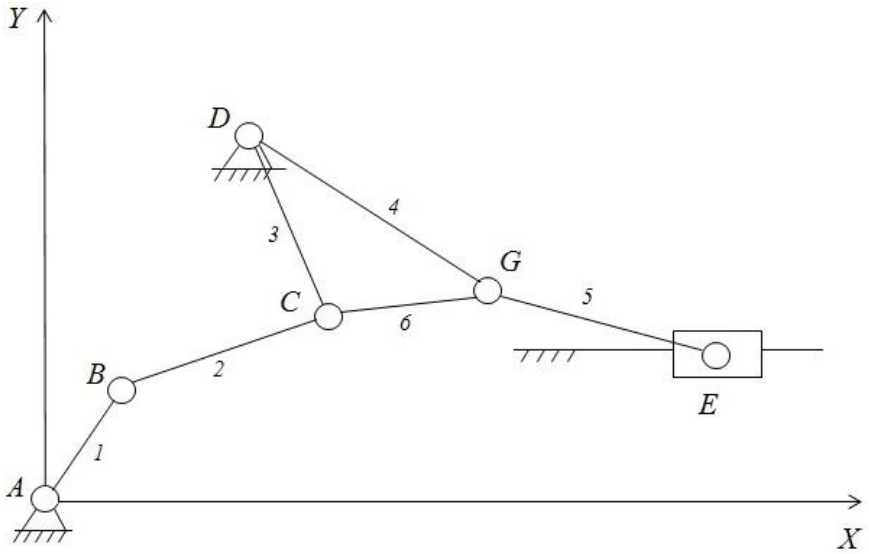


Рисунок 2.3 – Плоский механизм второго класса

Для определения внутренних усилий в звеньях (в элементах) расчетной схемы механизма, конструкцию разделим на элементы и узлы (рисунок 2.5). Элементами могут быть звено или часть звена, а узлами – шарниры, соединяющие смежные звенья и сечения, где приложены сосредоточенные внешние силы. Узлы могут быть шарнирными и жесткими [55]. Если в узлах все стержни соединены между собой шарнирно, то такие узлы назовем шарнирными, а уравнений равновесия для таких узлов будут всего два. Все силы в сечениях, прилегающих к узлу, спроецируем на взаимно перпендикулярные оси, сумма

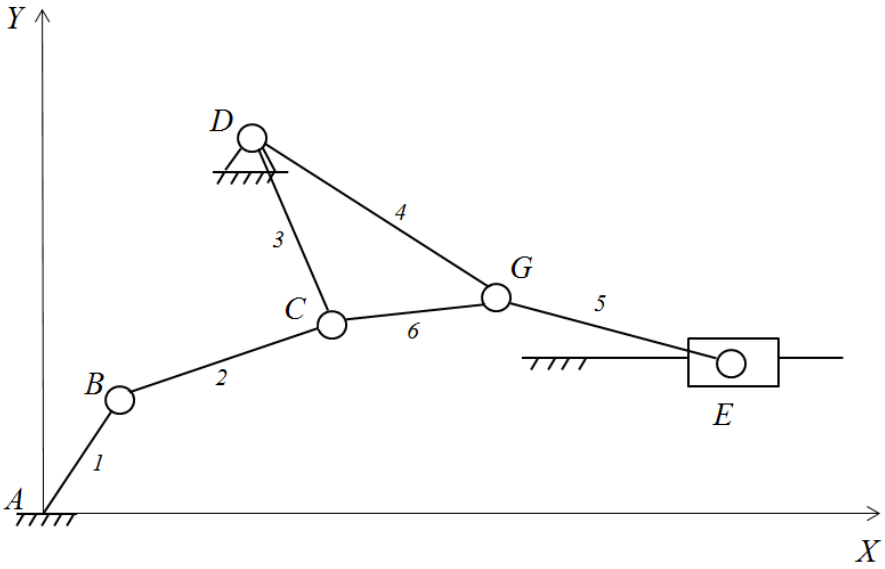


Рисунок 2.4 – Расчетная схема плоского механизма второго класса

проекций, которых должна равняться нулю. Если в узле соединены хотя бы два стержня жестко (сюда относятся сечения, где приложены сосредоточенные внешние силы), то такие узлы назовем жесткими, для таких узлов уравнений равновесия три. В данном случае к вышесказанным уравнениям добавляется уравнения моментов.

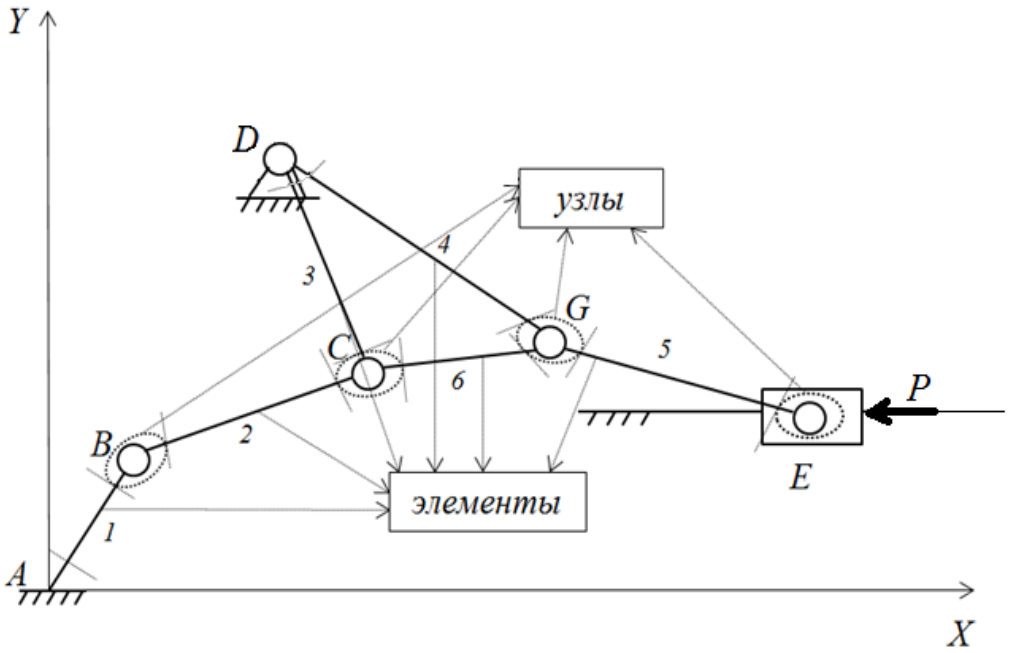


Рисунок 2.5 – Разделение механизма второго класса на элементы и узлы

2.3 Используемые условные схемы при построении дискретных моделей элементов и механизмов

Для построения дискретных моделей элементов механизмов и манипуляторов использованы следующие условные схемы:

1. В сечениях элементов, где искомой величиной является изгибающий момент, применяется схема, приведенная на рисунке 2.6.

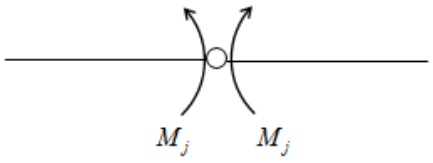


Рисунок 2.6 – Условная схема сечения элемента
с искомой величиной M_j [1, с. 74]

2. В сечениях элементов, где искомой величиной является продольная сила, применяется схема, приведенная на рисунке 2.7.

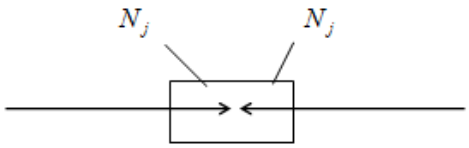


Рисунок 2.7 – Условная схема сечения элемента с искомой величиной N_j [1, с. 74]

3. В сечениях элементов, где искомыми величинами являются продольная сила и изгибающий момент, применяется схема, приведенная на рисунке 2.8.

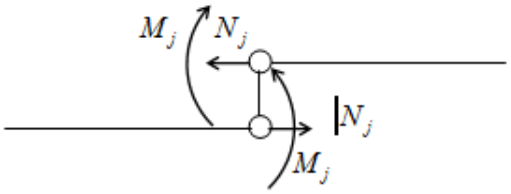


Рисунок 2.8 – Условная схема сечения элемента
с искомыми величинами N_j и M_j [1, с. 74]

При определении значений усилий в расчетах будем придерживаться следующих правил знаков: продольная сила положительна, когда она растягивает (рисунок 2.7); поперечная сила положительна, когда она вращает отсеченную часть элемента по часовой стрелке относительно любой точки, расположенной на внутренней нормали к поперечному сечению; изгибающий момент считается положительным, если растягивает нижние волокна элемента (рисунок 2.6).

Для деформаций обычно принимаются те же правила знаков, что и для усилий, т.е. положительные усилия порождают и положительные деформации, и наоборот.

Между степенью свободы дискретной модели m, числом приложенных внешних усилий n и степенью статической неопределимости расчетной схемы k существует зависимость [1, с. 34]:

$$m = n - k \ . \tag{2.10}$$

степень статической неопределимости расчетной схемы механизма определяется по следующей формуле [1, с. 71]:

$$k = 3K - Ш \, , \tag{2.11}$$

где K - число замкнутых контуров, $Ш$ - число простых (одиночных) шарниров.

Например, для механизма второго класса, показанного на рисунке 2.4 расчетная схема статически определима, если считать, что стержни базисного звена 3 соединены между собой шарнирно. В этом случае, количество замкнутых контуров $K = 2$, количество простых шарниров $Ш = 6$, тогда $k = 0$, т.е. рассматриваемая система статически определима.

Она удобна тем, что с ее помощью степень свободы дискретной модели определяется сравнительно просто. Дело в том, что общее число усилий n в расчетных сечениях подсчитывается легко, а степень статической неопределимости расчетной схемы вычисляется по формуле (2.14). степень свободы дискретной модели m определяет количество необходимых независимых динамических уравнений.

2.4 Три вида элементов и вектора усилий в расчетных сечениях этих элементов

Разложим звенья плоских стержневых механизмов на три вида элементов, для удобства составления разрешающих уравнений, определяющих внутренние усилия в расчетных сечениях элементов механизма [56, 57].

1. Первый вид элемента - это элемент с жестко закрепленными концами (рисунок 2.9). Такими элементами являются стержни базисного звена, соединенные между собой жестко.

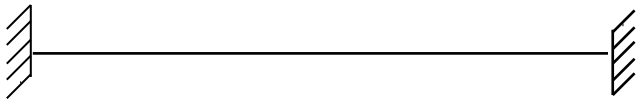


Рисунок 2.9 – Элемент с жестко закрепленными концами [65, с. 110]

Если на эти элементы действуют поперечные и продольные распределенные динамические нагрузки, выраженные в виде (1.43), тогда изгибающие моменты распределены по оси элемента по закону полинома третьей степени (2.2), а продольные силы по оси элемента распределены по закону полинома второй степени (2.3).

Чтобы определить коэффициенты выражений изгибающего момента (2.2) нужно определить значения изгибающих моментов в четырех сечениях, а для определения коэффициентов выражений продольной силы (2.3) – значения продольных сил в трех сечениях элемента. Следовательно, в этом элементе выберем четыре сечения с неизвестными изгибающими моментами и три сечения с неизвестными продольными силами. Тогда, с учетом условных схем с

соответствующими неизвестными, приведенными в подразделе 2.3, построим дискретную модель рассматриваемого элемента (рисунок 2.10).

В таком случае, вектор усилий в назначенных сечениях дискретной модели этого элемента выражается следующим вектором:

$$\{S_k\} = \{M_{k1}, M_{k2}, M_{k3}, M_{k4}, N_{k1}, N_{k2}, N_{k3}\}^T. \quad (2.12)$$

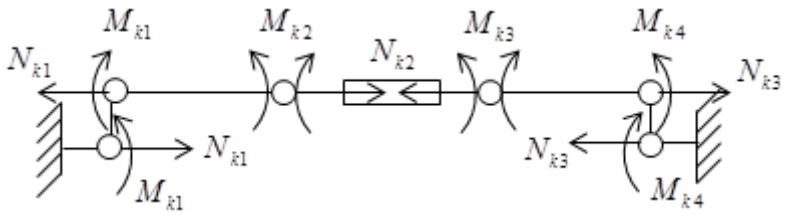


Рисунок 2.10 – Дискретная модель элемента первого вида, при действии на элемент распределенной динамической нагрузки [65, с. 111]

Степень свободы полученной дискретной модели элемента определяется по формуле (2.13). Количество неизвестных дискретной модели элемента $n = 7$. Рассматриваемая балка трижды статически неопределима, т.е. $k = 3$. Тогда степень свободы дискретной модели балки будет равна $m = 4$. Значит, можно составить четыре независимых динамических уравнений равновесия для полученной дискретной модели рассматриваемого элемента.

2. Второй вид элемента – это элемент, который закреплен жестко в одном конце, а в другом конце – шарнирно неподвижно (рисунок 2.11). К таким элементам относятся ведущие звенья плоских стержневых механизмов.

При действии на этот элемент поперечных и продольных распределенных динамических нагрузок, дискретная модель этого вида элемента выглядит, как показано на рисунке 2.12.

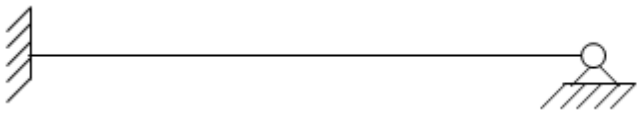


Рисунок 2.11 – Элемент, который закреплен жестко в одном конце, а в другом конце – шарнирно неподвижно [65, с. 112]

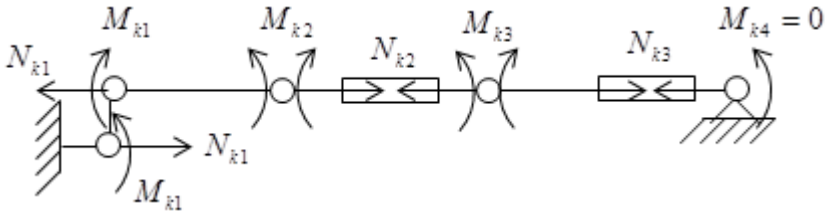


Рисунок 2.12 – Дискретная модель элемента второго вида, при действии на элемент распределенной динамической нагрузки [65, с. 112]

Компоненты вектора усилий дискретной модели элемента второго вида состоят из следующих неизвестных:

$$\{S_k\} = \{M_{k1}, M_{k2}, M_{k3}, N_{k1}, N_{k2}, N_{k3}\}^T. \quad (2.13)$$

Степень свободы этой дискретной модели элемента определяется следующим образом: для этой дискретной модели элемента количество неизвестных $n = 6$, а статическая неопределимость элемента $k = 2$, тогда степень свободы дискретной модели $m = 4$. То есть и для этой дискретной модели элемента составляется четыре независимых динамических уравнений равновесия.

3. Элемент третьего вида – это элементы промежуточных звеньев. Их можно рассматривать как элементы, закрепленные по концам шарнирно-неподвижно (рисунок 2.13).



Рисунок 2.13 – Элемент, закрепленный по концам шарнирно-неподвижно [65, с. 113]

Дискретная модель такого элемента при действии на элемент распределенных динамических нагрузок имеет вид как показано на рисунке 2.14.

Компоненты вектора усилий в назначенных сечениях такой дискретной модели элемента, состоят из следующих неизвестных:

$$\{S_k\} = \{M_{k2}, M_{k3}, N_{k1}, N_{k2}, N_{k3}\}^T. \quad (2.14)$$

Степень свободы дискретной модели такого элемента равна $m = 4$. Поэтому, для такой дискретной модели балки можно составить четыре независимых динамических уравнений равновесия.

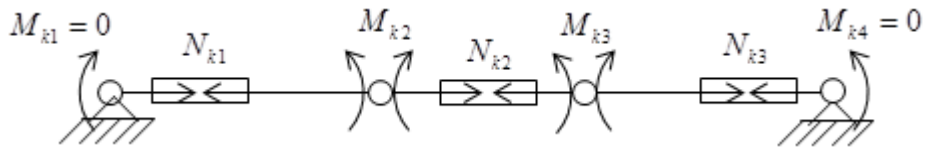


Рисунок 2.14 - Дискретная модель элемента третьего вида, при действии на элемент распределенной динамической нагрузки [65, с. 114]

2.5 Дискретная модель механизма второго класса и вектора усилий в расчетных сечениях

Рассмотрим построение дискретной модели упругого расчета механизма второго класса (рисунок 2.4). Пусть все стержни звеньев этого механизма имеют постоянные сечения и стержни базисного звена *3* соединены между собой шарнирно.

Далее, для удобства построения дискретной модели механизма и составления разрешающих уравнений, определяющих внутренние усилия в звеньях, разложим звенья механизма на три вида элементов.

Стержень ведущего звена *1* рассмотрим, как элемент один конец которой закреплен жестко, а другой конец шарнирно неподвижно (рисунок 2.11). Так как во время движения этого механизма по оси звеньев появляются поперечные и продольные распределенные нагрузки, то дискретная модель этого звена изображается схемой, показанной на рисунке 2.12.

Стержни звеньев *3* и звеньев *2*, *5* рассмотрим, как элементы, оба конца которой закреплены шарнирно неподвижно (рисунок 2.13). При действии по оси этих стержней поперечных и продольных распределенных динамических нагрузок, дискретные модели этих элементов выглядят как показано на рисунке 2.14.

Построим дискретную модель расчетной схемы этого механизма, которая изображается схемой показанной на рисунке 2.15.

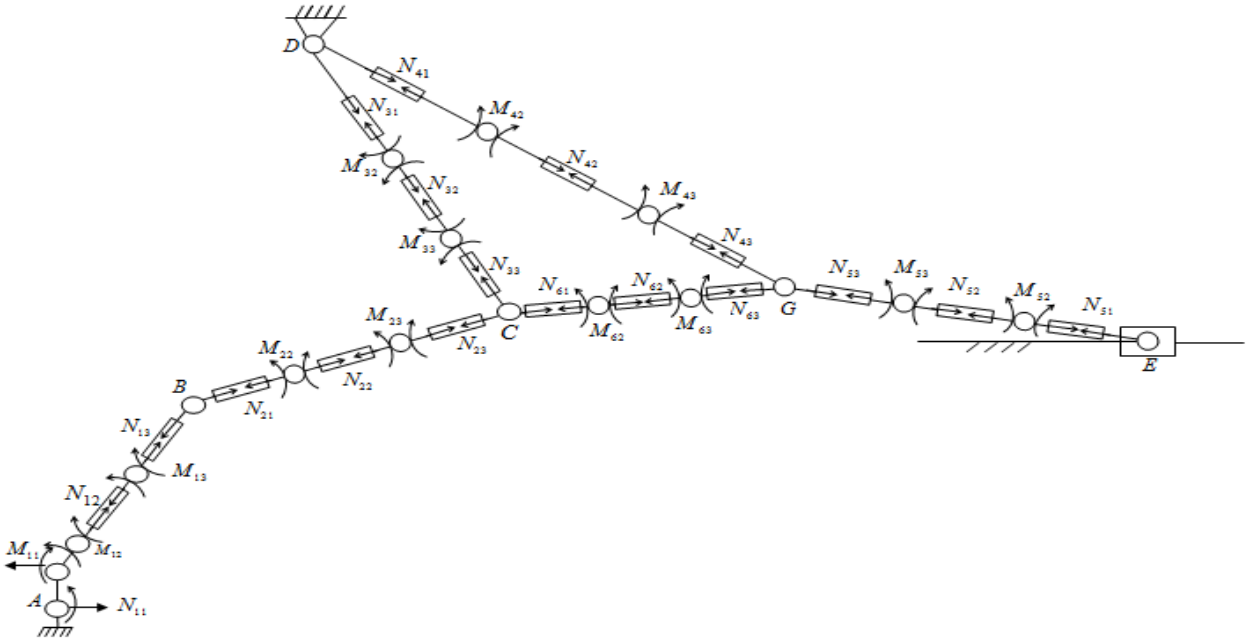


Рисунок 2.15 - Дискретная модель механизма второго класса с постоянными сечениями звеньев и со статической определимой структурой

Построим вектора усилий в расчетных сечениях звеньев для рассматриваемого механизма.

Тогда имеем:

$$\begin{aligned}&\{S_1\}=\{M_{11},M_{12},M_{13},N_{11},N_{12},N_{13}\}^T,\ \{S_2\}=\{M_{22},M_{23},N_{21},N_{22},N_{23}\}^T,\\&\{S_3\}=\{M_{32},M_{33},N_{31},N_{32},N_{33}\}^T,\ \{S_4\}=\{M_{42},M_{43},N_{41},N_{42},N_{43}\}^T,\\&\{S_5\}=\{M_{52},M_{53},N_{51},N_{52},N_{53}\}^T,\ \{S_6\}=\{M_{62},M_{63},N_{61},N_{62},N_{63}\}^T.\end{aligned}\qquad(2.15)$$

Вектор усилий в расчетных сечениях для дискретной модели рассматриваемого механизма второго класса имеет вид:

$$\begin{aligned}\{S\}=\{&M_{11},M_{12},M_{13},N_{11},N_{12},N_{13},M_{22},M_{23},N_{21},N_{22},N_{23},\\&M_{32},M_{33},N_{31},N_{32},N_{33},M_{42},M_{43},N_{41},N_{42},N_{43},M_{52},M_{53},\\&N_{51},N_{52},N_{53},M_{62},M_{63},N_{61},N_{62},N_{63}\}^T.\end{aligned}\qquad(2.16)$$

2.6 Краткие выводы по разделу 2

1. Для упругого расчета стержневых механизмов, на основе принципа Даламбера, механизмы приводились к конструкциям (расчетным схемам механизма), степень подвижности которых равна нулю.
2. Для определения внутренних усилий в звеньях (в элементах) расчетной схемы механизма, конструкция разделена на элементы и узлы.
3. Для построения дискретной модели элементов были применены условные схемы, которые показывают какие искомые величины внутренних усилий определяются в рассматриваемом сечении.
4. Построены дискретные модели звеньев с постоянными сечениями и дискретная модель всего механизма.

3 ДИНАМИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ РАВНОВЕСИЯ ЭЛЕМЕНТОВ И УЗЛОВ, УЧИТЫВАЮЩИЕ РАСПРЕДЕЛЕННЫЕ ДИНАМИЧЕСКИЕ НАГРУЗКИ И ВЫРАЖЕННЫЕ ЧЕРЕЗ ИСКОМЫЕ ПАРАМЕТРЫ

Одним из важных задач проектирования плоских стержневых механизмов и манипуляторов является обеспечение прочности и жесткости работы звеньев в полном рабочем процессе при любых (управляемых) скоростях и ускорениях обобщенных координат. Для определения конструктивных размеров звеньев стержневых механизмов и манипуляторов, обеспечивающих прочную и надежную работу звеньев и в целом механизмов и манипуляторов, необходимо знать законы распределения по оси звеньев внутренних усилий, возникающих от внешних сосредоточенных и распределенных динамических нагрузок.

3.1 Динамические уравнения равновесия дискретной модели элементов, находящегося под действием распределенных динамических нагрузок и динамические уравнения равновесия узлов

При плоскопараллельном движении k-го элемента механизма с постоянным сечением, вдоль оси элемента появляются поперечные и продольные распределенные динамические нагрузки, интенсивности которых выражаются соответственно выражениями (1.43).

На рисунке 2.10 была построена дискретная модель такого элемента, и в подразделе 2.4, было найдено для построенной дискретной модели элемента количество независимых динамических уравнений равновесия, которое равно четырем. В работе [65, с. 124] были получены эти динамические уравнения равновесия для дискретной модели элемента при действии на элемент внешних и распределенных динамических нагрузок (1.43).

Полученная система динамических уравнений равновесия в матричной форме имеет вид:

$$[A_k]\{S_k\} = \{F_k\}, \tag{3.1}$$

где

$$[A_k] = \begin{bmatrix} -\frac{27}{l_k^3} & \frac{81}{l_k^3} & -\frac{81}{l_k^3} & \frac{27}{l_k^3} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{9}{2} & 9 & -\frac{9}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{4}{l_k^2} & -\frac{8}{l_k^2} & \frac{4}{l_k^2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \tag{3.2}$$

$$\{S_k\} = \{M_{k1}, M_{k2}, M_{k3}, M_{k4}, N_{k1}, N_{k2}, N_{k3}\}^T, \tag{3.3}$$

$$\{F_k\} = \left\{ b_{kq}, \quad -a_{kq}\frac{l_k^2}{2} - b_{kq}\frac{l_k^3}{6}, \quad -b_{kn}, \quad -a_{kn}l_k - b_{kn}\frac{l_k^2}{2} \right\}^T . \qquad (3.4)$$

В работе [65, с. 132] получены динамические уравнения равновесия для узлов: 1) когда два элемента j и k механизма образуют вращательную кинематическую пару (рисунок 3.1); 2) когда три элемента j, k и i механизма образуют вращательную кинематическую пару, где элементы i и k соединены между собой жестко (рисунок 3.2); 3) где приложены сосредоточенные силы и моменты (рисунок 3.3).

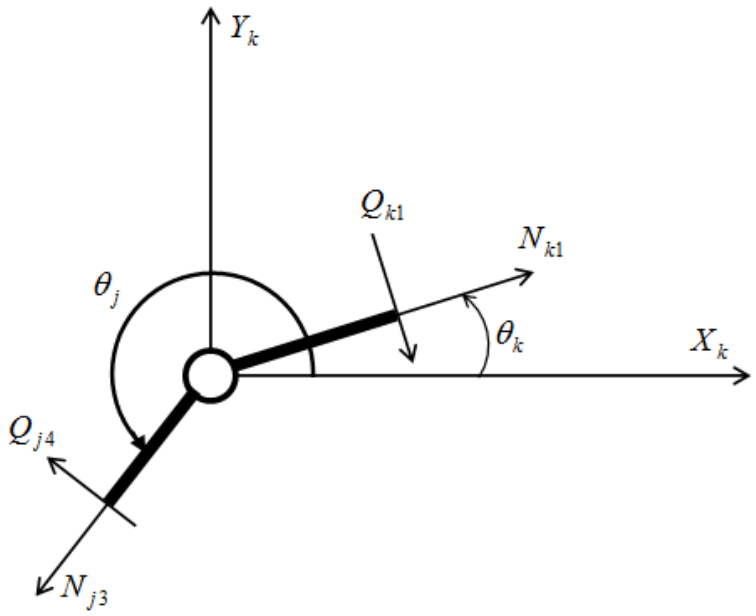


Рисунок 3.1 – Узел с вращательными кинематическими парами и с постоянным сечением элементов [65, с. 132]

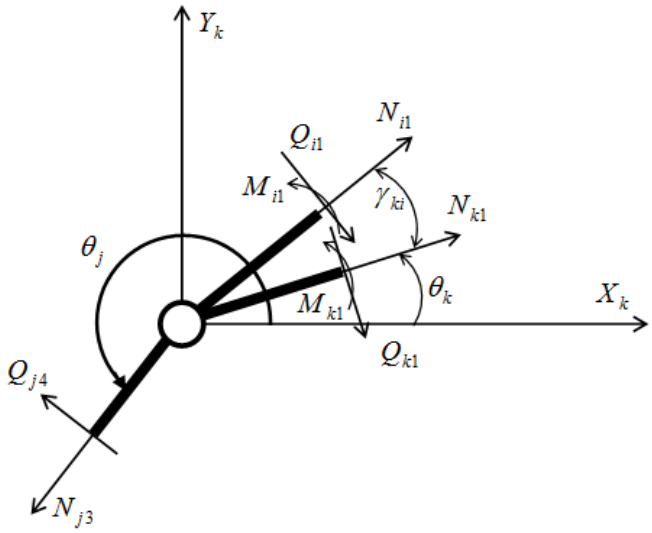


Рисунок 3.2 – Узел с вращательной кинематической парой, где элементы i и k соединены между собой жестко [65, с. 135]

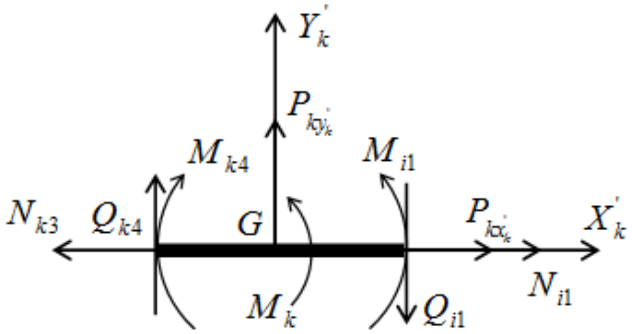


Рисунок 3.3 – Узел, где приложены внешние сосредоточенные силы [65, с. 138]

Эти динамические уравнения равновесия узлов, выраженные через искомые параметры, выражены, соответственно, следующим образом [65, с. 133, с. 136, с. 138]:

$$
\begin{cases}
-\dfrac{11\sin\theta_k}{2l_k}M_{k1}+\dfrac{9\sin\theta_k}{l_k}M_{k2}-\dfrac{9\sin\theta_k}{2l_k}M_{k3}+\dfrac{\sin\theta_k}{l_k}M_{k4}+\cos\theta_k N_{k1}- \\
-\dfrac{\sin\theta_j}{l_j}M_{j1}+\dfrac{9\sin\theta_j}{2l_j}M_{j2}-\dfrac{9\sin\theta_j}{l_j}M_{j3}+\dfrac{11\sin\theta_j}{2l_j}M_{j4}+\cos\theta_j N_{j3}=0, \\
\dfrac{11\cos\theta_k}{2l_k}M_{k1}+\dfrac{9\cos\theta_k}{l_k}M_{k2}+\dfrac{9\cos\theta_k}{2l_k}M_{k3}-\dfrac{\cos\theta_k}{l_k}M_{k4}+\sin\theta_k N_{k1}+ \\
+\dfrac{\cos\theta_j}{l_j}M_{j1}-\dfrac{9\cos\theta_j}{2l_j}M_{j2}+\dfrac{9\cos\theta_j}{l_j}M_{j3}-\dfrac{11\cos\theta_j}{2l_j}M_{j4}+\sin\theta_j N_{j3}=0,
\end{cases} \tag{3.5}
$$

$$
\begin{cases}
-\dfrac{11\sin\theta_k}{2l_k}M_{k1}+\dfrac{9\sin\theta_k}{l_k}M_{k2}-\dfrac{9\sin\theta_k}{2l_k}M_{k3}+\dfrac{\sin\theta_k}{l_k}M_{k4}+\cos\theta_k N_{k1}- \\
-\dfrac{11\sin(\theta_k+\gamma_{ki})}{2l_i}M_{i1}+\dfrac{9\sin(\theta_k+\gamma_{ki})}{l_i}M_{i2}-\dfrac{9\sin(\theta_k+\gamma_{ki})}{2l_i}M_{i3}+\dfrac{\sin(\theta_k+\gamma_{ki})}{l_i}M_{i4}+ \\
+\cos(\theta_k+\gamma_{ki})N_{i1}-\dfrac{\sin\theta_j}{l_j}M_{j1}+\dfrac{9\sin\theta_j}{2l_j}M_{j2}-\dfrac{9\sin\theta_j}{l_j}M_{j3}+\dfrac{11\sin\theta_j}{2l_j}M_{j4}+\cos\theta_j N_{j3}=0, \\
\dfrac{11\cos\theta_k}{2l_k}M_{k1}-\dfrac{9\cos\theta_k}{l_k}M_{k2}+\dfrac{9\cos\theta_k}{2l_k}M_{k3}-\dfrac{\cos\theta_k}{l_k}M_{k4}+\sin\theta_k N_{k1}+ \\
+\dfrac{11\cos(\theta_k+\gamma_{ki})}{2l_i}M_{ki}-\dfrac{9\cos(\theta_k+\gamma_{ki})}{l_i}M_{i2}+\dfrac{9\cos(\theta_k+\gamma_{ki})}{2l_i}M_{i3}-\dfrac{\cos(\theta_k+\gamma_{ki})}{l_i}M_{i4}+ \\
+\sin(\theta_k+\gamma_{ki})N_{i1}+\dfrac{\cos\theta_j}{l_j}M_{j1}-\dfrac{9\cos\theta_j}{2l_j}M_{j2}+\dfrac{9\cos\theta_j}{l_j}M_{j3}-\dfrac{11\cos\theta_j}{2l_j}M_{j4}+\sin\theta_j N_{j3}=0, \\
M_{i1}+M_{k1}=0,
\end{cases} \tag{3.6}
$$

$$
\begin{cases}
-\dfrac{1}{l_k}M_{k1}+\dfrac{9}{2l_k}M_{k2}-\dfrac{9}{l_k}M_{k3}+\dfrac{11}{2l_k}M_{k4}+\dfrac{11}{2l_i}M_{i1}-\dfrac{9}{l_i}M_{i2}+\dfrac{9}{2l_i}M_{i3}-\dfrac{1}{l_k}M_{i4}=-P_{ky_k'}, \\
-N_{k3}+N_{i1}=-P_{kx_k'}, \\
M_{k4}-M_{i1}=M_k.
\end{cases} \tag{3.7}
$$

В динамических уравнениях равновесия дискретной модели элемента и узлов установлены связи между компонентами вектора усилий в расчетных сечениях и геометрическими, физическими и кинематическими характеристиками

элемента при его плоскопараллельном движении. Объединив динамические уравнения равновесия элементов и узлов в одну систему, получим разрешающие уравнения равновесия для всей дискретной модели механизмов, где искомые величины определяются аналитически.

3.2 Разрешающие уравнения для определения внутренних усилий в сечениях звеньев механизма второго класса со статически определимой структурой

Определение внутренних усилий рассмотрим на примере шестизвенного механизма второго класса со статической определимой структурой. Дискретная модель рассматриваемого механизма изображена на рисунке 2.15. Вектора усилий в расчетных сечениях его элементов приведены в выражении (2.15). Вектор усилий для дискретной модели механизма приведен в выражении (2.16).

Матрицы коэффициентов уравнения динамического равновесия элементов 1, 2, 3, 4, 5, 6 имеют, соответственно, следующие виды:

$$[A_1]=\begin{bmatrix} -\frac{27}{AB^3} & \frac{81}{AB^3} & -\frac{81}{AB^3} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{9}{2} & 9 & -\frac{9}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{4}{AB^2} & -\frac{8}{AB^2} & \frac{4}{AB^2} \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (3.8)$$

$$[A_2]=\begin{bmatrix} \frac{81}{BC^3} & -\frac{81}{BC^3} & 0 & 0 & 0 \\ 9 & -\frac{9}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{4}{BC^2} & -\frac{8}{BC^2} & \frac{4}{BC^2} \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (3.9)$$

$$[A_3]=\begin{bmatrix} \frac{81}{CD^3} & -\frac{81}{CD^3} & 0 & 0 & 0 \\ 9 & -\frac{9}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{4}{CD^2} & -\frac{8}{CD^2} & \frac{4}{CD^2} \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (3.10)$$

$$[A_4]=\begin{bmatrix} \frac{81}{DG^3} & -\frac{81}{DG^3} & 0 & 0 & 0 \\ 9 & -\frac{9}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{4}{DG^2} & -\frac{8}{DG^2} & \frac{4}{DG^2} \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \tag{3.11}$$

$$[A_5]=\begin{bmatrix} \frac{81}{GE^3} & -\frac{81}{GE^3} & 0 & 0 & 0 \\ 9 & -\frac{9}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{4}{GE^2} & -\frac{8}{GE^2} & \frac{4}{GE^2} \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \tag{3.12}$$

$$[A_6]=\begin{bmatrix} \frac{81}{CG^3} & -\frac{81}{CG^3} & 0 & 0 & 0 \\ 9 & -\frac{9}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{4}{CG^2} & -\frac{8}{CG^2} & \frac{4}{CG^2} \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \tag{3.13}$$

Силовые вектора элементов 1, 2, 3, 4, 5, 6 соответственно имеют виды:

$$\{F_1\}=\left\{ b_{1q},\ -a_{1q}\frac{AB^2}{2}-b_{1q}\frac{AB^3}{6},\ -b_{1n},\ -a_{1n}AB-b_{1n}\frac{AB^2}{2}\right\}^T, \tag{3.14}$$

$$\{F_2\}=\left\{ b_{2q},\ -a_{2q}\frac{BC^2}{2}-b_{2q}\frac{BC^3}{6},\ -b_{2n},\ -a_{2n}BC-b_{2n}\frac{BC^2}{2}\right\}^T, \tag{3.15}$$

$$\{F_3\}=\left\{ b_{3q},\ -a_{3q}\frac{CD^2}{2}-b_{3q}\frac{CD^3}{6},\ -b_{3n},\ -a_{3n}CD-b_{3n}\frac{CD^2}{2}\right\}^T, \tag{3.16}$$

$$\{F_4\}=\left\{ b_{4q},\ -a_{4q}\frac{DG^2}{2}-b_{4q}\frac{DG^3}{6},\ -b_{4n},\ -a_{4n}DG-b_{4n}\frac{DG^2}{2}\right\}^T, \tag{3.17}$$

$$\{F_5\}=\left\{ b_{5q},\ -a_{5q}\frac{GE^2}{2}-b_{5q}\frac{GE^3}{6},\ -b_{5n},\ -a_{5n}GE-b_{5n}\frac{GE^2}{2}\right\}^T, \tag{3.18}$$

$$\{F_6\}=\left\{ b_{6q},\ -a_{6q}\frac{CG^2}{2}-b_{6q}\frac{CG^3}{6},\ -b_{6n},\ -a_{6n}CG-b_{6n}\frac{CG^2}{2}\right\}^T. \tag{3.19}$$

Силовой вектор для дискретной модели механизма:

$$\begin{aligned}\{F\}=\Bigg\{&b_{1q},-a_{1q}\frac{AB^2}{2}-b_{1q}\frac{AB^3}{6},\ -b_{1n},\ -a_{1n}AB-b_{1n}\frac{AB^2}{2},b_{2q},\ -a_{2q}\frac{BC^2}{2}-b_{2q}\frac{BC^3}{6},\\ &-b_{2n},\ -a_{2n}BC-b_{2n}\frac{BC^2}{2},b_{3q},\ -a_{3q}\frac{CD^2}{2}-b_{3q}\frac{CD^3}{6},\ -b_{3n},\ -a_{3n}CD-b_{3n}\frac{CD^2}{2},b_{4q},\\ &-a_{4q}\frac{DG^2}{2}-b_{4q}\frac{DG^3}{6},-b_{4n},\ -a_{4n}DG-b_{4n}\frac{DG^2}{2},b_{5q},\ -a_{5q}\frac{GE^2}{2}-b_{5q}\frac{GE^3}{6},\ -b_{5n},\\ &-a_{5n}GE-b_{5n}\frac{GE^2}{2},b_{6q},\ -a_{6q}\frac{CG^2}{2}-b_{6q}\frac{CG^3}{6},\ -b_{6n},\ -a_{6n}CG-b_{6n}\frac{CG^2}{2},0,0,0,0,0,0,P\Bigg\}^T.\end{aligned} \tag{3.20}$$

Динамические уравнения равновесия узла *B* рассматриваемого механизма:

$$\begin{cases} N_{13}\cos(\theta_{BA})+Q_{14}\sin(\theta_{BA})+N_{21}\cos(\theta_2)+Q_{21}\sin(\theta_2)=0,\\ \\ N_{13}\sin(\theta_{BA})-Q_{14}\cos(\theta_{BA})+N_{21}\sin(\theta_2)-Q_{21}\cos(\theta_2)=0, \end{cases} \tag{3.21}$$

где $Q_{14}=-\frac{1}{AB}M_{11}+\frac{9}{2\cdot AB}M_{12}-\frac{9}{AB}M_{13};\ Q_{21}=\frac{9}{BC}M_{22}-\frac{9}{2\cdot BC}M_{23};\ \theta_{BA}=\arctan\left(\frac{ya-yb}{xa-xb}\right).$

Подставляя значения этих усилий в уравнения (3.21), получим следующие уравнения равновесия узла B:

$$\begin{cases} N_{13}\cos(\theta_{BA})-\frac{\sin(\theta_{BA})M_{11}}{AB}+\frac{9}{2}\frac{\sin(\theta_{BA})M_{12}}{AB}-\frac{9\sin(\theta_{BA})M_{13}}{AB}+N_{21}\cos(\theta_2)+\frac{9\sin(\theta_2)M_{22}}{BC}-\\ \frac{9}{2}\frac{\sin(\theta_2)M_{23}}{BC}=0,\\ \\ N_{13}\sin(\theta_{BA})+\frac{\cos(\theta_{BA})M_{11}}{AB}-\frac{9}{2}\frac{\cos(\theta_{BA})M_{12}}{AB}+\frac{9\cos(\theta_{BA})M_{13}}{AB}+N_{21}\sin(\theta_2)-\frac{9\cos(\theta_2)M_{22}}{BC}+\\ \frac{9}{2}\frac{\cos(\theta_2)M_{23}}{BC}=0. \end{cases} \tag{3.22}$$

Динамические уравнения равновесия узла *C* рассматриваемого механизма:

$$\begin{cases} N_{23}\cos(\theta_{CB}) + Q_{24}\sin(\theta_{CB}) + N_{61}\cos(\theta_6) + Q_{61}\sin(\theta_6) + N_{33}\cos(\theta_{CD}) + Q_{34}\sin(\theta_{CD}) = 0, \\ N_{23}\sin(\theta_{CB}) - Q_{24}\cos(\theta_{CB}) + N_{61}\sin(\theta_6) - Q_{61}\cos(\theta_6) + N_{33}\sin(\theta_{CD}) - Q_{34}\cos(\theta_{CD}) = 0. \end{cases} \quad (3.23)$$

где $Q_{24} = \frac{9}{2 \cdot BC} M_{22} - \frac{9}{BC} M_{23}$; $Q_{61} = \frac{9}{CG} M_{62} - \frac{9}{2 \cdot CG} M_{63}$; $Q_{34} = \frac{9}{2 \cdot CD} M_{32} - \frac{9}{CD} M_{33}$;

$\theta_{CB} = \arctan\left(\frac{yb - yc}{xb - xc}\right)$, $\theta_{CD} = \arctan\left(\frac{yd - yc}{xd - xc}\right)$, $\theta_6 = \arctan\left(\frac{yg - yc}{xg - xc}\right)$.

Подставляя значения этих усилий в уравнения (3.23), получим следующие уравнения равновесия узла *C*:

$$\begin{cases} N_{23}\cos(\theta_{CB}) + \frac{9}{2}\frac{\sin(\theta_{CB})M_{22}}{BC} - \frac{9\sin(\theta_{CB})M_{23}}{BC} + N_{61}\cos(\theta_6) + \frac{9}{2}\frac{\sin(\theta_6)M_{62}}{CG} - \\ - \frac{9\sin(\theta_6)M_{63}}{CG} + N_{33}\cos(\theta_{CD}) + \frac{9\sin(\theta_{CD})M_{32}}{2 \cdot CD} - \frac{9\sin(\theta_{CD})M_{33}}{CD} = 0, \\ N_{23}\sin(\theta_{CB}) - \frac{9}{2}\frac{\cos(\theta_{CB})M_{22}}{BC} + \frac{9\cos(\theta_{CB})M_{23}}{BC} + N_{61}\sin(\theta_6) - \frac{9\cos(\theta_6)M_{62}}{CG} + \\ + \frac{9}{2}\frac{\cos(\theta_6)M_{63}}{CG} + N_{33}\sin(\theta_{CD}) - \frac{9}{2}\frac{\cos(\theta_{CD})M_{32}}{CD} + \frac{9\cos(\theta_{CD})M_{33}}{CD} = 0. \end{cases} \quad (3.24)$$

Динамические уравнения равновесия узла *G* рассматриваемого механизма:

$$\begin{cases} N_{63}\cos(\theta_{61}) + Q_{64}\sin(\theta_{61}) + N_{53}\cos(\theta_{51}) + Q_{54}\sin(\theta_{51}) + N_{43}\cos(\theta_{41}) + Q_{44}\sin(\theta_{41}) = 0, \\ N_{63}\sin(\theta_{61}) - Q_{64}\cos(\theta_{61}) + N_{53}\sin(\theta_{51}) - Q_{54}\cos(\theta_{51}) + N_{43}\sin(\theta_{41}) - Q_{44}\cos(\theta_{41}) = 0. \end{cases} \quad (3.25)$$

где $Q_{64} = \frac{9}{2 \cdot CG} M_{62} - \frac{9}{CG} M_{63}$; $Q_{44} = \frac{9}{2 \cdot DG} M_{42} - \frac{9}{DG} M_{43}$; $Q_{54} = \frac{9}{2 \cdot GE} M_{52} - \frac{9}{GE} M_{53}$;

$\theta_{61} = \arctan\left(\frac{yc - yg}{xc - xg}\right)$, $\theta_{51} = \arctan\left(\frac{ye - yg}{xe - xg}\right)$, $\theta_{41} = \arctan\left(\frac{yd - yg}{xd - xg}\right)$.

Подставляя значения этих усилий в уравнение (3.25), получим следующие уравнения равновесия узла *G*:

$$\begin{cases} N_{63}\cos(\theta_{61}) + \dfrac{9}{2}\dfrac{\sin(\theta_{61})M_{62}}{CG} - \dfrac{9\sin(\theta_{61})M_{63}}{CG} + N_{53}\cos(\theta_{51}) + \dfrac{9}{2}\dfrac{\sin(\theta_{51})M_{52}}{GE} - \\ - \dfrac{9\sin(\theta_{51})M_{53}}{GE} + N_{43}\cos(\theta_{41}) + \dfrac{9}{2}\dfrac{\sin(\theta_{41})M_{42}}{DG} - \dfrac{9\sin(\theta_{41})M_{43}}{DG} = 0, \\ N_{63}\sin(\theta_{61}) - \dfrac{9}{2}\dfrac{\cos(\theta_{61})M_{62}}{CG} + \dfrac{9\cos(\theta_{61})M_{63}}{CG} + N_{53}\sin(\theta_{51}) - \dfrac{9}{2}\dfrac{\cos(\theta_{51})M_{52}}{GE} + \\ + \dfrac{9\cos(\theta_{51})M_{53}}{GE} + N_{43}\sin(\theta_{41}) - \dfrac{9}{2}\dfrac{\cos(\theta_{41})M_{42}}{DG} + \dfrac{9\cos(\theta_{41})M_{43}}{DG} = 0. \end{cases} \quad (3.26)$$

Динамические уравнения равновесия узла *E* рассматриваемого механизма:

$$N_{51}\cos\theta_5 + Q_{51}\sin\theta_5 - P = 0, \quad (3.27)$$

где $Q_{51} = \dfrac{9}{GE}M_{52} - \dfrac{9}{2\cdot GE}M_{53}$; $\theta_5 = \arctan\left(\dfrac{yg - ye}{xg - xe}\right)$.

Подставляя значения этих усилий в уравнение (3.27), получим следующие уравнения равновесия узла *E*:

$$-P + N_{51}\cos(\theta_5) + \frac{9\sin(\theta_5)M_{52}}{GE} - \frac{9}{2}\frac{\sin(\theta_5)M_{53}}{GE} = 0. \quad (3.28)$$

Тогда матрица коэффициентов уравнения динамического равновесия и уравнения равновесия узлов для дискретной модели механизма имеет вид:

$$[A] = \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,31} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,31} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{31,1} & a_{31,2} & \dots & a_{31,31} \end{bmatrix},$$

где

$a_{1,1} = -\dfrac{27}{AB^3}$, $a_{1,2} = \dfrac{81}{AB^3}$, $a_{1,3} = -\dfrac{81}{AB^3}$, $a_{1,4},\dots, a_{1,31} = 0$,

$a_{2,1} = -\dfrac{9}{2}$, $a_{2,2} = 9$, $a_{2,3} = -\dfrac{9}{2}$, $a_{2,4},\dots, a_{2,31} = 0$,

$a_{3,1}, a_{3,2}, a_{3,3}, a_{3,4} = 0$, $a_{3,4} = \dfrac{4}{AB^2}$, $a_{3,5} = -\dfrac{8}{AB^2}$, $a_{3,6} = \dfrac{4}{AB^2}$, $a_{3,7},\dots, a_{3,31} = 0$,

$a_{4,1}, a_{4,2}, a_{4,3} = 0$, $a_{4,4} = -1$, $a_{4,5} = 0$, $a_{4,6} = 1$, $a_{4,7}, ..., a_{4,31} = 0$,

$a_{5,1}, ..., a_{5,6} = 0$, $a_{5,7} = \frac{81}{BC^3}$, $a_{5,8} = -\frac{81}{BC^3}$, $a_{5,9}, ..., a_{5,31} = 0$,

$a_{6,1}, ..., a_{6,6} = 0$, $a_{6,7} = 9$, $a_{6,8} = -\frac{9}{2}$, $a_{6,9}, ..., a_{6,31} = 0$,

$a_{7,1}, ..., a_{7,8} = 0$, $a_{7,9} = \frac{4}{BC^2}$, $a_{7,10} = -\frac{8}{BC^2}$, $a_{7,11} = \frac{4}{BC^2}$, $a_{7,12}, ..., a_{7,31} = 0$,

$a_{8,1}, ..., a_{8,8} = 0$, $a_{8,9} = -1$, $a_{8,10} = 0$, $a_{8,11} = 1$, $a_{8,12}, ..., a_{8,31} = 0$,

$a_{9,1}, ..., a_{9,11} = 0$, $a_{9,12} = \frac{81}{CD^3}$, $a_{9,13} = -\frac{81}{CD^3}$, $a_{9,14}, ..., a_{9,31} = 0$,

$a_{10,1}, ..., a_{10,11} = 0$, $a_{10,12} = 9$, $a_{10,13} = -\frac{9}{2}$, $a_{10,14}, ..., a_{10,31} = 0$,

$a_{11,1}, ..., a_{11,13} = 0$, $a_{11,14} = \frac{4}{CD^2}$, $a_{11,15} = -\frac{8}{CD^2}$, $a_{11,16} = \frac{4}{CD^2}$, $a_{11,17}, ..., a_{11,31} = 0$,

$a_{12,1}, ..., a_{12,13} = 0$, $a_{12,14} = -1$, $a_{12,15} = 0$, $a_{12,16} = 1$, $a_{12,17}, ..., a_{12,31} = 0$,

$a_{13,1}, ..., a_{13,16} = 0$, $a_{13,17} = \frac{81}{DG^3}$, $a_{13,18} = -\frac{81}{DG^3}$, $a_{13,19}, ..., a_{13,31} = 0$,

$a_{14,1}, ..., a_{14,16} = 0$, $a_{14,17} = 9$, $a_{14,18} = -\frac{9}{2}$, $a_{14,19}, ..., a_{14,31} = 0$,

$a_{15,1}, ..., a_{15,18} = 0$, $a_{15,19} = \frac{4}{DG^2}$, $a_{15,20} = -\frac{8}{DG^2}$, $a_{15,21} = \frac{4}{DG^2}$, $a_{15,22}, ..., a_{15,31} = 0$,

$a_{16,1}, ..., a_{16,18} = 0$, $a_{16,19} = -1$, $a_{16,20} = 0$, $a_{16,21} = 1$, $a_{16,22}, ..., a_{16,31} = 0$,

$a_{17,1}, ..., a_{17,21} = 0$, $a_{17,22} = \frac{81}{GE^3}$, $a_{17,23} = -\frac{81}{GE^3}$, $a_{17,24}, ..., a_{17,31} = 0$,

$a_{18,1}, ..., a_{18,21} = 0$, $a_{18,22} = 9$, $a_{18,23} = -\frac{9}{2}$, $a_{18,24}, ..., a_{18,31} = 0$,

$a_{19,1}, ..., a_{19,23} = 0$, $a_{19,24} = \frac{4}{GE^2}$, $a_{19,25} = -\frac{8}{GE^2}$, $a_{19,26} = \frac{4}{GE^2}$, $a_{19,27}, ..., a_{19,31} = 0$,

$a_{20,1}, ..., a_{20,23} = 0$, $a_{20,24} = -1$, $a_{20,25} = 0$, $a_{20,26} = 1$, $a_{20,27}, ..., a_{20,31} = 0$,

$a_{21,1}, ..., a_{21,26} = 0$, $a_{21,27} = \frac{81}{CG^3}$, $a_{21,28} = -\frac{81}{CG^3}$, $a_{21,29}, ..., a_{21,31} = 0$,

$a_{22,1}, ..., a_{22,26} = 0$, $a_{22,27} = 9$, $a_{22,28} = -\frac{9}{2}$, $a_{22,29}, ..., a_{22,31} = 0$,

$a_{23,1}, ..., a_{23,28} = 0$, $a_{23,29} = \frac{4}{CG^2}$, $a_{23,30} = -\frac{8}{CG^2}$, $a_{23,31} = \frac{4}{CG^2}$,

$a_{24,1}, ..., a_{24,28} = 0$, $a_{24,29} = -1$, $a_{24,30} = 0$, $a_{24,31} = 1$,

$a_{25,1} = \frac{-\sin(\theta_{BA})}{AB}$, $a_{25,2} = \frac{9\sin(\theta_{BA})}{2 \cdot AB}$, $a_{25,3} = -\frac{9\sin(\theta_{BA})}{AB}$, $a_{25,4} = 0$, $a_{25,5} = 0$,

$a_{25,6} = \cos(\theta_{BA})$, $a_{25,7} = \frac{9\sin(\theta_2)}{BC}$, $a_{25,8} = -\frac{9\sin(\theta_2)}{2 \cdot BC}$, $a_{25,9} = \cos(\theta_2)$,

$a_{25,10}, ..., a_{25,31} = 0$;

$$a_{26,1}=\frac{\cos(\theta_{BA})}{AB},\ a_{26,2}=-\frac{9\cos(\theta_{BA})}{2\cdot AB},\ a_{26,3}=\frac{9\cos(\theta_{BA})}{AB},\ a_{26,4}=0,\ a_{26,5}=0,$$
$$a_{26,6}=\sin(\theta_{BA}),\ a_{26,7}=-\frac{9\cos(\theta_2)}{BC},\ a_{26,8}=\frac{9\cos(\theta_2)}{2\cdot BC},\ a_{26,9}=\sin(\theta_2),$$
$$a_{26,10},...,a_{26,31}=0;$$
$$a_{27,1},...,a_{27,6}=0,\ a_{27,7}=\frac{9\sin(\theta_{CB})}{2\cdot BC},\ a_{27,8}=-\frac{9\sin(\theta_{CB})}{BC},\ a_{27,9}=0,\ a_{27,10}=0,$$
$$a_{27,11}=\cos(\theta_{CB}),\ a_{27,12}=\frac{9\sin(\theta_{CD})}{2\cdot CD},\ a_{27,13}=-\frac{9\sin(\theta_{CD})}{CD},\ a_{27,14}=0,\ a_{27,15}=0,$$
$$a_{27,16}=\cos(\theta_{CD}),\ a_{27,17},...,a_{27,26}=0,\ a_{27,27}=\frac{9\sin(\theta_6)}{2\cdot CG},\ a_{27,28}=-\frac{9\sin(\theta_6)}{CG},$$
$$a_{27,29}=\cos(\theta_6),\ a_{27,30},a_{27,31}=0;$$
$$a_{28,1},...,a_{28,6}=0,\ a_{28,7}=-\frac{9\cos(\theta_{CB})}{2\cdot BC},\ a_{28,8}=\frac{9\cos(\theta_{CB})}{BC},\ a_{28,9}=0,\ a_{28,10}=0,$$
$$a_{28,11}=\sin(\theta_{CB}),\ a_{28,12}=\frac{9\sin(\theta_{CD})}{2\cdot CD},\ a_{28,13}=-\frac{9\sin(\theta_{CD})}{CD},\ a_{28,14}=0,$$
$$a_{28,15}=0,\ a_{28,16}=\cos(\theta_{CD}),\ a_{28,17},...,a_{28,26}=0,\ a_{28,27}=-\frac{9\cos(\theta_6)}{CG},$$
$$a_{28,28}=\frac{9\cos(\theta_6)}{2\cdot CG},\ a_{28,29}=\sin(\theta_6),\ a_{28,30},a_{28,31}=0;$$
$$a_{29,1},...,a_{29,16}=0;\ a_{29,17}=\frac{9\sin(\theta_{41})}{2\cdot DG},\ a_{29,18}=-\frac{9\sin(\theta_{41})}{DG},\ a_{29,19}=0,$$
$$a_{29,20}=0,\ a_{29,21}=\cos(\theta_{41}),\ a_{29,22}=\frac{9\sin(\theta_{51})}{2\cdot GE},\ a_{29,23}=-\frac{9\sin(\theta_{51})}{GE},$$
$$a_{29,24}=0,\ a_{29,25}=0,\ a_{29,26}=\cos(\theta_{51}),\ a_{29,27}=\frac{9\sin(\theta_{61})}{2\cdot CG},\ a_{29,28}=-\frac{9\sin(\theta_{61})}{CG},$$
$$a_{29,29}=0,\ a_{29,30}=0,\ a_{29,31}=\cos(\theta_{61});$$
$$a_{30,1},...,a_{30,16}=0,\ a_{30,17}=-\frac{9\cos(\theta_{41})}{2\cdot DG},\ a_{30,18}=\frac{9\cos(\theta_{41})}{DG},\ a_{30,19}=0,\ a_{30,20}=0,$$
$$a_{30,21}=\sin(\theta_{41}),\ a_{30,17}=-\frac{9\cos(\theta_{51})}{2\cdot GE},\ a_{30,17}=-\frac{9\cos(\theta_{51})}{2\cdot GE},\ a_{30,18}=\frac{9\cos(\theta_{51})}{GE},$$
$$a_{30,19}=0,\ a_{30,20}=0,\ a_{30,21}=\sin(\theta_{51}),\ a_{30,22}=-\frac{9\cos(\theta_{51})}{2\cdot GE},\ a_{30,23}=\frac{9\cos(\theta_{51})}{GE},$$
$$a_{30,24}=0,\ a_{30,25}=0,\ a_{30,26}=\sin(\theta_{51}),\ a_{30,27}=\frac{9\cos(\theta_{61})}{2\cdot CG},\ a_{30,28}=\frac{9\cos(\theta_{61})}{CG},$$
$$a_{30,29}=0,\ a_{30,30}=0,\ a_{30,31}=\sin(\theta_{61});$$
$$a_{31,1},...,a_{31,21}=0,\ a_{31,22}=\frac{9\sin(\theta_5)}{GE},\ a_{31,23}=-\frac{9\sin(\theta_5)}{2\cdot GE},$$
$$a_{31,24}=\cos(\theta_5),\ a_{31,25},...,a_{31,31}=0.$$

3.3 Анимация движения механизма и манипулятора с построением на звеньях эпюр изгибающих моментов, поперечных и продольных сил

По разработанной методике созданы компьютерные программы, позволяющие производить анимацию движения механизма и манипулятора с построением на звеньях эпюр изгибающих моментов, поперечных и продольных сил (рисунки 3.4-3.12). Достоверность результатов наглядно видна при анимации движения механизма и манипулятора с построением на звеньях эпюр внутренних усилий по следующим признакам: между интенсивностью поперечных динамических нагрузок, поперечных сил, изгибающих моментов и интенсивностью продольной динамической нагрузки, продольной силы имеются дифференциальные зависимости, которые можно использовать для проверки полученных результатов; граничные условия в стойках, шарнирных узлах и т.д.

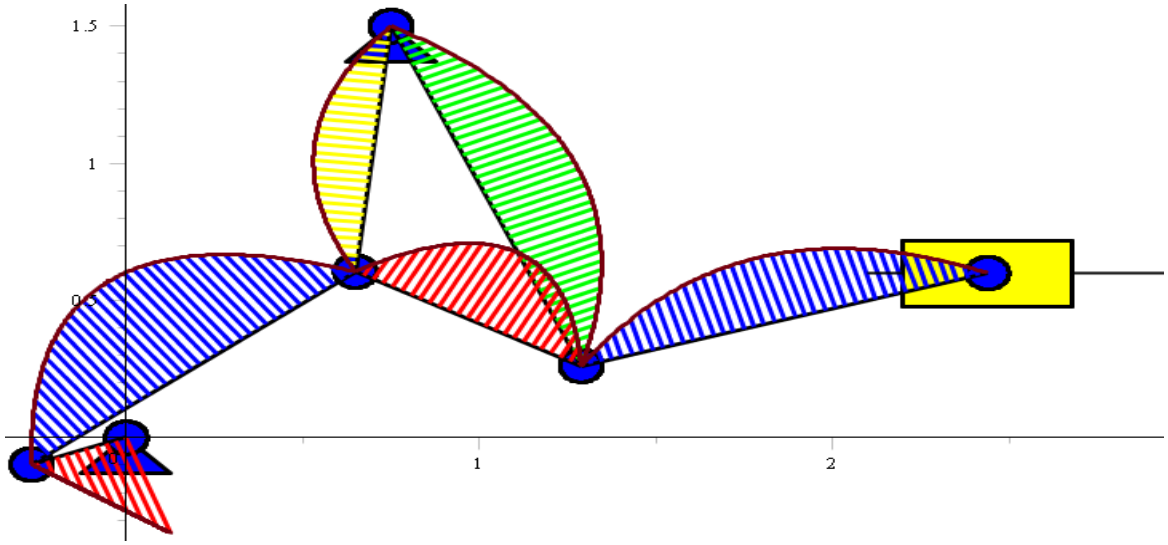


Рисунок 3.4 – Эпюры изгибающих моментов на звеньях шестизвенного механизма, возникающих от внешних сосредоточенных и динамических распределенных нагрузок при угловой скорости

$$\omega_1 = \frac{1}{сек}$$

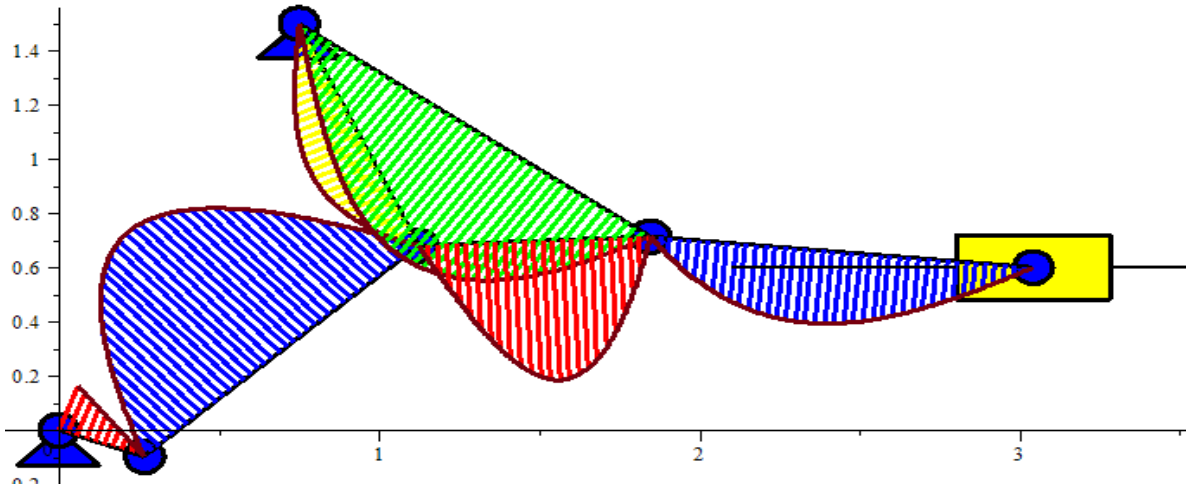


Рисунок 3.5 – Эпюры изгибающих моментов на звеньях шестизвенного механизма, возникающих от внешних сосредоточенных и динамических распределенных нагрузок при угловой скорости

$$\omega_1 = 100 \cdot \frac{1}{сек}$$

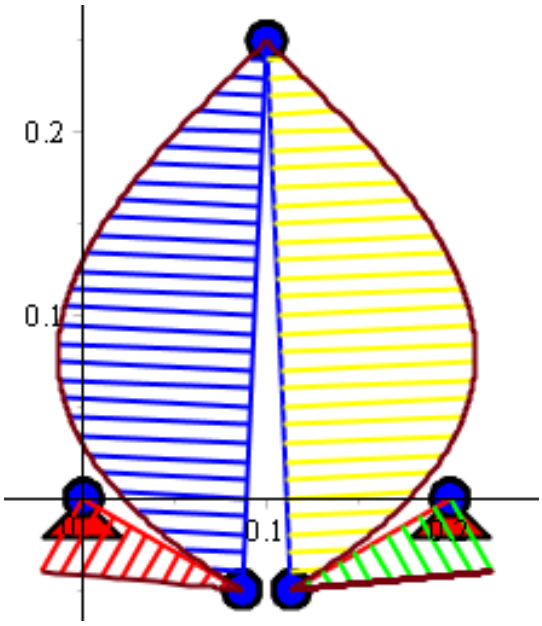


Рисунок 3.6 – Эпюры изгибающих моментов на звеньях плоскогоманипулятора, возникающих от внешних сосредоточенных и динамических распределенных нагрузок при угловой скорости

$$\omega_1 = 100 \cdot \frac{1}{сек}$$

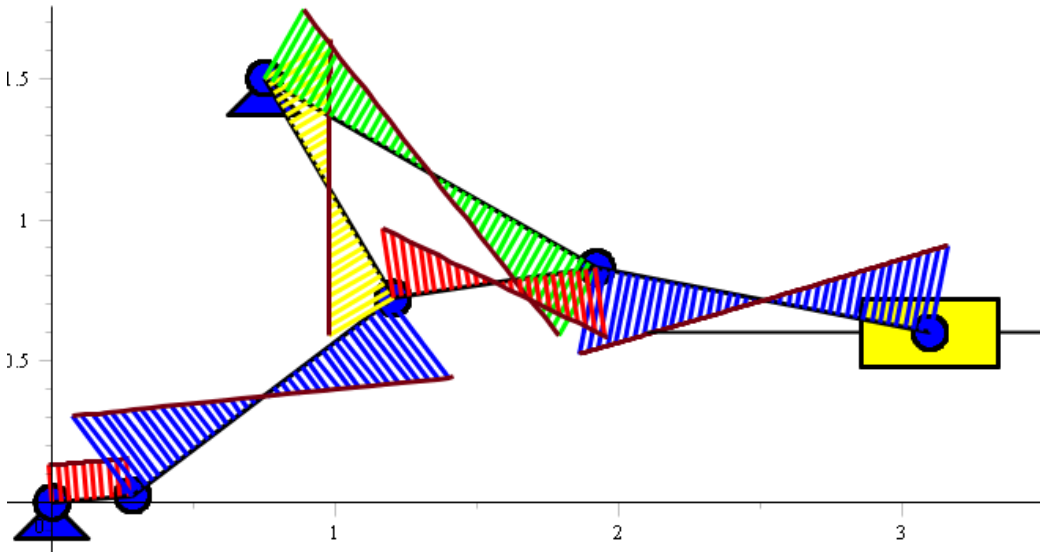


Рисунок 3.7 – Эпюры поперечных сил на звеньях шестизвенного механизма, возникающих от внешних сосредоточенных и динамических распределенных нагрузок при угловой скорости

$$\omega_1 = \frac{1}{сек}$$

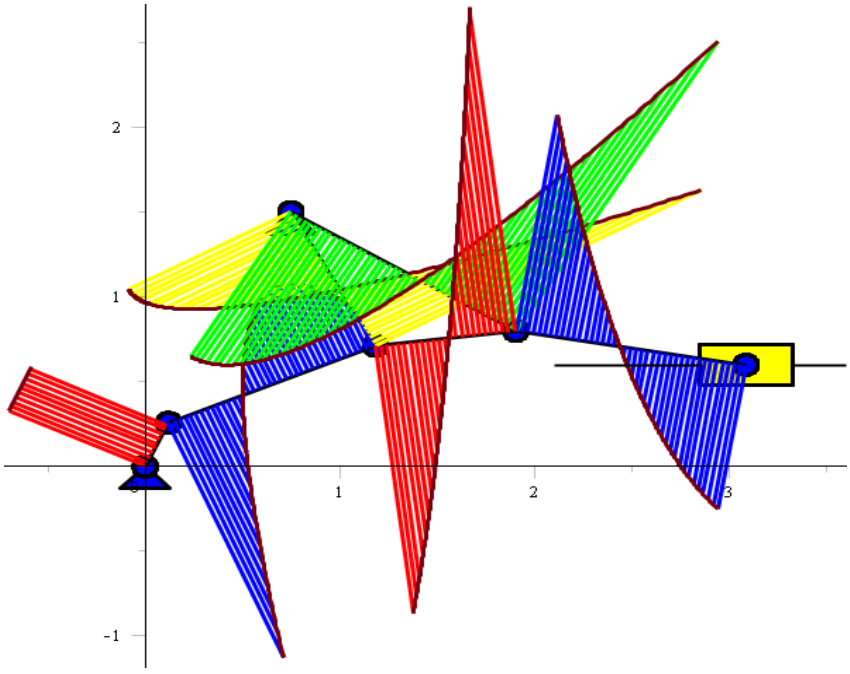


Рисунок 3.8 – Эпюры поперечных сил на звеньях шестизвенного механизма, возникающих от внешних сосредоточенных и динамических распределенных нагрузок при угловой скорости

$$\omega_1 = 100 \cdot \frac{1}{сек}$$

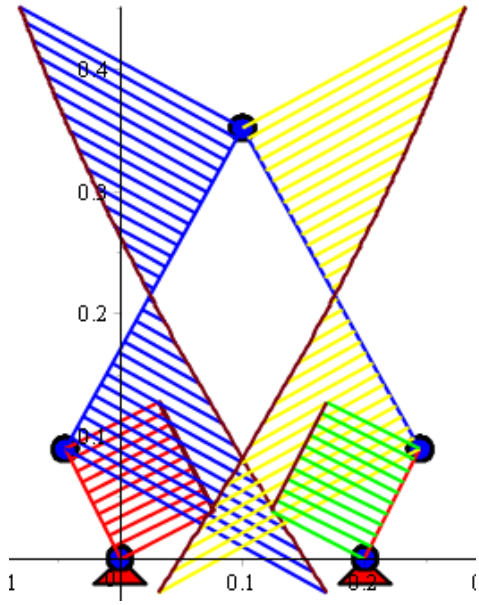


Рисунок 3.9 – Эпюры поперечных сил на звеньях плоскогоманипулятора, возникающих от внешних сосредоточенных и динамических распределенных нагрузок при угловой скорости

$$\omega_1 = 100 \cdot \frac{1}{сек}$$

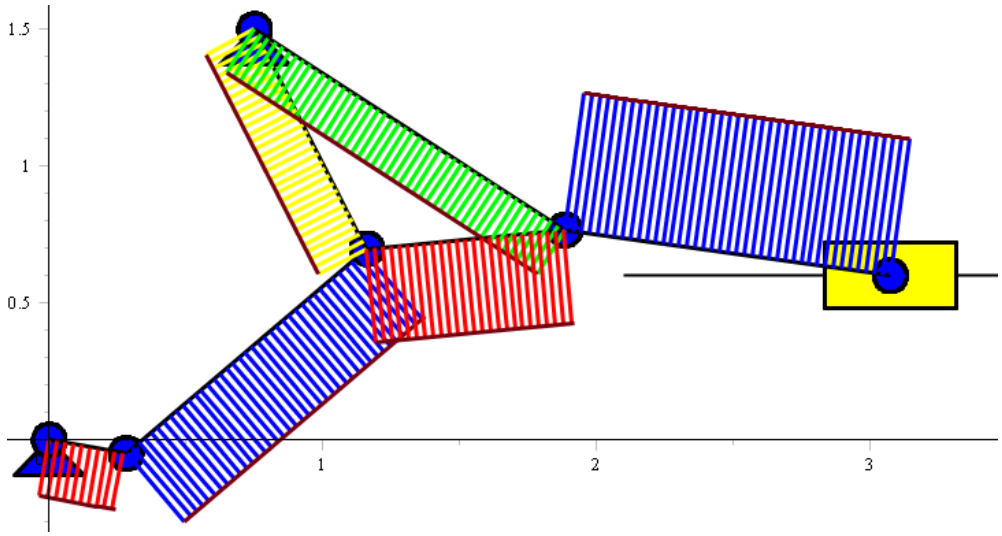


Рисунок 3.10 – Эпюры продольных сил на звеньях шестизвенного механизма, возникающих от внешних сосредоточенных и динамических распределенных нагрузок при угловой скорости

$$\omega_1 = \frac{1}{сек}$$

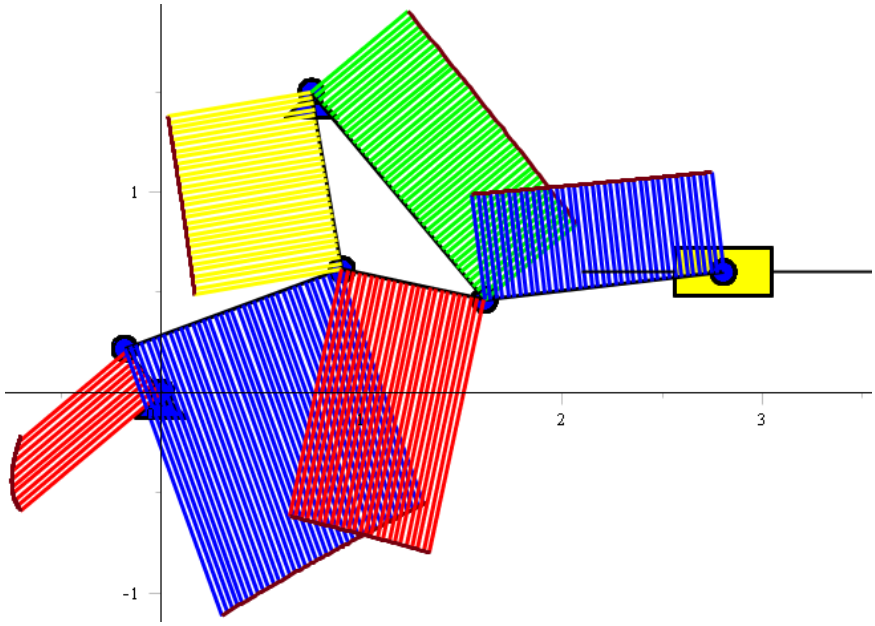


Рисунок 3.11 – Эпюры продольных сил на звеньях шестизвенного механизма, возникающих от внешних сосредоточенных и динамических распределенных нагрузок при угловой скорости

$$\omega_1 = 100 \cdot \frac{1}{сек}$$

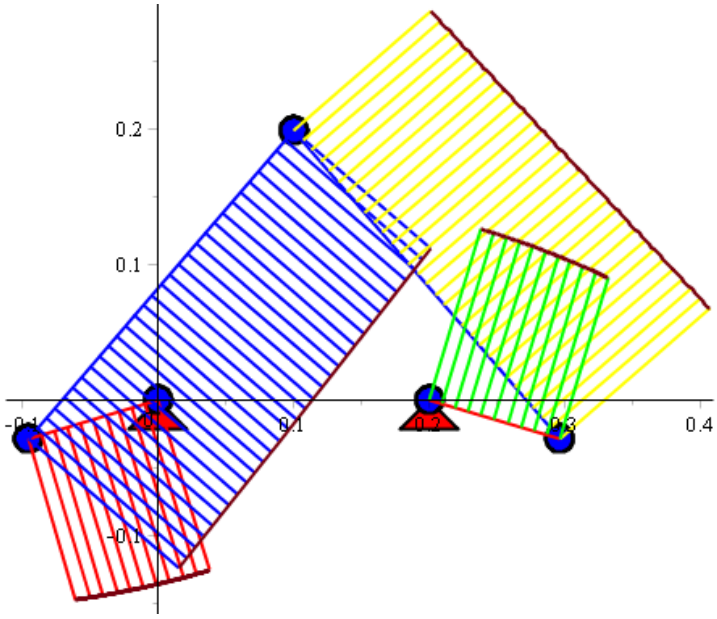


Рисунок 3.12 – Эпюры продольных сил на звеньях плоскогоманипулятора, возникающих от внешних сосредоточенных и динамических распределенных нагрузок при угловой скорости

$$\omega_1 = 100 \cdot \frac{1}{сек}$$

3.4 Краткие выводы по разделу 3

1. Для аналитического определения внутренних усилий в звеньях получены разрешающие динамические уравнения равновесия элементов и узлов, учитывающие внешние сосредоточенные и распределенные динамические нагрузки и выраженные через искомые параметры на примере шестизвенного механизма.
2. Решения приведены для шестизвенного механизма и манипулятора с двумя степенями свободы в виде движущегося механизма и манипулятора на звеньях которых построены эпюры изгибающих моментов, поперечных и продольных сил для наглядного изображения и правильного понимания этих параметров.

4 ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПЕРЕМЕЩЕНИЙ В ЗВЕНЬЯХ ПРИ ДЕЙСТВИИ НА НИХ РАСПРЕДЕЛЕННЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ И ВНЕШНИХ НАГРУЗОК

В высокоскоростных механизмах и манипуляторах звенья деформируются под воздействием распределенных динамических и внешних нагрузок. Эти деформации существенно влияют на точность исполнения требуемого закона движения рабочей точкой механизма и на позиционирование схвата манипулятора. В связи с этим, в данном разделе исследуются продольные, поперечные перемещения, углы поворота сечений звеньев находящихся под воздействием внешних сосредоточенных и распределенных динамических нагрузок. Разработанная методика позволяет аналитически определять деформации звеньев механизмов и манипуляторов. Для определения поперечных перемещений, углов поворота поперечных сечений звеньев использовано основное дифференциальное уравнение упругой линии балки, для определения продольных перемещений поперечных сечений звеньев – закон Гука и граничные условия расчетной схемы исследуемых стержневых систем для упругого расчета. Аналитический метод определения изгибающего момента, входящего в основное дифференциальное уравнение упругой линии балки и продольной силы, входящей в формулу, выражающую закон Гука, были приведены в разделах 2 и 3 данной диссертации.

4.1 Определение углов поворота, поперечных и продольных перемещений звеньев

Основное дифференциальное уравнение упругой линии балки (для k - того элемента) имеет вид [2, с. 227]:

$$\frac{d^2 y_k}{d\left(x_k^{'}\right)^2} = \frac{M_k\left(x_k^{'}\right)}{E_k I_k}. \qquad (4.1)$$

При действии на элемент поперечной распределенной нагрузки, изгибающий момент в сечениях элемента определяется по формуле (2.6), в котором значения $M_{k1}, M_{k2}, M_{k3}, M_{k4}$ определены по выражению (3.1). Подставляя значения $M_k\left(x_k^{'}\right)$ из (2.6) в уравнение (4.1) и интегрируя один раз, получим выражение для углов поворота сечений k-того элемента

$$\Phi_k\left(x_k^{'}\right) = \frac{dy_k^{'}}{dx_k^{'}} = \frac{1}{E_k I_k}\int\left\{\left[1 - \frac{11}{2l_k}x_k^{'} + \frac{9}{l_k^2}\left(x_k^{'}\right)^2 - \frac{9}{2l_k^3}\left(x_k^{'}\right)^3\right]M_{k1} + \left[\frac{9}{l_k}x_k^{'} - \frac{45}{2l_k^2}\left(x_k^{'}\right)^2 + \frac{27}{2l_k^3}\left(x_k^{'}\right)^3\right]M_{k2} +\right.$$

$$+\left[-\frac{9}{2l_k}x_k^{'}+\frac{18}{l_k^2}\left(x_k^{'}\right)^2-\frac{27}{2l_k^3}\left(x_k^{'}\right)\right]M_{k3}+\left[\frac{1}{l_k}x_k^{'}-\frac{9}{2l_k^2}\left(x_k^{'}\right)^2+\frac{9}{2l_k^3}\left(x_k^{'}\right)^3\right]M_{k4}\Bigg\}dx_k^{'}=$$

$$\frac{1}{E_kI_k}\Bigg\{\left[x_k^{'}-\frac{11}{4l_k}\left(x_k^{'}\right)^2+\frac{9}{3l_k^2}\left(x_k^{'}\right)^3-\frac{9}{8l_k^3}\left(x_k^{'}\right)^4\right]M_{k1}+\left[\frac{9}{2l_k}\left(x_k^{'}\right)^2-\frac{45}{6l_k^2}\left(x_k^{'}\right)^3+\frac{27}{8l_k^3}\left(x_k^{'}\right)^4\right]M_{k2}+$$

$$+\left[-\frac{9}{4l_k}\left(x_k^{'}\right)^2+\frac{18}{3l_k^2}\left(x_k^{'}\right)^3-\frac{27}{8l_k^3}\left(x_k^{'}\right)^4\right]M_{k3}+\left[\frac{1}{2l_k}\left(x_k^{'}\right)^2-\frac{9}{6l_k^2}\left(x_k^{'}\right)^3+\frac{9}{8l_k^3}\left(x_k^{'}\right)^4\right]M_{k4}\Bigg\}+C_{k1} \qquad (4.2)$$

содержащее одну произвольную постоянную C_{k1}. Интегрируя второй раз, находим выражение для прогибов балки $y_k^{'}\left(x_k^{'}\right)$:

$$w_k\left(x_k^{'}\right)=y_k^{'}\left(x_k^{'}\right)=\frac{1}{E_kI_k}\Bigg\{\left[\frac{1}{2}\left(x_k^{'}\right)^2-\frac{11}{12l_k}\left(x_k^{'}\right)^3+\frac{9}{12l_k^2}\left(x_k^{'}\right)^4-\frac{9}{40l_k^3}\left(x_k^{'}\right)^5\right]M_{k1}+$$

$$+\left[\frac{9}{6l_k}\left(x_k^{'}\right)^3-\frac{45}{24l_k^2}\left(x_k^{'}\right)^4+\frac{27}{40l_k^3}\left(x_k^{'}\right)^5\right]M_{k2}+\left[-\frac{9}{12l_k}\left(x_k^{'}\right)^3+\frac{18}{12l_k^2}\left(x_k^{'}\right)^4-\frac{27}{40l_k^3}\left(x_k^{'}\right)^5\right]M_{k3}+$$

$$+\left[\frac{1}{6l_k}\left(x_k^{'}\right)^3-\frac{9}{24l_k^2}\left(x_k^{'}\right)^4+\frac{9}{40l_k^3}\left(x_k^{'}\right)^5\right]M_{k4}\Bigg\}+C_{k1}x_k^{'}+C_{k2}. \qquad (4.3)$$

содержащие две произвольные постоянные C_{k1} и C_{k2}. Значения произвольных постоянных C_{k1} и C_{k2} определяются из рассмотрения двух краевых условий, т.е. из условий закрепления балки по концам.

Удлинение элемента $dx_k^{'}$ от продольной силы $N_k\left(x_k^{'}\right)$ по закону Гука будет равно:

$$dx_k^{'}=\frac{N_k\left(x_k^{'}\right)dx_k^{'}}{E_kA_k}. \qquad (4.4)$$

При действии на элемент продольной распределенной нагрузки продольная сила определяется выражением (2.8), в котором значения N_{k1}, N_{k2}, N_{k3} определены по выражению (3.1). Подставляя выражение (2.8) в (4.4) и интегрируя один раз,

получим выражение для продольных перемещений точек элемента в следующем виде:

$$u_k\left(x_k^{'}\right)=\frac{1}{E_kA_k}\int N_k\left(x_k^{'}\right)dx_k^{'}=\frac{1}{E_kA_k}\int\left\{\left[1-\frac{3}{l_k}x_k^{'}+\frac{2}{l_k^2}\left(x_k^{'}\right)^2\right]N_{k1}+\right.$$

$$\left.+\left[\frac{4}{l_k}x_k^{'}-\frac{4}{l_k^2}\left(x_k^{'}\right)^2\right]N_{k2}+\left[-\frac{1}{l_k}x_k^{'}+\frac{2}{l_k^2}\left(x_k^{'}\right)^2\right]N_{k3}\right\}dx_k^{'}=\frac{1}{E_kA_k}\left\{\left[x_k^{'}-\frac{3}{2l_k}\left(x_k^{'}\right)^2+\frac{2}{3l_k^2}\left(x_k^{'}\right)^3\right]N_{k1}+\right.$$

$$\left.+\left[\frac{4}{2l_k}\left(x_k^{'}\right)^2-\frac{4}{3l_k^2}\left(x_k^{'}\right)^3\right]N_{k2}+\left[-\frac{1}{2l_k}\left(x_k^{'}\right)^2+\frac{2}{3l_k^2}\left(x_k^{'}\right)^3\right]N_{k3}\right\}+C_{kn}. \qquad (4.5)$$

Произвольная постоянная C_{kn} определяется из условия закрепления балки.

Рассмотрим определение перемещений в звеньях шестизвенного механизма показанного на рисунке 4.1. Так как сечение A жестко закреплено, то перемещение сечения A звена 1 ($\Phi_1(0)=0$ - угол поворота сечения A, $uy10=w_1(0)=0$ - перемещение перпендикулярное к оси стержня того же сечения, $ux10=w_{1n}(0)=0$ - перемещение по оси стержня того же сечения), то можно определить постоянные C_{11},C_{12} и C_{1n}. Подставляя в формулы (4.2), (4.3) и (4.5) значение $x_k^{'}=0$, и учитывая вышесказанные три граничные условия, получим, что C_{11},C_{12} и C_{1n} равны нулю. Это позволяет определить поперечные и продольные перемещения в любом сечении звена 1. Введем в точке B три декартовые системы координат $BX_{B1}^{'}Y_{B1}^{'}$, $BX_{B2}^{'}Y_{B2}^{'}$ и BX_BY_B (рисунок 4.1), где $X_{B1}^{'}$ - направлено по оси первого звена, $X_{B2}^{'}$ - направлено по оси второго звена, X_B - направлено параллельно к оси X. Определим координаты точки B первого звена $B^{'}$ (новое положение точки B после деформации) $ux1l_1$, $uy1l_1$ относительно системы координат $BX_{B1}^{'}Y_{B1}^{'}$. Для этого подставим в формулы (4.5) и (4.3) значение $x_1^{'}=l_1=AB$, получим:

$$ux1l_1=\frac{l_1}{E_1A_1}\left(\frac{1}{6}N_{11}+\frac{2}{3}N_{12}+\frac{1}{6}N_{13}\right); \qquad (4.6)$$

$$uy1l_1=\frac{l_1^{\,2}}{E_1I_1}\left(\frac{13}{120}M_{11}+\frac{3}{10}M_{12}+\frac{3}{40}M_{13}\right). \qquad (4.7)$$

Обозначим координаты точки $B^{'}$ в системе координат $BX_{B2}^{'}Y_{B2}^{'}$ через $ux20,uy20$. Тогда положение точки $B^{'}$ относительно системы координат BX_BY_B с помощью координаты точки $B^{'}$ в системе координат $BX_{B1}^{'}Y_{B1}^{'}$, будет равно:

$$\begin{Bmatrix} x_{b'} \\ y_{b'} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta_1 & -\sin\theta_1 \\ \sin\theta_1 & \cos\theta_1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} ux1l_1 \\ uy1l_1 \end{Bmatrix}. \tag{4.8}$$

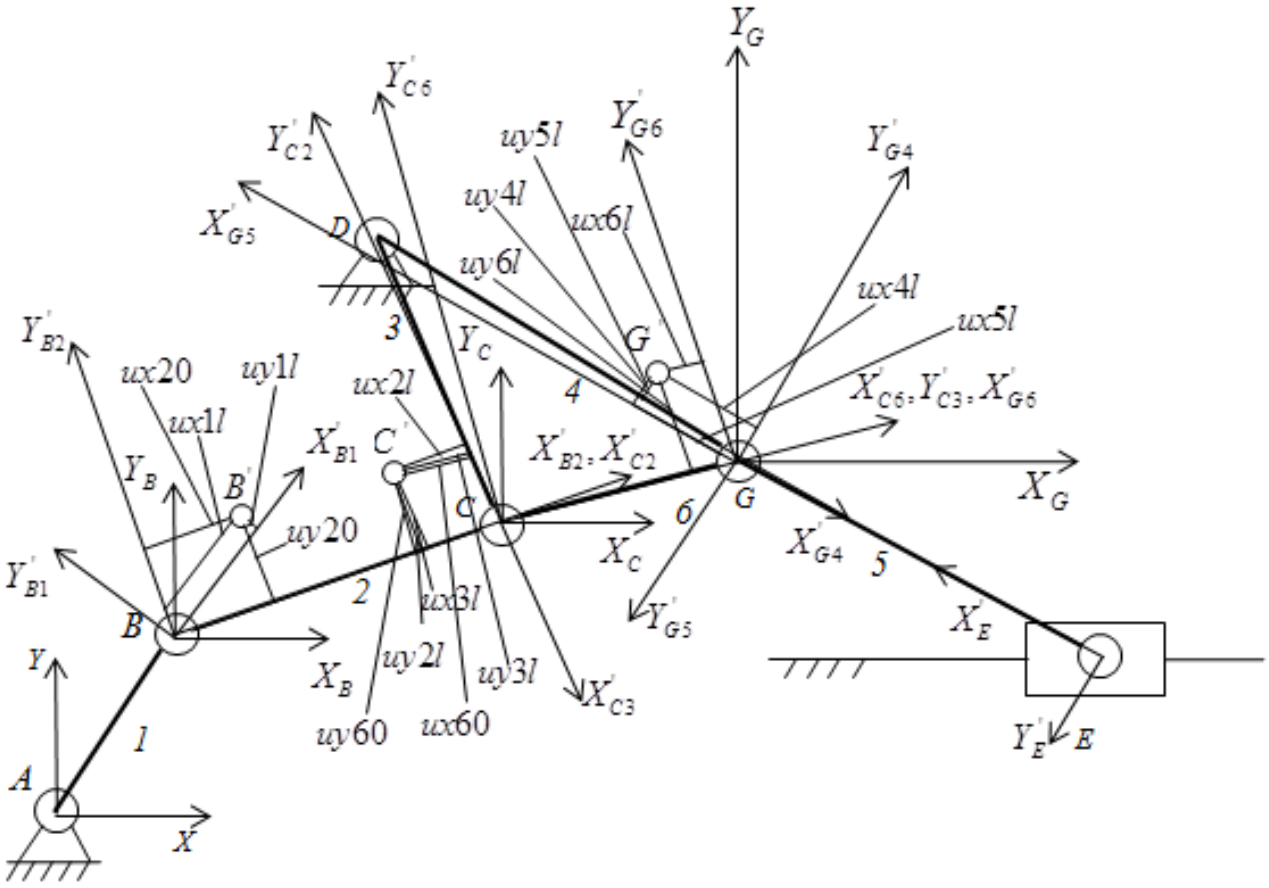


Рисунок 4.1 – Исследуемый шестизвенный механизм и системы координат, позволяющие определять деформации звеньев

Используя координаты точки B' в системе координат $BX'_{B2}Y'_{B2}$, будем иметь:

$$\begin{Bmatrix} x_{b'} \\ y_{b'} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta_2 & -\sin\theta_2 \\ \sin\theta_2 & \cos\theta_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} ux20 \\ uy20 \end{Bmatrix}. \tag{4.9}$$

Приравнивая равенства (4.8) и (4.9) получим два уравнения с двумя неизвестными $ux20, uy20$:

$$\begin{cases} ux20 \cdot \cos\theta_2 - uy20 \cdot \sin\theta_2 = ux1l_1 \cdot \cos\theta_1 - uy1l_1 \cdot \sin\theta_1, \\ ux20 \cdot \sin\theta_2 + uy20 \cdot \cos\theta_2 = ux1l_1 \cdot \sin\theta_1 + uy1l_1 \cdot \cos\theta_1. \end{cases} \tag{4.10}$$

Решая полученную систему уравнений (4.10) относительно $ux20$ и $uy20$, получим:

$$ux20 = (ux1l_1 \cdot \cos\theta_1 - uy1l_1 \cdot \sin\theta_1) \cdot \cos\theta_2 + (ux1l_1 \cdot \sin\theta_1 + uy1l_1 \cdot \cos\theta_1) \cdot \sin\theta_2, \quad (4.11)$$

$$uy20 = (ux1l_1 \cdot \sin\theta_1 + uy1l_1 \cdot \cos\theta_1) \cdot \cos\theta_2 - (ux1l_1 \cdot \cos\theta_1 - uy1l_1 \cdot \sin\theta_1) \cdot \sin\theta_2. \quad (4.12)$$

Подставляя в уравнение (4.5) значение $x = 0$, заметим, что $C_{2n} = ux20$. Тогда, подставляя в уравнение (4.5) $x = l_2 = BC$ и $C_{2n} = ux20$, получим $ux2l$, который равен:

$$ux2l = \frac{l_2}{E_2 A_2}\left(\frac{1}{6}N_{21} + \frac{2}{3}N_{22} + \frac{1}{6}N_{23}\right) + ux20. \quad (4.13)$$

Так как точка D неподвижна, то $C_{3n} = ux30 = 0$. Подставляя $x = l_3 = CD$ и значение $C_{3n} = 0$ в уравнение (4.5), получим

$$ux3l = \frac{l_3}{E_3 A_3}\left(\frac{1}{6}N_{31} + \frac{2}{3}N_{32} + \frac{1}{6}N_{33}\right). \quad (4.14)$$

Теперь, введем в точке C следующие декартовые системы координат $CX'_{C2}Y'_{C2}$, $CX'_{C3}Y'_{C3}$, CX_CY_C, и $CX'_{C6}Y'_{C6}$, где ось X'_{C2}- направлена по оси второго звена, ось X'_{C3}- направлена по оси третьего звена, X_C- направлена параллельно оси X, X'_{C6}- направлена по оси звена 6.

Положение точки C' относительно системы координат CX_CY_C, с помощью координаты точки C' в системе координат $CX'_{C2}Y'_{C2}$ будет равно:

$$\begin{Bmatrix} x_{c'} \\ y_{c'} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta_2 & -\sin\theta_2 \\ \sin\theta_2 & \cos\theta_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} ux2l \\ uy2l \end{Bmatrix}. \quad (4.15)$$

а с помощью координаты точки C' в системе координат $CX'_3Y'_3$ будет равно:

$$\begin{Bmatrix} x_{c'} \\ y_{c'} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta_3 & -\sin\theta_3 \\ \sin\theta_3 & \cos\theta_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} ux3l \\ uy3l \end{Bmatrix}. \quad (4.16)$$

Приравнивая выражения (4.15) и (4.16), получим следующую систему уравнении:

$$\begin{cases} ux2l \cdot \cos\theta_2 - uy2l \cdot \sin\theta_2 = ux3l \cdot \cos\theta_3 - uy3l \cdot \sin\theta_3, \\ ux2l \cdot \sin\theta_2 + uy2l \cdot \cos\theta_2 = ux3l \cdot \sin\theta_3 + uy3l \cdot \cos\theta_3. \end{cases} \quad (4.17)$$

Решая систему уравнений (4.17) относительно $uy2l, uy3l$ получим:

$$uy2l = -\frac{\cos\theta_2 \cdot \cos\theta_3 \cdot ux2l + ux2l \cdot \sin\theta_2 \cdot \sin\theta_3 - \cos\theta_3^2 \cdot ux3l - ux3l \cdot \sin\theta_3^2}{\cos\theta_2 \cdot \sin\theta_3 - \sin\theta_2 \cdot \cos\theta_3}, \quad (4.18)$$

$$uy3l = -\frac{\cos\theta_2^2 \cdot ux2l - \cos\theta_2 \cdot \cos\theta_3 \cdot ux3l + \sin\theta_2^2 \cdot ux2l - \sin\theta_2 \cdot \sin\theta_3 \cdot ux3l}{\cos\theta_2 \cdot \sin\theta_3 - \sin\theta_2 \cdot \cos\theta_3}. \quad (4.19)$$

Подставляя в уравнение (4.3) $x = 0$ и $x = l_2 = BC$, получим следующую систему уравнений:

$$\begin{cases} uy20 = C_{22}, \\ uy2l = \dfrac{\frac{3}{10} \cdot l_2^{\,2} \cdot M_{22} + \frac{3}{40} \cdot l_2^{\,2} \cdot M_{23}}{E_2 I_2} + C_{21} \cdot l_2 + C_{22}. \end{cases} \quad (4.20)$$

Решая систему уравнений (4.20) относительно C_{21} ($C_{21} = Q_{20}$ - угол поворота сечения B второго звена) и C_{22} (перемещение сечения B второго звена по оси Y'_{B2}) получим следующие соотношения:

$$C_{21} = Q_{20} = -\frac{1}{40} \cdot \frac{12 \cdot l_2^{\,2} \cdot M_{22} + 3 \cdot l_2^2 \cdot M_{23} + 40 \cdot E_2 I_2 \cdot uy20 - 40 \cdot E_2 I_2 \cdot uy2l}{l_2 \cdot E_2 I_2}, \quad (4.21)$$

$$C_{22} = uy20. \quad (4.22)$$

Теперь можем определить перемещение любой точки звена 2 по оси Y'_{B2}, подставляя значения C_{21} и C_{22} в уравнение (4.3).

Так как точка D неподвижна, то $C_{32} = uy30 = 0$. Подставляя в уравнение (4.3) $x = 0$ и $x = l_3 = CD$, получим следующую систему уравнений:

$$\begin{cases} uy30 = C_{32}, \\ uy3l = \dfrac{\dfrac{3}{10}\cdot l_3^{\,2}\cdot M_{32} + \dfrac{3}{40}\cdot l_3^{\,2}\cdot M_{33}}{E_3 I_3} + C_{31}\cdot l_3. \end{cases} \tag{4.23}$$

Решая систему уравнений (4.23) относительно C_{31} ($C_{31} = Q_{30}$ - угол поворота сечения D третьего звена) и C_{32} (перемещение сечения D третьего звена по оси Y'_{C3}) получим следующие соотношения:

$$C_{31} = Q_{30} = -\frac{1}{40}\cdot\frac{12\cdot l_3^{\,2}\cdot M_{32} + 3\cdot l_3^{\,2}\cdot M_{33} - 40\cdot E_3 I_3\cdot uy3l}{l_3\cdot E_3 I_3}, \tag{4.24}$$

$$C_{32} = uy30. \tag{4.25}$$

Теперь можем определить перемещение любой точки звена 3 по оси Y'_{C3}, подставляя значения C_{31} и C_{32} в уравнение (4.3).

С помощью координаты точки C' в системе координат $CX'_{C6}Y'_{C6}$ будет равно:

$$\begin{Bmatrix} x_{c'} \\ y_{c'} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta_6 & -\sin\theta_6 \\ \sin\theta_6 & \cos\theta_6 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} ux60 \\ uy60 \end{Bmatrix}. \tag{4.26}$$

Приравнивая выражения (4.15) и (4.26), получим следующую систему уравнений:

$$\begin{cases} ux2l\cdot\cos\theta_2 - uy2l\cdot\sin\theta_2 = ux60\cdot\cos\theta_6 - uy60\cdot\sin\theta_6, \\ ux2l\cdot\sin\theta_2 + uy2l\cdot\cos\theta_2 = ux60\cdot\sin\theta_6 + uy60\cdot\cos\theta_6. \end{cases} \tag{4.27}$$

Решая систему уравнений (4.27) относительно $ux60, uy60$ получим:

$$ux60 = \frac{\cos\theta_2\cdot\cos\theta_6\cdot ux2l + uy2l\cdot\cos\theta_2\cdot\sin\theta_6 - \sin\theta_2\cdot\cos\theta_6\cdot uy2l + ux2l\cdot\sin\theta_2\cdot\sin\theta_6}{\cos\theta_6^2 + \sin\theta_6^2}, \tag{4.28}$$

$$uy60 = -\frac{\sin\theta_6\cdot\cos\theta_2\cdot ux2l - \sin\theta_6\cdot\sin\theta_2\cdot uy2l - \cos\theta_6\cdot\cos\theta_2\cdot uy2l - \cos\theta_6\cdot\sin\theta_2\cdot ux2l}{\cos\theta_6^2 + \sin\theta_6^2}. \tag{4.29}$$

Подставляя в уравнение (4.5) значение $x = 0$, заметим, что $C_{6n} = ux60$. Тогда, подставляя в уравнение (4.5) $x = l_6 = CG$ и $C_{6n} = ux60$, получим $ux6l$, который равен:

$$ux6l = \frac{l_6}{E_6 A_6}\left(\frac{1}{6}N_{61} + \frac{2}{3}N_{62} + \frac{1}{6}N_{63}\right) + ux60. \tag{4.30}$$

Так как точка D неподвижна, то $C_{4n} = ux40 = 0$. Подставляя $x = l_4 = DG$ и значение $C_{4n} = 0$ в уравнение (4.5), получим

$$ux4l = \frac{l_4}{E_4 A_4}\left(\frac{1}{6}N_{41} + \frac{2}{3}N_{42} + \frac{1}{6}N_{43}\right). \tag{4.31}$$

Теперь, введем в точке G следующие декартовые системы координат $GX'_{G4}Y'_{G4}$, $GX'_{G6}Y'_{G6}$, GX_GY_G, и $GX'_{G5}Y'_{G5}$, где ось X'_{G4} - направлена по оси четвертого звена, ось X'_{G6} - направлена по оси шестого звена, X_G - направлена параллельно оси X, X'_{G5} - направлена по оси звена 5.

Положение точки G' относительно системы координат GX_GY_G, с помощью координаты точки G' в системе координат $GX'_{G6}Y'_{G6}$ будет равно:

$$\begin{Bmatrix} x_{g'} \\ y_{g'} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta_6 & -\sin\theta_6 \\ \sin\theta_6 & \cos\theta_6 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} ux6l \\ uy6l \end{Bmatrix}. \tag{4.32}$$

а с помощью координаты точки G' в системе координат $GX'_4Y'_4$ будет равно:

$$\begin{Bmatrix} x_{g'} \\ y_{g'} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\theta_3 + \alpha) & -\sin(\theta_3 + \alpha) \\ \sin(\theta_3 + \alpha) & \cos(\theta_3 + \alpha) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} ux4l \\ uy4l \end{Bmatrix}. \tag{4.33}$$

Приравнивая выражения (4.32) и (4.33), получим следующую систему уравнений:

$$\begin{cases} ux6l \cdot \cos\theta_6 - uy6l \cdot \sin\theta_6 = ux4l \cdot \cos(\theta_3 + \alpha) - uy4l \cdot \sin(\theta_3 + \alpha), \\ ux6l \cdot \sin\theta_6 + uy6l \cdot \cos\theta_6 = ux4l \cdot \sin(\theta_3 + \alpha) + uy4l \cdot \cos(\theta_3 + \alpha). \end{cases} \tag{4.34}$$

Решая систему уравнений (4.34) относительно $uy6l, uy4l$ получим:

$$uy4l = -\frac{\cos(\theta_3 + \alpha) \cdot \cos(\theta_6) \cdot ux4l + ux4l \cdot \sin(\theta_3 + \alpha) \cdot \sin\theta_6 - \cos\theta_6^2 \cdot ux6l - ux6l \cdot \sin\theta_6^2}{\cos(\theta_3 + \alpha) \cdot \sin\theta_6 - \sin(\theta_3 + \alpha) \cdot \cos\theta_6}, \tag{4.35}$$

$$uy6l = -\frac{\cos(\theta_3+\alpha)^2 \cdot ux4l - \cos(\theta_3+\alpha)\cdot\cos\theta_6 \cdot ux6l + \sin(\theta_3+\alpha)^2 \cdot ux4l - \sin(\theta_3+\alpha)\cdot\sin\theta_6 \cdot ux6l}{\cos(\theta_3+\alpha)\cdot\sin\theta_6 - \sin(\theta_3+\alpha)\cdot\cos\theta_6}. \quad (4.36)$$

Подставляя в уравнение (4.3) $x = 0$ и $x = l_6 = CG$, получим следующую систему уравнений:

$$\begin{cases} uy60 = C_{62}, \\ uy6l = \dfrac{\frac{3}{10}\cdot l_6{}^2 \cdot M_{62} + \frac{3}{40}\cdot l_6{}^2 \cdot M_{63}}{E_6 I_6} + C_{61}\cdot l_6 + C_{62}. \end{cases} \quad (4.37)$$

Решая систему уравнений (4.37) относительно C_{61} ($C_{61} = Q_{60}$ - угол поворота сечения G шестого звена) и C_{62} (перемещение сечения G шестого звена по оси Y'_{G6} получим следующие соотношения:

$$C_{61} = Q_{60} = -\frac{1}{40}\cdot\frac{12\cdot l_6{}^2 \cdot M_{62} + 3\cdot l_6^2 \cdot M_{63} + 40\cdot E_6 I_6 \cdot uy60 - 40\cdot E_6 I_6 \cdot uy6l}{l_6 \cdot E_6 I_6}, \quad (4.38)$$

$$C_{62} = uy60. \quad (4.39)$$

Теперь можем определить перемещение любой точки звена 6 по оси Y'_{G6}, подставляя значения C_{61} и C_{62} в уравнение (4.3).

Так как точка D неподвижна, то $C_{42} = uy40 = 0$. Подставляя в уравнение (4.3) $x = 0$ и $x = l_4 = DG$, получим следующую систему уравнений:

$$\begin{cases} uy40 = C_{42}, \\ uy4l = \dfrac{\frac{3}{10}\cdot l_4{}^2 \cdot M_{42} + \frac{3}{40}\cdot l_4{}^2 \cdot M_{43}}{E_4 I_4} + C_{41}\cdot l_4. \end{cases} \quad (4.40)$$

Решая систему уравнений (4.40) относительно C_{41} ($C_{41} = Q_{40}$ - угол поворота сечения D четвертого звена) и C_{42} (перемещение сечения D четвертого звена по оси Y'_{G4}) получим следующие соотношения:

$$C_{41} = Q_{40} = -\frac{1}{40} \cdot \frac{12 \cdot l_4^{\,2} \cdot M_{42} + 3 \cdot l_4^{\,2} \cdot M_{43} - 40 \cdot E_4 I_4 \cdot uy4l}{l_4 \cdot E_4 I_4}, \tag{4.41}$$

$$C_{42} = uy40. \tag{4.42}$$

Теперь можем определить перемещение любой точки звена 4 по оси Y'_{G4}, подставляя значения C_{41} и C_{42} в уравнение (4.3).

Обозначим координаты точки G' в системе координат $GX'_{G5}Y'_{G5}$ через $ux5l, uy5l$. Тогда положение точки G' относительно системы координат GX_GY_G с помощью координаты точки G' в системе координат $GX'_{G4}Y'_{G4}$, будет равно:

$$\begin{Bmatrix} x_{g'} \\ y_{g'} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta_5 & -\sin\theta_5 \\ \sin\theta_5 & \cos\theta_5 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} ux5l \\ uy5l \end{Bmatrix}. \tag{4.43}$$

а, используя координаты точки G' в системе координат $GX'_{G4}Y'_{G4}$, будем иметь:

$$\begin{Bmatrix} x_{g'} \\ y_{g'} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\theta_3 + \alpha) & -\sin(\theta_3 + \alpha) \\ \sin(\theta_3 + \alpha) & \cos(\theta_3 + \alpha) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} ux4l \\ uy4l \end{Bmatrix}. \tag{4.44}$$

Приравнивая выражения (4.43) и (4.44), получим следующую систему уравнении:

$$\begin{cases} ux5l \cdot \cos\theta_5 - uy5l \cdot \sin\theta_5 = ux4l \cdot \cos(\theta_3 + \alpha) - uy4l \cdot \sin(\theta_3 + \alpha), \\ ux5l \cdot \sin\theta_5 + uy5l \cdot \cos\theta_5 = ux4l \cdot \sin(\theta_3 + \alpha) + uy4l \cdot \cos(\theta_3 + \alpha). \end{cases} \tag{4.45}$$

Решая систему уравнений (4.45) относительно $ux5l, uy5l$ получим:

$$ux5l = \frac{\cos\theta_5 \cdot \cos(\theta_3 + \alpha) \cdot ux4l - \cos\theta_5 \cdot \sin(\theta_3 + \alpha) \cdot uy4l + \sin\theta_5 \cdot \cos(\theta_3 + \alpha) \cdot uy4l + \sin\theta_5 \cdot \sin(\theta_3 + \alpha) \cdot ux4l}{\cos\theta_5^{\,2} + \sin\theta_5^{\,2}}, \tag{4.46}$$

$$uy5l = \frac{uy4l \cdot \cos(\theta_3 + \alpha) \cdot \cos\theta_5 + ux4l \cdot \sin(\theta_3 + \alpha) \cdot \cos\theta_5 - \sin\theta_5 \cdot \cos(\theta_3 + \alpha) \cdot ux4l + \sin\theta_5 \cdot \sin(\theta_3 + \alpha) \cdot uy4l}{\cos\theta_5^{\,2} + \sin\theta_5^{\,2}}. \tag{4.47}$$

Подставляя в уравнение (4.5) $x = l_5$ получим следующее уравнение:

$$ux5l = \frac{\frac{1}{6} \cdot l_5 \cdot N_{51} + \frac{2}{3} \cdot l_5 \cdot N_{52} + \frac{1}{6} \cdot l_5 \cdot N_{53}}{E_5 \cdot I_5} + ux50, \tag{4.48}$$

откуда определяем

$$ux50 = ux5l - \frac{\frac{1}{6} \cdot l_5 \cdot N_{51} + \frac{2}{3} \cdot l_5 \cdot N_{52} + \frac{1}{6} \cdot l_5 \cdot N_{53}}{E_5 \cdot I_5}. \tag{4.49}$$

Не трудно заметить, что $uy50 = -\frac{ux50 \cdot \sin\theta_5}{\cos\theta_5}$.

Подставляя в уравнение (4.3) $x = 0$ и $x = l_5$ получим следующую систему уравнений:

$$\begin{cases} uy50 = C52, \\ uy5l = \dfrac{\frac{3}{10} \cdot l_5^2 \cdot M_{52} + \frac{3}{40} \cdot l_5^2 \cdot M_{53}}{E_5 I_5} + C_{51} \cdot l_5 + uy50. \end{cases} \tag{4.50}$$

Решая систему уравнений (4.50) относительно C_{51} ($C_{51} = Q_{50}$ - угол поворота сечения E пятого звена) и C_{52} (перемещение сечения E пятого звена по оси Y'_{G5}) получим следующие соотношения:

$$C52 = uy50, \tag{4.51}$$

$$C51 = -\frac{1}{40} \cdot \frac{40 \cdot E_5 \cdot I_5 \cdot uy50 - 40 \cdot E_5 \cdot I_5 \cdot uy5l + 12 \cdot l_5^2 \cdot M_{52} + 3 \cdot l_5^2 \cdot M53}{E_5 \cdot I_5 \cdot l_5}. \tag{4.52}$$

4.2 Анимация движения плоского механизма с построением на звеньях эпюр углов поворота, поперечных (прогибы) и продольных перемещений сечений звеньев

По разработанному алгоритму созданы компьютерные программы, позволяющие производить анимацию движения механизма с построением на звеньях эпюр углов поворота, поперечных (прогибы) и продольных перемещений сечений звеньев (рисунки 4.2-4.7) в его полном рабочем цикле. Достоверность результатов наглядно видна при анимации движения рассматриваемого механизма с построением на звеньях эпюр деформаций по следующим признакам: между изгибающим моментом, углом поворота сечений и прогибом, а также продольной силой и продольными перемещениями сечений звеньев имеются дифференциальные зависимости, которые можно использовать для проверки полученных результатов; (б) граничные условия в стойках, шарнирных узлах и т.д.

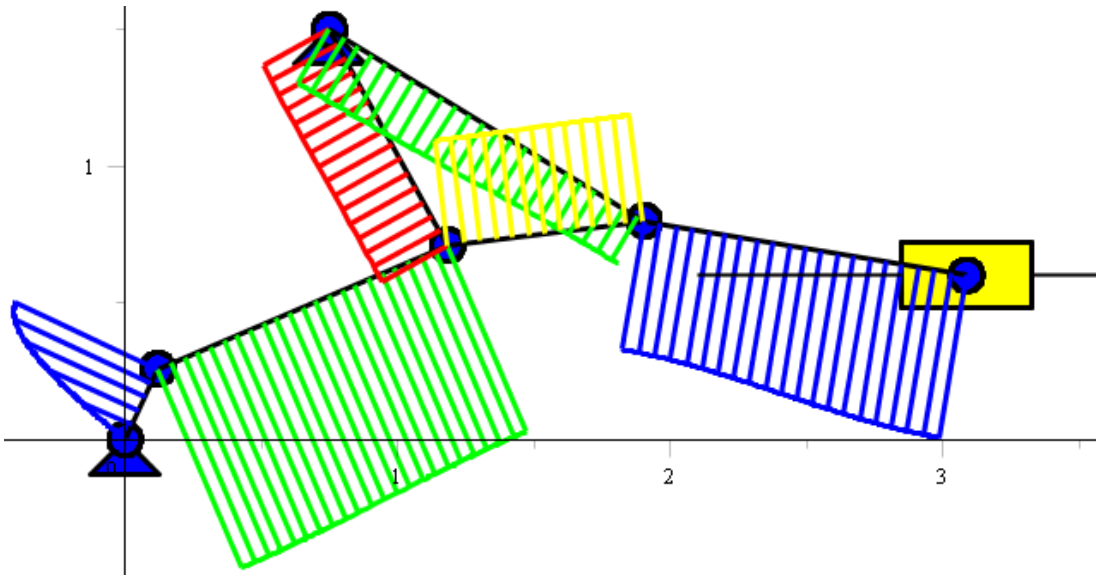


Рисунок 4.2 – Эпюры углов поворота сечений звеньев шестизвенного механизма под действием динамических распределенных и внешних нагрузок при угловой скорости

$$\omega_1 = \frac{1}{сек}$$

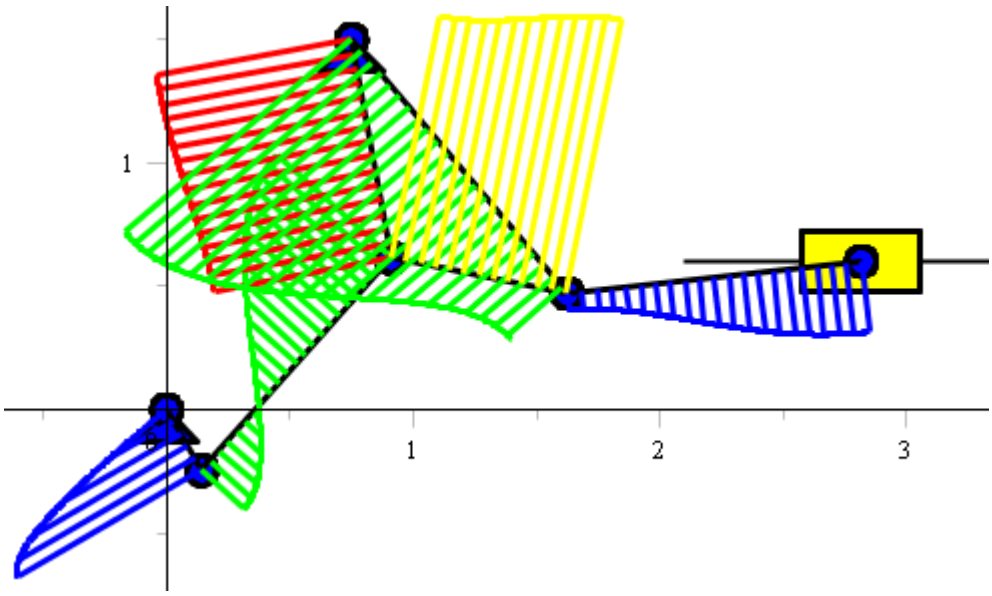


Рисунок 4.3 – Эпюры углов поворота сечений звеньев шестизвенного механизма под действием динамических распределенных и внешних нагрузок при угловой скорости

$$\omega_1 = 100 \cdot \frac{1}{сек}$$

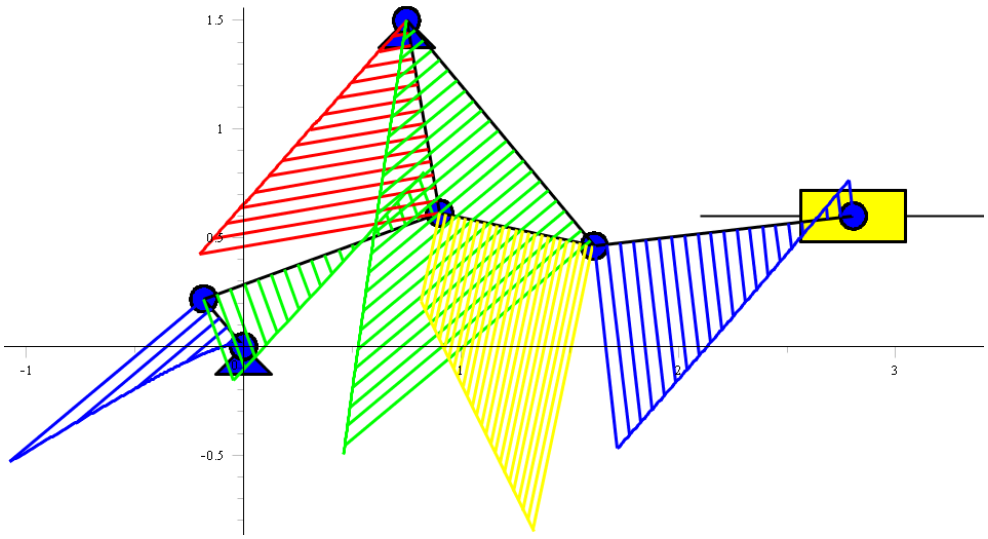


Рисунок 4.4 – Эпюры поперечных перемещений (прогибов) сечений звеньев шестизвенного механизма под действием динамических распределенных и внешних нагрузок при угловой скорости

$$\omega_1 = \frac{1}{сек}$$

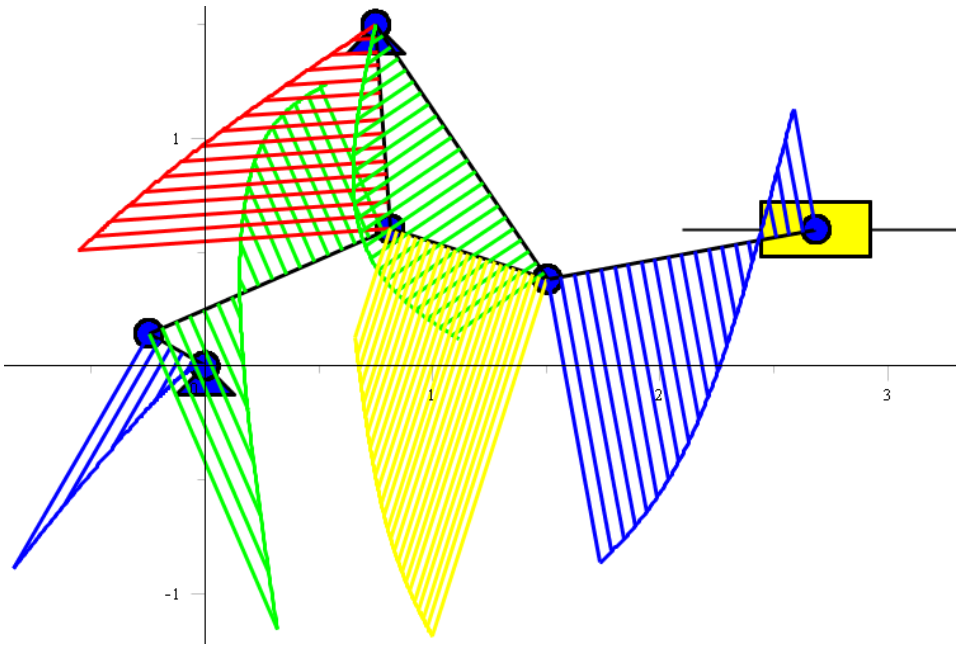


Рисунок 4.5 – Эпюры поперечных перемещений (прогибов) сечений звеньев шестизвенного механизма под действием динамических распределенных и внешних нагрузок при угловой скорости

$$\omega_1 = 100 \cdot \frac{1}{сек}$$

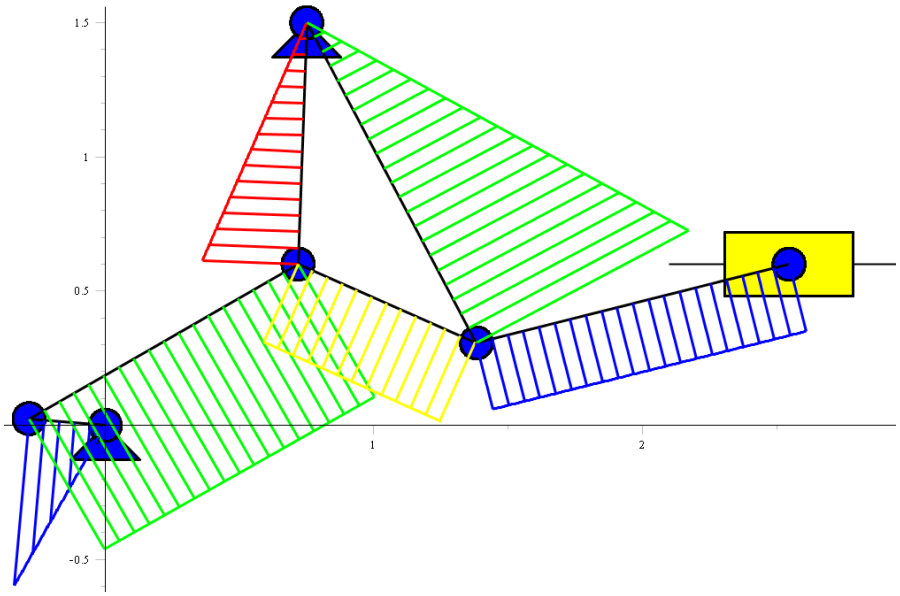


Рисунок 4.6 – Эпюры продольных перемещений сечений звеньев шестизвенного механизма под действием динамических распределенных и внешних нагрузок при угловой скорости

$$\omega_1 = \frac{1}{сек}$$

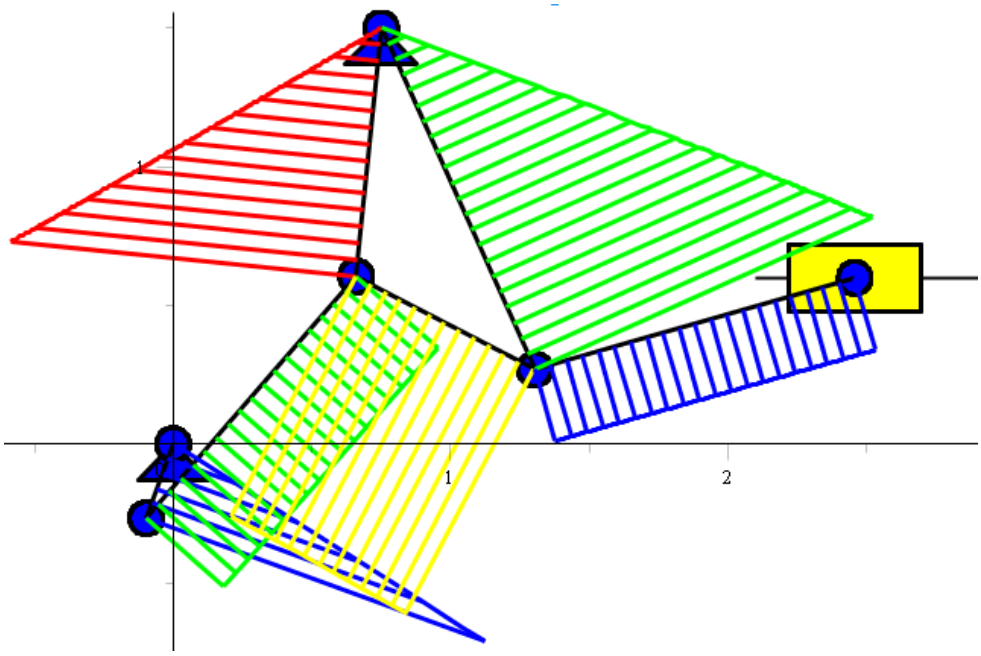


Рисунок 4.7 – Эпюры продольных перемещений сечений звеньев шестизвенного механизма под действием динамических распределенных и внешних нагрузок при угловой скорости

$$\omega_1 = 100 \cdot \frac{1}{сек}$$

4.3 Краткие выводы по разделу 4

1. Для определения поперечных перемещений и углов поворота сечений звеньев использовано основное дифференциальное уравнение упругой линии балки, а для определения продольных перемещений точек звеньев использован закон Гука.
2. Разработаны алгоритмы определения постоянных интегрирования в уравнениях прогибов и продольных перемещений в звеньях. Звенья рассматриваются как элементы с закреплениями, приведенные в расчетной схеме механизма. Определение постоянных интегрирования в этих уравнениях позволяет определить углы поворота, поперечные (прогибы) и продольные перемещения сечений звеньев.
3. По разработанному алгоритму созданы компьютерные программы, позволяющие производить анимацию движения механизма с построением на звеньях эпюр углов поворота, поперечных (прогибы) и продольных перемещений сечений звеньев исследуемого шестизвенного механизма под действием распределенных динамических и внешних нагрузок.

5 ПОДБОР ФОРМЫ СЕЧЕНИЙ ЗВЕНЬЕВ И ОПРЕДЕЛЕНИЕ ИХ ЛИНЕЙНЫХ РАЗМЕРОВ

Представленные результаты в разделах 1, 2, 3 позволяют при действии статических и распределенных динамических нагрузок на звенья проектируемых стержневых механизмов и манипуляторов, и при различных скоростях, ускорениях обобщенных координат подобрать рациональные формы сечений и определять поперечные размеры сечений звеньев с наименьшей площадью, обеспечивающие прочность звеньев в полном цикле рабочего процесса. На примере, где производится анимация движения шестизвенного механизма и плоского пятизвенного манипулятора с двумя степенями свободы, с построением на звеньях эпюр внутренних усилий наглядно видно изменение значений и направлений внутренних усилий в каждом сечении по длине каждого звена. Даже по этим эпюрам внутренних усилий можно предварительно увидеть в каком положении механизма и в каком звене имеются возможные опасные сечения.

5.1 Оптимизация общей массы механизмов

Рассмотрим механизм, состоящий из n-подвижных звеньев. Пусть сечение любого $i-$го звена определяется обобщенной переменной b_i, в качестве которой, в частности, может выступать в случае круглого сечения – диаметр, если же сечение прямоугольное, то этой переменной может быть один из его размеров.

Задача заключается в определении поперечных размеров звеньев, характеризуемых переменными b_i $(i = 1,2,...,n)$ так, чтобы общий вес механизма

$$G = \sum_{i=1}^{n} G_i,$$

был минимален, а напряжения в звеньях, обусловленные внешней нагрузкой и силами инерции, были ограничены:

$$\sigma_i \le [\sigma_i], \quad \tau_i \le [\tau_i], \quad i = 1,2,...,n,$$

где $G_i = \gamma_i \cdot A_i \cdot l_i$ - вес i-го звена, γ_i - удельный вес i-го звена, A_i - площадь поперечного сечения звена, l_i - длина звена, σ_i, $[\sigma_i]$, τ_i, $[\tau_i]$ - максимальные и допустимые нормальные и касательные напряжения в звене i.

Для решения поставленных задач приводится следующим алгоритм:

1. На первом этапе определить форму и линейные размеры сечений звеньев только от действия внешних сил, используя уравнения равновесия статики.

2. Так как напряженно-деформированное состояние звеньев механизма и манипулятора меняется в зависимости от их кинематических и физических характеристик в течении полного рабочего цикла, поэтому, произвести кинематический анализ и создать визуализацию движения механизма или манипулятора.

3. Определить поперечные и продольные распределенные динамические нагрузки, которые зависят от кинематических, физических и геометрических характеристик звеньев [65, с. 43], и построить закономерности распределения динамических нагрузок каждого движущегося звена для наглядного изображения и правильного понимания изменения величины и направления этих распределенных динамических нагрузок для каждого сечения по длине звеньев.

4. Получить разрешающие динамические уравнения равновесия элементов и узлов дискретной модели механизма или манипулятора [65, с. 124] для аналитического определения внутренних усилий в звеньях механизмов или манипуляторов. Решить полученную систему уравнений, построить эпюры изгибающих моментов, поперечных и продольных сил для каждого звена движущегося механизма по длине звеньев, на которых будет хорошо видно напряженное состояние каждого сечения каждого звена в течение полного рабочего процесса механизма или манипулятора.

5. По найденным выражениям изгибающих моментов определить прогибы (поперечные перемещения) и углы поворота сечений звеньев, по найденным выражениям продольных сил определить продольные перемещения. Построить эпюры этих найденных параметров на звеньях движущегося механизма или манипулятора и проанализировать деформированное состояние каждого сечения каждого звена во время движения механизма.

6. В каждом положении механизма или манипулятора для каждого звена определить максимальные и минимальные значения внутренних усилий. Среди найденных для каждого из всех положений механизма максимальных и минимальных значений внутренних усилий найти максимальное и минимальное значения внутренних усилий. Найденные значения максимального и минимального внутреннего усилия позволяют с использованием соответствующих теорий прочности подобрать формы сечений и их линейные размеры.

7. Определить по найденным размерам сечений веса звеньев.

8. Если для двух последовательных приближений выполняются условия:

$$\left|G_k^{i+1} - G_k^i\right| \le \varepsilon, \quad k = 1,2,\ldots,n,$$

(где $\varepsilon -$ задаваемая малая величина, $n -$ количество подвижных звеньев, $G_k^i -$ вес k того звена, полученный в i той итерации) алгоритм заканчивает работу, иначе перейти к пункту 2.

5.2 Геометрические характеристики прямоугольного коробчатого сечения, выраженные через искомый параметр b_1

Выразим необходимые для дальнейшего расчета геометрические характеристики прямоугольного коробчатого сечения (рисунок 5.1, а) через искомый параметр b_1.

Пусть

$$h_1 = k_1 b_1, \quad h_2 = h_1 - 2k_2 b_1, \quad b_2 = b_1 - 2k_2 b_1, \tag{5.1}$$

где b_1, h_1, b_2, h_2 - линейные размеры прямоугольного коробчатого сечения; k_1, k_2 - задаваемые коэффициенты, связывающие b_1 с остальными линейными размерами.

Площадь поперечного прямоугольного коробчатого сечения:

$$A = h_1 b_1 - h_2 b_2 = b_1^2 k_1 - (-2b_1 k_2 + b_1)(b_1 k_1 - 2b_1 k_2). \tag{5.2}$$

Максимальный статический момент:

$$S_{\max} = \int_{\frac{F}{2}} y dA = \frac{h_1}{2} \cdot \frac{b_1 h_1}{4} - \frac{h_2}{2} \cdot \frac{b_2 \cdot h_2}{4}. \tag{5.3}$$

Подставляя значения b_2, h_1, h_2 из (5.1) в (5.3) получим:

$$S_{\max} = \frac{1}{8} k_1^2 b_1^3 - \frac{1}{8}(b_1 k_1 - 2b_1 k_2)^2 (-2b_1 k_2 + b_1). \tag{5.4}$$

Осевой момент инерции сечения относительно оси X определяем по следующему выражению:

$$I_X = \frac{b_1 h_1^3}{12} - \frac{b_2 h_2^3}{12}, \tag{5.5}$$

или подставляя значения b_2, h_1, h_2 из (5.1) в (5.5) получим:

$$I_X = \frac{1}{12} b_1^4 k_1^3 - \frac{1}{12}(-2b_1 k_2 + b_1)(b_1 k_1 - 2b_1 k_2)^3. \tag{5.6}$$

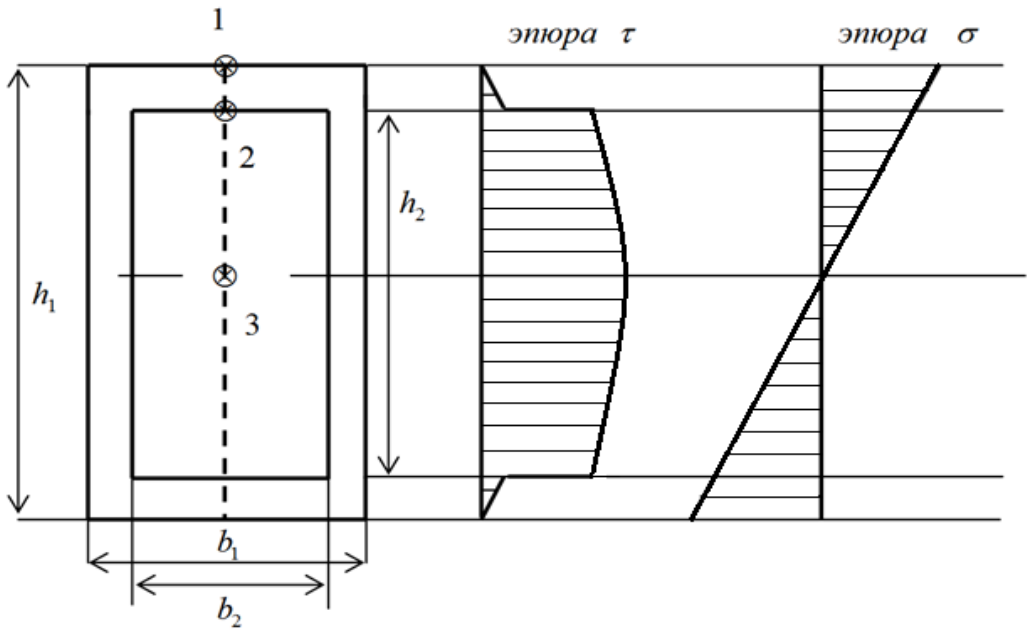


Рисунок 5.1 – Прямоугольное коробчатое сечение

Аналогично определим осевой момент инерции сечения относительно оси Y:

$$I_Y = \frac{h_1 b_1^3}{12} - \frac{h_2 b_2^3}{12}. \tag{5.7}$$

Подставляя значения b_2, h_1, h_2 из (5.1) в (5.7) получим:

$$I_Y = \frac{1}{12} k_1 b_1^4 - \frac{1}{12}\left(b_1 k_1 - 2b_1 k_2\right)\left(-2b_1 k_2 + b_1\right)^3. \tag{5.8}$$

Тогда момент сопротивления сечения относительно оси X будет равен:

$$W_X = \frac{I_X}{y_{\max}} = \frac{I_X \cdot 2}{h_1}, \tag{5.9}$$

или подставляя значение I_x, получим:

$$W_x = \frac{2\left(\frac{1}{12} b_1^4 k_1^3 - \frac{1}{12}\left(-2b_1 k_2 + b_1\right)\left(b_1 k_1 - 2b_1 k_2\right)^3\right)}{k_1 b_1}. \tag{5.10}$$

5.3 Расчет на прочность при центральном растяжении или сжатии звена

В механизмах могут быть звенья, которые работают, в основном, на растяжение или сжатие. Если звено работает на растяжение, то используем известную формулу для определения площади поперечного сечения звена из курса сопротивления материалов:

$$A \geq \frac{N_{\max}}{[\sigma]}, \tag{5.11}$$

где $N_{\max}$ – максимальное значение продольной силы, найденное в разделе 3, $[\sigma]$ – допускаемое нормальное напряжение.

Для подбора формы и определения линейных размеров поперечных сечений сжатых стержней используется известное выражение [2, с. 419]:

$$A \geq \frac{N_{\max}}{\varphi \cdot [\sigma]}, \tag{5.12}$$

где φ – коэффициент снижения.

Так как коэффициент снижения φ зависит от гибкости стержня, а гибкость неизвестна, поскольку неизвестно сечение, поэтому для определения площади поперечного сечения звена применим метод последовательных приближений.

Пусть требуется подобрать прямоугольное коробчатое сечение стержня длиной l, находящегося под действием центральной сжимающей нагрузки $N_{\max}$. Определим величины гибкостей стержня в обеих главных плоскостях.

Расположим сечение звена так, как показано на рисунке 5.2. Для главной плоскости сечения ZY оба конца звена закреплены шарнирно (5.2,а), а для другой главной плоскости ZX оба конца защемлены (5.2,б).

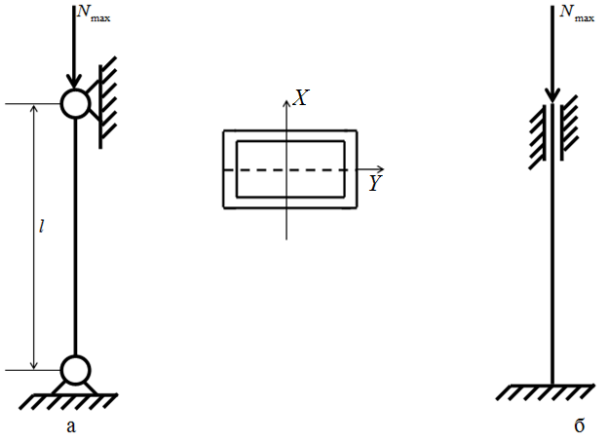


Рисунок 5.2 – Закрепление звена в двух разных главных плоскостях

Площадь поперечного сечения стержня подберем по первому случаю закрепления (рисунок 5.2,а).

Расчетная длина стержня: $l_p = \mu \cdot l = l$, где $\mu = 1$ - коэффициент приведения длины.

В первом приближении примем $\varphi 1 = 0.5$. Определим площадь поперечного сечения стержня A из (5.12), ширину b_1 прямоугольного коробчатого сечения определим из (5.2), тогда радиус инерции будет равен:

$$i = \sqrt{\frac{I_{\min}}{A}} = \sqrt{\frac{\frac{1}{12}k_1 b_1^4 - \frac{1}{12}(b_1 k_1 - 2b_1 k_2)(-2b_1 k_2 + b_1)^3}{b_1^2 k_1 - (-2b_1 k_2 + b_1)(b_1 k_1 - 2b_1 k_2)}}.$$

Гибкость звена определяется из соотношения $\lambda = \mu \cdot l / i = l_p / i.$ При линейной интерполяции для φ по таблице 5.1 имеем:

$$\varphi 2 = \varphi_{i-1} - \frac{(\varphi_{i-1} - \varphi_i)(\lambda - \lambda_{i-1})}{10},$$

где $\lambda_{i-1} \le \lambda \le \lambda_i$.

Таблица 5.1 Коэффициент продольного изгиба φ [2, с. 419]

λ_i	0	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100
φ_i	1.0	0.99	0.96	0.94	0.92	0.89	0.86	0.81	0.75	0.69	0.60

λ_i	110	120	130	140	150	160	170	180	190	200
φ_i	0.52	0.45	0.40	0.36	0.32	0.29	0.26	0.23	0.21	0.19

Если условие:

$$|\varphi 1 - \varphi 2| \le \varepsilon, \qquad (5.13)$$

не выполняется, то $\varphi 1 = 0.5(\varphi 1 + \varphi 2)$ и весь процесс повторяется заново, пока не выполнится условие (5.13), где ε - задаваемая малая величина. После выполнения условия (5.13), из соотношения (5.12) определяется площадь поперечнего сечения.

По второму случаю закрепления (рисунок 5.2,б) для определения площади поперечнего сечения звена используется тот же самый подход с приведенной длиной $l_p = 0.5 \cdot l,$ так как оба конца стержня защемлены.

Наибольшее значение из полученных площадей примем за окончательную площадь поперечнего сечения звена.

5.4 Расчет на прочность при изгибе с растяжением (сжатием)

Подберем формы поперечных сечений и определим их линейные размеры для звена, который работает на изгиб с растяжением (сжатием). Максимальное значение изгибающего момента и продольной силы определены в разделе 3. Рассмотрим прямоугольное коробчатое сечение, т.к. он обладает большими моментами инерции и сопротивления при наименьшей площади поперечного сечения, и, следовательно, большей прочностью по сравнению с другими видами сечений [2, с. 165]. Пусть необходимо подобрать прямоугольное коробчатое сечение. На основании эпюр в прямоугольном коробчатом сечении (рисунок 5.1,б, в) опасными точками могут быть:

-точка 1, в которой возникают нормальные максимальные напряжения,

-точка 2, в которой возникают значительные нормальные и касательные напряжения,

-точка 3, лежащая на нейтральной оси, в которой возникают максимальные касательные напряжения.

Считая опасной точку 1, подберем линейные размеры поперечного сечения из условия прочности на изгиб [2, с. 164]:

$$W_X = \frac{|M_{\max}|}{[\sigma]}\ , \tag{5.14}$$

где W_X - осевой момент сопротивления.

На основании (5.10) имеем:

$$b_1 = \sqrt[3]{\frac{W_x}{\frac{1}{3}k_1^2 k_2 - 2k_1 k_2^2 + 4k_2^3 - \frac{8}{3}\frac{k_2^4}{k_1} + k_1 k_2 - 2k_2^2 + \frac{4}{3}\frac{k_2^3}{k_1}}},$$

где линейные размеры $b_2,\ h_1, h_2$ и площадь сечения A определим из (5.1) и (5.2), соответственно. В действительности, в точке 1 нормальное напряжение будет равно [2, с. 162]:

$$\sigma = \frac{N}{A} + \frac{M_{\max}}{W_X}. \tag{5.15}$$

Из-за наличия продольной силы, нормальное напряжение в точке 1 будет отличаться от допускаемого напряжения $[\sigma]$ и будет иметь место перенапряжение, которое можно оценить следующим образом:

$$PROZ = \frac{|\sigma - [\sigma]}{[\sigma]} \cdot 100\%. \tag{5.16}$$

Если процент перенапряжения (5.16) незначительный, т.е.

$$PROZ \le \varepsilon_\sigma \tag{5.17}$$

где ε_σ - задаваемая малая величина, то оставляем найденные линейные размеры поперечного сечения. Если не выполняется условие (5.17), то давая приращения $b_{i+1} = b_i + \Delta b$ увеличиваем поперечное сечение до тех пор, пока не выполнится условие (5.17).

По найденному значению b_1 определим геометрические характеристики прямоугольного коробчатого сечения $S_{\max}$, I_X используя формулы (5.4) и (5.5). Проверим максимальные касательные напряжения в точке 3 по условию прочности [2, с.205]:

$$\tau_{\max} = \frac{Q \cdot S_{\max}}{\mathrm{b} \cdot I_X}. \tag{5.18}$$

где $\tau_{\max}$ - касательное напряжение, Q - поперечная сила, $S_{\max}$ - максимальный статический момент, I_X - осевой момент инерций сечений.

Проверим условие:

$$PROZ = \frac{|\tau_{\max} - [\tau]}{[\tau]} \cdot 100\% \le \varepsilon_\tau \tag{5.19}$$

где ε_τ - задаваемая малая величина. Если выполняется условие (5.19), то оставляем найденные линейные размеры поперечного сечения. Если не выполняется, то давая приращения $b_{i+1} = b_i + \Delta b$ увеличиваем поперечное сечение до тех пор, пока не выполнится условие (5.19).

Теперь проверим напряжение в точке 2, где возникают значительные нормальные и касательные напряжения. Для этого воспользуемся четвертой теорией прочности [2, с. 382]:

$$\sigma_p = \sqrt{\sigma^2 + 3 \cdot \tau^2} \le [\sigma], \tag{5.20}$$

где

$$\sigma = \frac{M_{\max} \frac{h_2}{2}}{I_X}, \quad \tau = \frac{Q \cdot S_{пол}}{(b_1 - b_2) \cdot I_X}, \tag{5.21}$$

где

$$S_{пол} = b_1 \left(\frac{h_1}{2} - \frac{h_2}{2} \right) \left(\frac{h_2}{2} + \frac{\left(\frac{h_1}{2} - \frac{h_2}{2} \right)}{2} \right) = b_1^2 k_2 \left(\frac{1}{2} k_1 b_1 - \frac{1}{2} k_2 b_1 \right).$$

Перенапряжение оценить следующим образом:

$$PROZ = \frac{\left| \sigma_p - [\sigma] \right|}{[\sigma]} \cdot 100\% \le \varepsilon_{op}, \tag{5.22}$$

где ε_{op} - задаваемая малая величина. Если условие (5.22) выполняется, то оставляем найденные линейные размеры поперечного сечения. Если не выполняется, то давая приращения $b_{i+1} = b_i + \Delta b$ увеличиваем поперечное сечение до тех пор, пока не выполнится условие (5.22).

В качестве примера реализации предложенного алгоритма оптимизации масс звеньев плоских стержневых механизмов, был взят исследуемый шестизвенный механизм, реализующий прямолинейное движение рабочей точки (рисунок 1.1). Приведем результаты расчёта для механизма со следующими метрическими размерами: $AB = 0,095\,м$, $BC = 0,385\,м$, $CD = 0,30\,м$, $DG = 0,45\,м$, $GE = 0,40\,м$. В точке E механизма приложена сосредоточенная нагрузка $P = 10 \cdot 10^3\ H$. Материал звеньев – сталь3. Модуль упругости $E = 2 \cdot 10^{11} \frac{H}{м^2}$. Удельный вес стали $\gamma = 78 \cdot 10^3 \frac{H}{м^3}$. Результаты расчёта приведены в таблице 5.2.

Таблица 5.2 Результаты оптимизации массы шестизвенного механизма 2-го класса

Звенья	AB	BC	CD	DG	GE	CG
$\omega_1 = 1/сек$						
$A, м^2$	0.0001663533701	0.0003513416567	0.0002907470432	0.00007765800412	0.0002121774778	0.0001790756909
$I, м^4$	$7.930230045 \cdot 10^{-9}$	$3.537381248 \cdot 10^{-8}$	$2.422440914 \cdot 10^{-8}$	$1.728204089 \cdot 10^{-9}$	$1.290093372 \cdot 10^{-8}$	$9.189583962 \cdot 10^{-9}$
$b_1, м$	0.01723541672	0.02504787048	0.02278576636	0.01177603530	0.01946505467	0.01788233820
$h_1, м$	0.03447083344	0.05009574096	0.04557153272	0.02355207060	0.03893010934	0.03576467640
$b_2, м$	0.01378833338	0.02003829638	0.01822861309	0.009420828240	0.01557204374	0.01430587056
$h_2, м$	0.03102375010	0.04508616686	0.04101437945	0.02119686354	0.03503709841	0.03218820876
$M_{max}, H \cdot м$	-4547.485717	2.353285462	0.8014948954	1.212276307	-1.227534263	1.212633764
Q_{max}, H	15977.26228	13.38374763	4.849460513	8.399181734	-7.215283644	6.049088206
N_{max}, H	26616.53922	-27221.57632	-28498.18046	12425.28066	-10466.95124	-16860.88632
Вес звена, Н	3.698035418	31.65236985	20.41044243	8.177387833	19.85981192	10.15022882
$\omega_1 = 50/сек$						
$A, м^2$	0.001438084405	0.0002581705822	0.0002221087583	0.0001500972567	0.0001325654666	0.0001790985671
$I, м^4$	$0.1832437413 \cdot 10^{-5}$	$5.905734315 \cdot 10^{-8}$	$4.371110296 \cdot 10^{-8}$	$1.996208528 \cdot 10^{-8}$	$1.557116858 \cdot 10^{-8}$	$2.842134459 \cdot 10^{-8}$
$b_1, м$	0.05077551544	0.02157135061	0.02001539060	0.01647164669	0.01548583918	0.01798348037
$h_1, м$	0.1013510309	0.04294270122	0.03983078120	0.03274329338	0.03077167836	0.03576696074
$b_2, м$	0.04054041235	0.01717708049	0.01593231248	0.01309731735	0.01230867134	0.01430678430
$h_2, м$	0.09121592781	0.03864843110	0.03584770308	0.02946896404	0.02769451052	0.03219026467
$M_{max}, H \cdot м$	-5112.603779	113.6825517	-60.29755064	-82.68927213	75.87239420	-82.68934531
Q_{max}, H	19809.52140	775.7707705	470.9502875	739.7841718	-508.9565499	698.7633454
N_{max}, H	27934.51429	-30802.39899	-29487.83789	13739.03375	-11211.02348	-19280.47395
Вес звена, Н	31.96861633	23.25858775	15.59203484	15.80524113	12.40812767	10.15152547

$\omega_1 = 100 / сек$						
$A, м^2$	0.001830662158	0.000499686649	0.0003790083068	0.0003191190885	0.0002657887620	0.0003467450535
$I, м^4$	$0.2969455390 \cdot 10^{-5}$	$2.212360461 \cdot 10^{-7}$	$1.272793223 \cdot 10^{-7}$	$9.02331179 \cdot 10^{-8}$	$6.259413260 \cdot 10^{-8}$	$1.065322121 \cdot 10^{-7}$
$b_1, м$	0.05727551544	0.02997135061	0.02611539060	0.02397164669	0.02188583918	0.02498348037
$h_1, м$	0.1143510309	0.05974270122	0.05203078120	0.04774329338	0.04357167836	0.04976696074
$b_2, м$	0.04574041235	0.02389708049	0.02081231248	0.01909731735	0.01742867134	0.01990678430
$h_2, м$	0.1029159278	0.05376843110	0.04682770308	0.04296896404	0.03921451052	0.04479026467
$M_{max}, Н \cdot м$	-7097.044426	449.4658533	-243.5627513	-334.3716406	307.0327988	-334.3714803
$Q_{max}, Н$	32351.20316	3072.543424	1410.303850	2984.569379	-2055.825047	2812.716672
$N_{max}, Н$	44536.89144	-49905.06451	-42278.43373	23245.66240	-14039.29942	-28565.93787
Вес звена, Н	40.69561977	45.01677021	26.60638314	33.60324002	24.87782813	19.65393302

5.5 Краткие выводы по разделу 5

1. Разработаны алгоритмы и компьютерные программы автоматизации методики оптимизации массы механизма по допускаемым напряжениям, обеспечивающих прочность звеньев для полного рабочего цикла. Результаты этих исследований позволяют подобрать форму сечений и определить линейные размеры сечений звеньев с наименьшей площадью, обеспечивающие прочность звеньев в течение полного рабочего процесса проектируемых стержневых механизмов и манипуляторов под действием сосредоточенных и распределенных динамических нагрузок.
2. Получены численные результаты, где определены геометрические характеристики, линейные размеры сечений, максимальные значения внутренних усилий и оптимальные веса звеньев шестизвенного механизма при угловых скоростях $\omega_1 = \frac{1}{сек}$ и $\omega_1 = 100 \cdot \frac{1}{сек}$.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Основные результаты и выводы диссертационного исследования заключаются в следующем:

- разработаны алгоритмы и компьютерные программы, позволяющие производить анимацию движения механизма и манипулятора с автоматическим построением на звеньях эпюр распределенных динамических нагрузок, внутренних усилий в звеньях механизма и манипулятора для полного рабочего цикла;
- разработаны алгоритмы и компьютерные программы, позволяющие производить анимацию движения механизма с автоматическим построением на звеньях эпюр деформаций звеньев механизма для полного рабочего цикла;
- разработаны алгоритмы и компьютерные программы автоматизации методики оптимизации массы механизма по допускаемым напряжениям и подобраны формы поперечных сечений звеньев и определены их линейные размеры.

Оценка полноты решений поставленных задач. Результаты проведенных исследований в диссертационной работе позволяют при различных скоростях, ускорениях обобщенных координат и при действии на звенья проектируемых стержневых механизмов и манипуляторов статических и динамических нагрузок, подобрать форму сечений и определять поперечные размеры звеньев с наименьшей площадью, обеспечивающие прочность звеньев в полном рабочем процессе. Это свидетельствует о выполнении всех поставленных задач и достижении цели исследования.

Рекомендации и исходные данные по конкретному использованию результатов. Разработанную методику и программы можно применить при автоматизации исследований напряженно–деформированного состояния проектируемых, а также существующих стержневых систем (плоские стержневые механизмы, манипуляторы, фермы, рамы и т.д.).

Оценка технико-экономической эффективности внедрения. Разработанная методика и пакеты программ использованы в рамках Программы грантового финансирования (ГФ4.2019) фундаментальных научных исследований в области энергетики и машиностроения МОН РК «Разработка аналитической теории прогнозирования прочности и жесткости робототехнических систем и механизмов» (за 2015-2017 годы) № гос.регистрации 0115РК00783.

Оценка научного уровня выполненной работы в сравнении с лучшими достижениями в данной области. Для исследования напряженно-деформированного состояния стержневых систем существуют различные графоаналитические и численные методы расчета, где не учитываются распределенные динамические нагрузки. В данной диссертационной работе разработана автоматизированная методика оптимизации массы подвижных стержневых систем по допускаемым напряжениям с учетом распределенных динамических нагрузок.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1 Чирас А.А. Строительная механика: Теория и алгоритмы: учеб. для вузов. М.: стройиздат, 1989. – 255 с.

2 Александров А.В. Сопротивление материалов: учеб. для вузов / под ред. А.В. Александрова. – Изд. 3-е, испр. – М.: Высшая школа, 2003. – 560 с.

3 Дарков А. В., Шапошников Н. Н. Строительная механика: учебник. – Изд. 12-е, стер. – СПб.: Лань, 2010. – 656 с.

4 Шакирзянов Р.А., Шакирзянов Ф.Р. Курс лекций по строительной механике: учебное пособие. Изд. 2-е, перераб. и доп. – Казань: КГАсУ, 2014. – 144 с.

5 Khalil W., Gautier M. Modeling of mechanical systems with lumped elasticity // Proc. of the IEEE International Conference on Robotics and Automation. – 2000. - Vol. 4. – P. 3964–3969.

6 Megahed S.M., Hamza K.T. Modeling and simulation of planar flexible link manipulators with rigid tip connections to revolute joints // Robotica. – 2004. – Vol. 22. – P. 285–300.

7 Xilun D., Selig J. Lumped parameter dynamic modeling for the flexible manipulator // Proc. 5th World Congress on Intelligent Control and Automation. – Hangzhou, 2004. – P. 280-284.

8 Giorgio I., del Vescovo D. Non-Linear Lumped-Parameter Modeling of Planar Multi-Link Manipulators with Highly Flexible Arms // Robotics by MDPI. – 2018. – Vol. 7.

9 Gherman B. et al. Development of inverse dynamic model for a surgical hybrid parallel robot with equivalent lumped masses // Robotics and Computer-Integrated Manufacturing. – 2012. – Vol. 28. – P. 402-415.

10 Pisla D., Kerle H. Development of dynamic models for parallel robots with equivalent lumped masses // Proc. 6th Int. Conf. on Methods and Models in Automation and Robotics. – Poland, 2000. – Vol. 2. – P. 637–642.

11 Kim S.-M. Lumped Element Modeling of a Flexible Manipulator System // IEEE/ASME Trans. on Mechatronics. – 2014. – Vol. 20. – P. 967-974.

12 Feliu V. et al. Modeling and control of single-link flexible arms with lumped masses // Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control. – 1992. – Vol. 114. – P. 59-69.

13 Raboud D. et al. Stability evaluation of very flexible cantilever beams // Int. Journal of Nonlinear Mechanics. – 2001. – Vol. 36. P. 1109–1122.

14 Tomei P., Tornambe A. Approximate modeling of robots having elastic links // IEEE Transactions on Systems, Man and Cybernetics. – 1988. – Vol. 18. – P. 831–840.

15 Kovecses J. A distributed parameter model for the dynamics of flexible-link robot // Journal of Robotic Systems. – 1998. – Vol. 115. – P. 281–298.

16 Dwivedy S.K., Eberhard P. Dynamic analysis of flexible manipulators, a literature review // Mechanism and Machine Theory. – 2006. – Vol. 41. – P. 749–777.

17 Korayem M.H., Esfandiar H. Large deformation modeling of flexible manipulators to determine allowable load // Structural Engineering & Mechanics. – 2017. – Vol. 62, №5. – P. 619–629.

18 Lee Ho-Hoon. New dynamic modeling of flexible-link robots // Journal of Dynamic Systems Measurement and Control. – 2005. – Vol. 127. – P. 307–309.

19 Лагерев А. В., Лагерев И. А., Мильто А. А. Универсальная методика определения напряжений в стержневых элементах конструкций гидравлических кранов-манипуляторов в задачах динамики // Вестник Брянского государственного университета. – 2013. – Vol. 127. – P. 21–27.

20 Featherstone R., Orin D. Robot Dynamics: Equations and Algorithms // Proc. IEEE Int. Conf. Robotics & Automation. – 2000. - Vol. 127. – P. 826–834.

21 Mahto S., Dixit U.S. Optimized Design of Single Link Flexible Manipulator // Proc. ASME 2011 Int. Mech. Eng. Congress and Exposition. – Denver, Colorado, 2011. – P. 183–190.

22 Rosado V.O.G. A planar flexible robotic manipulator. // Kybernetes. – 2000. – Vol. 29. – P. 787–796.

23 Dixit U.S., Kumar R., Dwivedy S.K. Shape Optimization of Flexible Robotic Manipulator // ASME Journal of Mechanical Design. – 2006. – Vol. 121 №3. – P. 559–565.

24 Hedge G.S., Vinod M.S., Shanker A. Optimum dynamic design of flexible robotic manipulator // Intl. J. of Machines, Materials in Design. – 2009. – Vol. 5. – P. 315–325.

25 Хуссайн А.А. Рациональной выбор параметров звеньев манипулятора робота на основе анализа статических и динамических характеристик: дисс. на соиск. уч. степ. канд. техн. наук: 05.02.05. – сПб., 2002. – 140 с.

26 Zienkiewicz O.**,** Taylor R.**,** Zhu J. The Finite Element Method: Its Basis and Fundamentals. – 7th Edition. – 2013. ISBN-13: 978-1856176330. – p. 756.

27 Strang G., Fix G. An Analysis of the Finite Element Method. – 2nd edit. – 2008. – p. 414.

28 Лось А.М., Блохин А.В., Ярмолик С.В. Исследование напряженно-деформированного состояния несущих металлоконструкций лесных кранов системами конечно-элементного анализа // Труды БГТУ. – 2014. – Том 2. – с. 180–181.

29 Алаадин Н. Разработка метода определения нагруженности и положения рабочего органа манипулятора тяжелого мобильного робота: дисс. на соиск. уч. степ. канд. техн. наук: 05.05.04. – М., 2007. – 146 с.

30 Лагерев И.А. Оценка динамической нагруженности и оптимизация трехзвенных гидравлических кранов-манипуляторов транспортно-технологических машин для сварки трубопроводов: дисс. на соиск. уч. степ. канд. техн. наук: 05.05.04. – М., 2007. – 146 с.

31 Полозов Д. С., Путеев Н.В. Расчет методом конечных элементов звена промышленного робота // Вестник ВГТУ. ─ 2013. ─ № 24. ─ с. 70–74.

32 Игнатьев А.В., Игнатьев В.А., Онищенко Е.В. Возможность использования метода конечных элементов в форме классического смешанного

метода для геометрически нелинейного анализа шарнирно-стержневых систем // Вестник МГсУ. – 2015. - №12. – с. 47–58.

33 Фролова О.А. Анализ напряженно-деформированного состояния стержневых элементов конструкции с учетом стат. и динам. воздействий // Вестник Тамбов. унив-а. серия Ест. и тех. науки. ─ 2016. ─ Т. 21. ─ с. 1400–1404.

34 Tokhi M.O., Mohamed Z., Amin S.H.M., Mamat R. Dynamic characterization of a flexible manipulator system: theory and experiments // Proc. of TENCON. – 2000. – №3. – pp. 167–172.

35 Tokhi M.O., Mohamed Z., Shaheed M.H. Dynamic characterisation of a flexible manipulator system // Robotica. – 2001. – №19. – pp. 571–580.

36 Chung J., Yoo H.H. Dynamic analysis of a rotating cantilever beam by using the finite element method // J. of Sound and Vibration. – 2002. – №1. – pp. 147–164.

37 Du H., Ling S.F. A nonlinear dynamic model for three-dimensional flexible linkages // Comput. Struct. – 1995. – №56. – pp. 465-496.

38 Shaker M.C., Ghosal A. Nonlinear modeling of flexible manipulators using non-dimensional variables // J. Comput. Nonlinear Dyn. – 2006. – №1. – pp.123-134.

39 Yue S., Tso S.K., Xu W.L. Maximum dynamic payload trajectory for flexible robot manipulators with kinematic redundancy // Mech. Mach. Theory. – 2001. – №36. – pp. 785-800.

40 Wang L.T., Ravani B. Dynamic load carrying capacity of mechanical manipulators – part I: problem formulation // J. Dyn. Syst. Meas. Control. – 1988. – №110. – pp. 46–52.

41 Korayem M.H., Basu A. Formulation and numerical solution of elastic robot dynamic motion with maximum load carrying capacity // Robotica. – 1994. – №12. – pp. 253–261.

42 Korayem M.H., Basu A. Dynamic load carrying capacity for robotic manipulators with joint elasticity imposing accuracy constraints // Robot. Auton. Syst. – 1994. – №13. – pp. 219–229.

43 Korayem M.H., Ghariblu H. Maximum allowable load on wheeled mobile manipulators imposing redundancy constraints // Robot. Auton. Syst. – 2003. – №44. – pp. 151–159.

44 Korayem M.H., Haghpanahi M., Heidari H.R., Maximum allowable dynamic load of flexible manipulators undergoing large deformation // Sci. Iran. – 2010. – №17. – pp. 61–74.

45 Korayem M.H., Haghpanahi M., Heidari H.R. Maximum allowable load of very flexible manipulators by using absolute nodal coordinate // Aerospace Science and Technology. – 2015. – №45. – pp. 67–77.

46 Zhilkibayeva S.K., Utenov M.U., Utenova K.U. Analytical method of definition of internal forces taking into account the distributed dynamical loads in links of robotic systems and mechanisms with statically indeterminate structures // Вестник КазНУ им. аль-Фараби. серия математика, механика, информатика. – Алматы, 2016. - №4 (92). – с. 55-69.

47 Utenov M.U., Baygunchekov Zh. Zh., Zhilkibayeva S.K. Determination of displacements in cross-sections of four-bar mechanism links from distributed dynamic loads and their animation using MAPLE // Вестник КазНУ им. аль-Фараби. серия матем., мех., информ. – Алматы, 2018. - №2 (98). – с. 45-56.

48 Утенов М.У., Байгунчеков Ж.Ж., Жилкибаева С.К. Кинематический и силовой анализ манипулятора типа Scara с применением однородных матриц и уравнения Ньютона-Эйлера // Вестник КБТУ. –Алматы, 2018. – 2(45). –с. 87-93.

49 Utenov M., Baigunchekov Zh., Zhilkibayeva S., Utenov N. Computational method of determination of internal efforts in links of mechanisms and robot manipulators with statically definable structures considering the distributed dynamically loadings // Proceedings of ECCOMAS Congress 2016, Crete Island, Greece, June 5–10, 2016. - Vol. IV. - pp. 8627-8639.

50 Utenov, M., Zhilkibayeva, S.,Utenov, N. Animation of motion of mechanisms and robot manipulators in the Maple system with the construction of diagrams of internal forces on the links// ACM Int. Conf. Proc. Series of the 2nd Int. Conf. on Robotics, Control and Automation (ICRCA 2017), Kitakyushu, Japan, September 15-18, 2017. – pp. 30-33.

51 Zhilkibayeva S., Utenov M., Sobh T., Baigunchekov Zh., Patel S. Analytical method for determination of internal forces of mechanisms and manipulators // MDPI Robotics. – 2018. – 7(3), 53.

52 Утенов М.У., Жилкибаева С.К. Анимация движения механизма в системе Maple с построением эпюр внутренних усилий на звеньях механизма // Труды МНПК «Сто конкретных шагов. современное государство для всех» - Страт. путь инд.-инновационного развития страны». – Шымкент, 2015. – с. 310-316.

53 Утенов М.У., Жилкибаева С.К., Утенова К.М. Аналитическое определение внутренних усилий в звеньях механизмов высокого класса со статической определимой структурой // Сб. матер. респ. науч.-мет. конф. «Актуальные вопросы механики и математики», посв. 20-летию ЕНУ им. Л.Н. Гумилева и 10-летию основания кафедры «Механика» мех.-мат. факультета ЕНУ им. Л.Н. Гумилева. – Астана, 14-15 октября 2016. – с. 104-109.

54 Утенов М.У. Исследования сил, возникающих от собственных масс звеньев с постоянными и переменными сечениями при их плоскопараллельном движении //Транспорт Евразии: взгляд в XXI век. Материалы первой Международной научно-практической конференции. – Алматы, 18-19 октября 2000. – Т.2. – С. 30-34.

55 Утенов М.У., Салманова А.Н. Расчетные схемы и дискретные модели упругого расчета плоских стержневых механизмов // Тезисы докл. V межд. конф. посв. пробл. механики совр. машин. -Улан-Удэ, 2012. -Т. 3. -С.125-129.

56 Утенов М.У. Уравнения равновесия звена при плоскопараллельном движении // Вестник КазАТК. – 2002. - №2 [14]. – С. 28-33.

57 Утенов М.У., Салманова А.Н. Уравнения равновесия дискретной модели элементов, находящихся под действием поперечных и продольных распределенных нагрузок трапецеидального и параболического видов //

Проблемы механики современных машин. Материалы V международной конференции. – Улан-Удэ, 25-30 июня 2012. – 2012. – Т. 3. –С.122-125.

58 Утенов М.У., Салманова А.Н. Закономерности распределения инерционных сил, матрицы аппроксимации и податливости в подвижных стрежневых системах // Проблемы механики современных машин. Материалы V международной конференции. – Улан-Удэ, 25-30 июня 2012. – 2012. – Т. 3. – С.129-133.

59 Утенов М.У. Определение внутренних усилий плоских стержневых механизмов при действии сил трапецеидального вида. // Вестник КазАТК. – 2002. - №5 [17]. – С. 17-21.

60 Хаджиева Л.А. Динамика геометрически и физически нелинейных деформируемых элементов механизмов и машин.Дисс.док.физ.-мат.наук – Алматы. 2007. – 210с.

61 Aitaliev Sh., Khajiyeva L., Masanov G., Kydyrbekuly A.Dynamics of mechanisms with elasticlinks // Proc. 12 Int. Workshop on Computation Kinematic. – Cassino, Italy, 4-6 May 2005. – 2005. – pp. 1-11.

62 Khajiyeva L., Kydyrbekuly A.Modeling of vibration of the high-speed mechanism elements by their finite deformations. // Proc. 7th Int. Conf. RELMAS-2008, СПбГПУ, Санкт-Петербург, 17-20 июня 2008. – 2008. – Т.1. – pp. 195-200.

63 Артоболевский И.И. Теория механизмов и машин: Учеб. Для втузов. – 4-е изд., перераб. и доп. – М. Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1988. – 640 с.

64 Левитский Н.И. Теория механизмов и машин: Учеб. пособие для вузов. – 2-е изд., перераб. и доп. – М. Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1990. – 592 с.

65 Утенов М.У. Теоретические основы динамического расчета на прочность и жесткость плоских стержневых механизмов: дис. … тех.наук: 05.02.18. – Алматы, 2007. – 275 с. – Инв. №0507РК00165.

ПРИЛОЖЕНИЕ А

Программа анимации движения шестизвенного механизма с построением на звеньях эпюр изгибающих моментов:

```
> restart : with(plottools) : with(plots) : LinearAlgebra :
> #Процедура определения координат точки C по координатам A и B и длинам AC и BC
>
>
  atan := proc(a, b)
   local at;
   if b·1.0 < 0.0 then
                  at := 3.1416 + arctan(a/b)
       elif b·1.0 = 0.0 then
                  at := |a|/a
              elif b·1.0 > 0.0 then
                  at := arctan(a/b)
   end if;
   end proc:

> Fcircle := proc(A, R) # рисует закрашенный круг с центром в точке A радиусом R
  # ellipse(A, R, R, color = blue, filled = true) :
  disk(A, R, color = blue) :
  end:

>
  Mris1 := proc( )
  local lines, i, pl1, x;
  lines := line([0, 0], [0, 0]);
   for i from 0 by 0.01·3 to 0.095·3 do
      lines := lines, line([i, 0], [i, M1(i)], color = red);
   od;
   pl1 := rotate(plot(M1(x), x = 0 ..0.095·3), 0);

   pl1 := rotate( display(lines, pl1), tet1);
   end proc:

>
  Mris2 := proc( )
   local lines, i, pl2, p;
  lines := line([0, 0], [0, 0]);
   for i from 0 by 0.01·3 to 0.385·3 do
      lines := lines, line([ i, 0], [ i, M2(i)], color = blue);
   od;
   pl2 := plot( M2(x), x = 0 .. 0.385·3);
  p := rotate(( display(lines, pl2), tet2));
   display([translate(p, xb, yb)]);
   end proc:
```

```
> Mris3 := proc( )
  local lines, i, pl3, p;
  lines := line([0, 0], [0, 0]);
  for i from 0 by 0.01·3 to 0.3·3 do
    lines := lines, line([ i, 0], [ i, M3(i) ], color = yellow);
  od;
  pl3 := plot( M3(x), x = 0 .. 0.3·3);
  p := rotate( ( display(lines, pl3), tet3) );
  display( [translate(p, xd, yd) ])
  end proc:

> Mris4 := proc( )
  local lines, i, pl4, p;
  lines := line([0, 0], [0, 0]);
  for i from 0 by 0.01·3 to 0.45·3 do
    lines := lines, line([ i, 0], [ i, M4(i) ], color = green);
  od;
  pl4 := plot( M4(x), x = 0 .. 0.45·3);
  p := rotate( ( display(lines, pl4), tet3 + α) );
  display( [translate(p, xd, yd) ])
  end proc:

> Mris5 := proc( )
  local lines, i, pl5, p;
  lines := line([0, 0], [0, 0]);
  for i from 0 by 0.01·3 to 0.4·3 do
    lines := lines, line([ i, 0], [ i, M5(i) ], color = blue);
  od;
  pl5 := plot( M5(x), x = 0 .. 0.4·3);
  p := rotate( ( display(lines, pl5), tet5) );
  display( [translate(p, xe, ye) ])
  end proc:

> Mris6 := proc( )
  local lines, i, pl6, p;
  lines := line([0, 0], [0, 0]);
  for i from 0 by 0.01·3 to CG do
    lines := lines, line([ i, 0], [ i, M6(i) ], color = red);
  od;
  pl6 := plot( M6(x), x = 0 .. CG);
  p := rotate( ( display(lines, pl6), tet6) );
  display( [translate(p, xc, yc) ])
  end proc:

> RectRφ := proc(A, φ, R, A1 :: evaln, A2 :: evaln, co := white, kb := 4, kh := 2, th := 2)
      #Рисует прямоугольник под углом φ
  local α, b, h, c, s, h2, b2, A0, App, Amm, Apm;
  b := R·kb; h := R·kh; c := cos(φ); s := sin(φ);
  A1 := A − b·[c, s]; A2 := A + b·[c, s];
  h2 := 2·h; b2 := 2·b;
  α := arctan( h / b ); A0 := A + sqrt(b^2 + h^2)·[cos(φ + α), sin(φ + α) ];
  Amm := A0 − b2·[c, s]; Apm := Amm + h2·[s, −c]; App := Apm + b2·[c, s];
  polygon( [A0, Amm, Apm, App, A0], color = co, thickness = th);
  end:

>
```

```
manipulq := proc(i, r := 0.02·3) global A, B, C, OD, G, E, cE, cA, cB, cC, cD, cG, AB, BC,
    CD, BD, DG, GD, P, BG, GE, GH, CG, pl, E1B2, E2B1, E1, E2, xc1, yc1, tet, tet4, tet5, n,
    hφ1, lAB, lBC, lCD, lDG, lCG, lGE,
tet2, tet3, AN, AN0, BN, BN0, AN1, AN10, ZN, ZN0, b11, b12, BNY, BNY0, ZNY, ZNY0, b21,
    b22, axb, ayb, axc, ayc, xb, yb, axg, ayg, axe, axc1, ayc1, tet1, mq, krug, linii, α, aye, omeg1,
    eps1, omeg2, eps2, omeg3, eps3, omeg4, omeg5, omeg6, eps4, eps5, eps6, ax1b, ay1b, sin1,
    cos1, sin2, cos2, xd, yd, lBD, xc, yc, xg, yg, xa, ya, ye, xe, tet31, tet41, An51, An511, Uxe,
    U2xe, dxe, gam1, gam2, gam3, gam4, gam5, gam6, g, e1, e2, e3, e4, e5, e6, oi1, oi2, oi3,
    oi4, oi5, ax1a, ay1a, ax1d, ay1d, ax1g, ay1g, ax1e, ay1e, ax1c, ay1c, q1, a1q, b1q, x, s1, s2,
    s3, s4, s5, s6, xa1, ya1, A1, lAA1, xb1, yb1, B1, lBB1, lA1B1, mq2, xb2, yb2, B2, xc2, yc2,
    C2, a2q, b2q, q2, lBB2, lCC2, lB2C2,  mq3, a3q, b3q, q3, xd3, yd3, mq4, mq5, mq6, q6, a4q,
    b4q, q4, a5q, b5q, q5, a6q, b6q, D3, xc3, yc3, C3, lCC3, lDD3, lD3C3, mn, a1n, b1n, n1,
    xan0, yan0, lAAN0, xbn1, ybn1, BN1, lBBN1, lAN0BN1, a2n, b2n, n2, xbn0, ybn0,
    lBBN0, xcn1, ycn1, CN1, lCCN1, lBN0CN1, mn3, a3n, b3n, n3, xdn0, ydn0, DN0, lDDN0,
    xcn3, ycn3, CN3, lCCN3, lDN0CN3, mn2, a4n, b4n, a5n, b5n, a6n, b6n, n4, n5, n6, mn4,
    mn5, mn6, tetCB, tetEG, tetBA, tetGD, tetGC, sysmn, ZMN, ZMNP, M1, masM1, M2,
    masM2, M3, masM3, M4, masM4, M5, masM5, M6, masM6, U1, masU1, ux1l, uy1l, ux20,
    uy20, ZXY, ZXYP, sys1, tet10, tet20, tet30, tetDG, ux60, uy60, Q50, U5,
ux2l, ux3l, uy2l, uy3l, Q20, Q30, U2, masU2, U3, masU3, tet11, tet21, tet51, tet61, tet6, U2l, U3l,
    U44l, U4, ux4l, uy4l, ux6l, uy6l, Q40, Q60, U6, U6l, masU4, masU6, oi6, ux5l, uy5l, ux50,
    uy50, ux70, masU5, U5l;
unassign('ZMN','ZMP','M11','M12','M13','M22','M23','M32','M33','M42','M43','M52','M53','M62',
    'M63','N11','N12','N13','N21','N22','N23','N31','N32','N33','N41','N42','N43','N51','N52','N53',
    'N61','N62','N63');

#масштабы изгибающего момента при omeg1=1
#masM1:=0.0002;masM2:=0.05;masM3:=0.170;masM4:=0.05;masM5:=0.03;
    masM6:=0.055;
#масштабы изгибающего момента при omeg1=100
masM1 := 0.0001; masM2 := 0.0030; masM3 := 0.0050; masM4 := 0.00052; masM5
    := 0.0010; masM6 := 0.001;
masU1 := 0.03; masU2 := 0.015; masU3 := 0.015; masU4 := 0.015; masU6 := 0.015; masU5
    := 0.015;
eps1, ax1a, ay1a, ax1d, ay1d := 0.0, 0.0, 0.0, 0.0, 0.0 :

#площади сечении звеньев в M^2
s1, s2, s3, s4, s5, s6 := 0.000931079890, 0.0003191111728, 0.0002616460621,
    0.0001828872720, 0.0001540504345, 0.0002125793639 :

mq := 9500.0 : mq2 := 50.0 : mq3 := 50.0 : mq4 := 50.0 : mq5 := 50.0 : mq6 := 50.0 :
#удельный вес H/M^3
gam1, gam2, gam3, gam4, gam5, gam6, g := 78·10^3, 78·10^3, 78·10^3, 78·10^3, 78·10^3, 78·10^3,
    9.8;
# модуль упругости H/M^2
e1, e2, e3, e4, e5, e6 := 2·10^11, 2·10^11, 2·10^11, 2·10^11, 2·10^11, 2·10^11;
```

#осевые моменты инерции M^4

$oi1, oi2, oi3, oi4, oi5, oi6 := 7.68129226\cdot10^{-7}, 9.02286413\cdot10^{-8}, 6.065809998\cdot10^{-8}, 2.963653055\cdot10^{-8}, 2.102743271\cdot10^{-8}, 4.004078689\cdot10^{-8}$:

$h\varphi1 := evalf(5\cdot\pi/n)$:

#угловая скорость $\left(\frac{1}{сек}\right)$

#omeg1,eps1:=1.0,0.0:

$omeg1, eps1 := 100.0, 0.0$:

внешняя сила P Ньютон

#линейные размеры звеньев заданы в метрах

AB := 0.095·3 : BC := 0.385·3 : CD := 0.30·3 : DG := 0.45·3 : GD := 0.45·3 : P := 10·10^3 : GE := 0.40·3 : α := evalf(Pi/6) :

xd := 0.25·3 : yd := 0.50·3 :

ye := 0.20·3 : $n := 36$: $h\varphi1 := evalf(5\cdot\pi/n)$:

$A := [0, 0]$: $OD := [xd, yd]$: $xa := 0.0$: $ya := 0.0$:

$xb := AB\cdot\cos(h\varphi1\cdot i)$: $yb := AB\cdot\sin(h\varphi1\cdot i)$: $B := [xb, yb]$: $tet1 := h\varphi1\cdot i$:

$BD := \sqrt{(xb-xd)^2 + (yb-yd)^2}$:

$sin1 := \frac{(yb-yd)}{BD}$: $cos1 := \frac{(xb-xd)}{BD}$:

$cos2 := \frac{(CD^2 + BD^2 - BC^2)}{(2\cdot CD\cdot BD)}$:

$sin2 := \sqrt{1 - cos2^2}$:

$xc := xd + CD\cdot(cos1\cdot cos2 - sin1\cdot sin2)$:

$yc := yd + CD\cdot(sin1\cdot cos2 + cos1\cdot sin2)$:

$C := [xc, yc]$:

$tet2 := atan((yc-yb), (xc-xb))$:

$tet3 := atan((yc-yd), (xc-xd))$:

$xg := xd + DG\cdot\cos(tet3 + \alpha)$:

$yg := yd + DG\cdot\sin(tet3 + \alpha)$:

$GH := yg - ye$:

$tet4 := \arccos\left(\frac{GH}{GE}\right)$:

$xe := xg + GE\cdot\sin(tet4)$:

$E := [xe, ye]$:

$G := [xg, yg]$:

$E1 := [0.7\cdot3, ye]$:

$E2 := [1.2\cdot3, ye]$:

$cG := Fcircle(G, r)$: $cA := Fcircle(A, r)$: $cB := Fcircle(B, r)$: $cC := Fcircle(C, r)$: $cD := Fcircle(OD, r)$: $cE := Fcircle(E, r)$:

$$lAB := line(A, B, thickness = 3) : lBC := line(B, C, thickness = 3) : lCD := line(C, OD, thickness = 3) : lCG := line(C, G, thickness = 3) : lDG := line(OD, G, thickness = 3) : lGE := line(E, G, thickness = 3) :$$

$$pl := RectRφ(E, 0, r, B1, B2, yellow);$$

$$E1B2 := LineR(E1, B1, 0) : \ E2B1 := LineR(E2, B2, 0) :$$

$$krug := cG, cA, cB, cD, cC, cE :$$

$$linii := lAB, lBC, lCD, lCG, lDG, lGE :$$

$$CG := \mathrm{sqrt}\left((xg - xc)^2 + (yg - yc)^2\right) :$$

$$AN := Matrix([[-BC \cdot \sin(tet2), CD \cdot \sin(tet3)], [BC \cdot \cos(tet2), -CD \cdot \cos(tet3)]]) :$$

$$BN := Vector([AB \cdot \sin(hφ1 \cdot i), AB \cdot \cos(hφ1 \cdot i)]) :$$

$$AN1 := \frac{1}{AN} : ZN := AN1.BN :$$

$$b11 := ZN[1] : \ b12 := ZN[2] :$$

#Аналоги угловых ускорений

$$BNY := Vector\left[AB \cdot \cos(hφ1 \cdot i) + BC \cdot \cos(tet2) \cdot b11^2 - CD \cdot \cos(tet3) \cdot b12^2, AB \cdot \sin(hφ1 \cdot i) + BC \cdot \sin(tet2) \cdot b11^2 - CD \cdot \sin(tet3) \cdot b12^2\right] :$$

$$ZNY := AN1.BNY : \ b21 := ZNY[1] : b22 := ZNY[2] :$$

$$tetEG := atan((yg - ye), (xg - xe)) :$$

$$tet5 := tetEG :$$

$$tet51 := atan((ye - yg), (xe - xg)) :$$

$$An51 := -\frac{DG \cdot \cos(tet3 + \alpha) \cdot b12}{GE \cdot \cos(tet51)} :$$

$$Uxe := -DG \cdot \sin(tet3 + \alpha) \cdot b12 - GE \cdot \sin(tet51) \cdot An51 :$$

$$An511 := \frac{\left(DG \cdot \sin(tet3 + \alpha) \cdot b12^2 - DG \cdot \cos(tet3 + \alpha) \cdot b22 + GE \cdot \sin(tet51) \cdot An51^2\right)}{GE \cdot \cos(tet51)} :$$

$$U2xe := -DG \cdot \cos(tet3 + \alpha) \cdot b12^2 - DG \cdot \sin(tet3 + \alpha) \cdot b22 - GE \cdot \cos(tet51) \cdot An51^2 - GE \cdot \sin(tet51) \cdot An511 :$$

#Линейные ускорения точек звеньев

$$axb := -AB \cdot \cos(hφ1 \cdot i) \cdot omeg1^2 - AB \cdot \sin(hφ1 \cdot i) \cdot eps1 :$$

$$ayb := -AB \cdot omeg1^2 \cdot \sin(hφ1 \cdot i) + AB \cdot eps1 \cdot \cos(hφ1 \cdot i) :$$

$$axc := -CD \cdot \cos(tet3) \cdot b12^2 \cdot omeg1^2 - CD \cdot \sin(tet3) \cdot b22 \cdot omeg1^2 - CD \cdot \sin(tet3) \cdot b12 \cdot eps1 :$$

$$ayc := -CD \cdot \sin(tet3) \cdot b12^2 \cdot omeg1^2 + CD \cdot \cos(tet3) \cdot b22 \cdot omeg1^2 + CD \cdot \cos(tet3) \cdot b12 \cdot eps1 :$$

#Интенсивности поперечных нагрузок вдоль звеньев

$$omeg2 := b11 \cdot omeg1 : eps2 := b21 \cdot omeg1^2 + b11 \cdot eps1 :$$

$$a1q := -gam1 \cdot s1 \cdot \cos(tet1) - \frac{gam1 \cdot s1 \cdot ay1a}{g} :$$

$$b1q := -\frac{gam1 \cdot s1 \cdot eps1}{g} :$$

$$q1 := x \rightarrow mq \cdot (a1q + b1q \cdot x) :$$

$$ax1b := axb \cdot \cos(tet2) + ayb \cdot \sin(tet2) :$$

$$ay1b := -axb \cdot \sin(tet2) + ayb \cdot \cos(tet2) :$$

$$a2q := -gam2 \cdot s2 \cdot \cos(tet2) - \frac{gam2 \cdot s2 \cdot ay1b}{g} :$$

$$b2q := -\frac{gam2 \cdot s2 \cdot eps2}{g} :$$

$$q2 := x \rightarrow mq2 \cdot (a2q + b2q \cdot x) :$$

$$omeg3 := b12 \cdot omeg1 : eps3 := b22 \cdot omeg1^2 + b12 \cdot eps1 :$$

$$a3q := -gam3 \cdot s3 \cdot \cos(tet3) - \frac{gam3 \cdot s3 \cdot ay1d}{g} :$$

$$b3q := -\frac{gam3 \cdot s3 \cdot eps3}{g} :$$

$$q3 := x \rightarrow mq3 \cdot (a3q + b3q \cdot x) :$$

$$axg := -b12^2 \cdot omeg1^2 \cdot DG \cdot \cos(tet3 + \alpha) - DG \cdot b22 \cdot omeg1^2 \cdot \sin(tet3 + \alpha) - DG \cdot b12 \cdot eps1 \cdot \sin(tet3 + \alpha) :$$

$$ayg := -DG \cdot b12^2 \cdot omeg1^2 \cdot \sin(tet3 + \alpha) + DG \cdot b22 \cdot omeg1^2 \cos(tet3 + \alpha) + DG \cdot b12 \cdot eps1 \cdot \cos(tet3 + \alpha) :$$

$$ax1g := axg \cdot \cos(tet3 + \alpha) + ayg \cdot \sin(tet3 + \alpha) :$$

$$ay1g := -axg \cdot \sin(tet3 + \alpha) + ayg \cdot \cos(tet3 + \alpha) :$$

$$a4q := -gam4 \cdot s4 \cdot \cos(tet3 + \alpha) - \frac{gam4 \cdot s4 \cdot ay1d}{g} :$$

$$b4q := -\frac{gam4 \cdot s4 \cdot eps3}{g} :$$

$$q4 := x \rightarrow mq4 \cdot (a4q + b4q \cdot x) :$$

$$omeg5 := An51 \cdot omeg1 : eps5 := An511 \cdot omeg1^2 + An51 \cdot eps1 :$$

#Линейная скорость точки E

$$dxe := -DG \cdot \sin(tet3 + \alpha) \cdot b12 \cdot omeg1 - GE \cdot \sin(tet51) \cdot An51 \cdot omeg1 :$$

#Линейное ускорение точки E

$$axe := U2xe \cdot omeg1^2 + Uxe \cdot eps1 :$$

#проверка

$$\#axe := -DG \cdot cos(tet3 + \alpha) \cdot b12^2 \cdot omeg1^2 - DG \cdot \sin(tet3 + \alpha) \cdot b22 \cdot omeg1^2 - DG \cdot \sin(tet3 + \alpha) \cdot b12 \cdot An511 - GE \cdot \cos(tet51) \cdot An51^2 \cdot omeg1^2 - GE \cdot \sin(tet51) \cdot An511 \cdot omeg1^2 - GE \cdot \sin(tet51) \cdot An51 \cdot eps1 :$$

$$ax1e := axe \cdot \cos(tet5) :$$

$$ay1e := -axe \cdot \sin(tet5) :$$

$$a5q := -gam5 \cdot s5 \cdot \cos(tet5) - \frac{gam5 \cdot s5 \cdot ay1e}{g} :$$

$$b5q := -\frac{gam5 \cdot s5 \cdot eps5}{g} :$$

$$q5 := x \rightarrow mq5 \cdot (a5q + b5q) :$$

$$omeg6 := b12 \cdot omeg1 : eps6 := b22 \cdot omeg1^2 + b12 \cdot eps1 :$$

$$ax1c := axc \cdot \cos(tet3) + ayc \cdot \sin(tet3) :$$

$$ay1c := -axc \cdot \sin(tet3) + ayc \cdot \cos(tet3) :$$

$$a6q := -gam6 \cdot s6 \cdot \cos(tet6) - \frac{gam6 \cdot s6 \cdot ay1c}{g} :$$

$$b6q := -\frac{gam6 \cdot s6 \cdot eps6}{g} :$$

$$q6 := x \rightarrow mq6 \cdot (a6q + b6q \cdot x) :$$

#Интенсивности продольных нагрузок вдоль звеньев

$$a1n := -gam1 \cdot s1 \cdot \sin(tet1) - \frac{gam1 \cdot s1 \cdot ax1a}{g}; \#print(gam1, s1, tet1, g);$$

$$b1n := \frac{gam1 \cdot s1 \cdot omeg1^2}{g};$$

$$n1 := x \rightarrow mn \cdot (a1n + b1n \cdot x) :$$

$$a2n := -gam2 \cdot s2 \cdot \sin(tet2) - \frac{gam2 \cdot s2 \cdot ax1b}{g}; \#print(gam1, s1, tet1, g);$$

$$b2n := \frac{gam2 \cdot s2 \cdot omeg2^2}{g};$$

$$n2 := x \rightarrow mn2 \cdot (a2n + b2n \cdot x) :$$

$$a3n := -gam3 \cdot s3 \cdot \sin(tet3) - \frac{gam3 \cdot s3 \cdot ax1d}{g}; \#print(gam1, s1, tet1, g);$$

$$b3n := \frac{gam3 \cdot s3 \cdot omeg3^2}{g};$$

$$n3 := x \rightarrow mn3 \cdot (a3n + b3n \cdot x) :$$

$$\#omeg4 := b12 \cdot omeg1 : eps4 := b22 \cdot omeg1^2 + b12 \cdot eps1 :$$

$$a4n := -gam4 \cdot s4 \cdot \sin(tet3 + \alpha) - \frac{gam4 \cdot s4 \cdot ax1d}{g} :$$

$$b4n := \frac{gam4 \cdot s4 \cdot omeg3^2}{g};$$

$$n4 := x \rightarrow mn4 \cdot (a4n + b4n \cdot x) :$$

$$omeg5 := An51 \cdot omeg1 : eps5 := An511 \cdot omeg1^2 + An51 \cdot eps1 :$$

$$a5n := -gam5 \cdot s5 \cdot \sin(tet5) - \frac{gam5 \cdot s5 \cdot ax1e}{g} :$$

$$b5n := \frac{gam5 \cdot s5 \cdot omeg5^2}{g};$$

$$n5 := x \rightarrow mn5 \cdot (a5n + b5n \cdot x) :$$

$$omeg6 := b12 \cdot omeg1 : eps6 := b22 \cdot omeg1^2 + b12 \cdot eps1 :$$

$$a6n := -gam6 \cdot s6 \cdot \sin(tet6) - \frac{gam6 \cdot s6 \cdot ax1c}{g} :$$

$$b6n := \frac{gam6 \cdot s6 \cdot omeg6^2}{g};$$

$$n6 := x \rightarrow mn6 \cdot (a6n + b6n \cdot x) :$$

$$tet31 := atan((yd - yc), (xd - xc)) :$$

$$tetCB := atan((yb - yc), (xb - xc)) :$$

$$tet21 := tetCB :$$

$$tetBA := atan((ya - yb), (xa - xb)) :$$

$$tet11 := tetBA;$$

$$tetGD := atan((yd - yg), (xd - xg)) :$$

$$tet41 := tetGD :$$

$$tetGC := atan((yc - yg), (xc - xg)) :$$

$$tet61 := tetGC :$$

$$tet10 := atan((ya - yb), (xa - xb)); tet20 := atan((yb - yc), (xb - xc)); tet30 := atan((yd - yc), (xd - xc));$$

$$tet11 := tet10;$$

$$tet6 := atan((yg - yc), (xg - xc));$$

$$tetDG := atan((yg - yd), (xg - xd));$$

$$sysmn := -\frac{27.0}{AB^3} \cdot M11 + \frac{81.0}{AB^3} \cdot M12 - \frac{81.0}{AB^3} \cdot M13 = b1q, -\frac{9.0}{2.0} \cdot M11 + 9.0 \cdot M12 - \frac{9.0}{2.0} \cdot M13 = evalf\left(-\frac{a1q \cdot AB^2}{2.0} - \frac{b1q \cdot AB^3}{6.0}\right), \frac{4.0}{AB^2} \cdot N11 - \frac{8.0}{AB^2} \cdot N12 + \frac{4.0}{AB^2} \cdot N13 = -b1n, -N11 + N13 = evalf\left(-a1n \cdot AB - \frac{b1n \cdot AB^2}{2.0}\right), \frac{81.0}{BC^3} \cdot M22 - \frac{81.0}{BC^3} \cdot M23 = b2q, 9.0 \cdot M22 - \frac{9.0}{2.0} \cdot M23 = evalf\left(-\frac{a2q \cdot BC^2}{2.0} - \frac{b2q \cdot BC^3}{6.0}\right), \frac{4.0}{BC^2} \cdot N21 - \frac{8.0}{BC^2} \cdot N22 + \frac{4.0}{BC^2} \cdot N23 = -b2n, -N21 + N23 = evalf\left(-a2n \cdot BC - \frac{b2n \cdot BC^2}{2.0}\right), \frac{81.0}{CD^3} \cdot M32 - \frac{81.0}{CD^3} \cdot M33 = b3q, 9.0 \cdot M32 - \frac{9.0}{2.0} \cdot M33 = evalf\left(-\frac{a3q \cdot CD^2}{2.0} - \frac{b3q \cdot CD^3}{6.0}\right), \frac{4.0}{CD^2} \cdot N31 - \frac{8.0}{CD^2} \cdot N32 + \frac{4.0}{CD^2} \cdot N33 = -b3n, -N31 + N33 = evalf\left(-a3n \cdot CD - \frac{b3n \cdot CD^2}{2.0}\right), \frac{81.0}{DG^3} \cdot M42 - \frac{81.0}{DG^3} \cdot M43 = b4q, 9.0 \cdot M42 - \frac{9.0}{2.0} \cdot M43 = evalf\left(-\frac{a4q \cdot DG^2}{2.0} - \frac{b4q \cdot DG^3}{6.0}\right),$$

$$ZMN := M11, M12, M13, M22, M23, M32, M33, M42, M43, M52, M53, M62, M63, N11, N12, N13, N21, N22, N23, N31, N32, N33, N41, N42, N43, N51, N52, N53, N61, N62, N63;$$
$$ZMNP := solve(\{sysmn\}, [ZMN]); assign(ZMNP); \#print(M22, M23, M52, M53);$$

$$\frac{4.0}{DG^2}\cdot N41 - \frac{8.0}{DG^2}\cdot N42 + \frac{4.0}{DG^2}\cdot N43 = -b4n, -N41 + N43 = evalf\left(-a4n\cdot DG - \frac{b4n\cdot DG^2}{2.0}\right), \frac{81.0}{GE^3}\cdot M52 - \frac{81.0}{GE^3}\cdot M53 = b5q, 9.0\cdot M52 - \frac{9.0}{2.0}\cdot M53 = evalf\left(-\frac{a5q\cdot GE^2}{2.0} - \frac{b5q\cdot GE^3}{6.0}\right), \frac{4.0}{GE^2}\cdot N51 - \frac{8.0}{GE^2}\cdot N52 + \frac{4.0}{GE^2}\cdot N53 = -b5n, -N51 + N53 = evalf\left(-a5n\cdot GE - \frac{b5n\cdot GE^2}{2.0}\right), \frac{81.0}{CG^3}\cdot M62 - \frac{81.0}{CG^3}\cdot M63 = b6q, 9.0\cdot M62 - \frac{9.0}{2.0}\cdot M6$$
$$= evalf\left(-\frac{a6q\cdot CG^2}{2.0} - \frac{b6q\cdot CG^3}{6.0}\right), \frac{4.0}{CG^2}\cdot N61 - \frac{8.0}{CG^2}\cdot N62 + \frac{4.0}{CG^2}\cdot N63 = -b6n, -N61 + N63 = evalf\left(-a6n\cdot CG - \frac{b6n\cdot CG^2}{2.0}\right),$$

$$N23\cos(tet21) + \frac{9}{2}\frac{\sin(tet21)\,M22}{BC} - \frac{9\sin(tet21)\,M23}{BC} + N61\cos(tet6) + \frac{9\sin(tet6)\,M62}{CG} - \frac{9}{2}\frac{\sin(tet6)\,M63}{CG} + N33\cos(tet31) + \frac{9}{2}\frac{\sin(tet31)\,M32}{BC} - \frac{9\sin(tet31)\,M33}{BC} = 0,$$

$$N23\sin(tet21) - \frac{9}{2}\frac{\cos(tet21)\,M22}{BC} + \frac{9\cos(tet21)\,M23}{BC} + N61\sin(tet6) - \frac{9\cos(tet6)\,M62}{CG} + \frac{9}{2}\frac{\cos(tet6)\,M63}{CG} + N33\sin(tet31) - \frac{9}{2}\frac{\cos(tet31)\,M32}{BC} + \frac{9\cos(tet31)\,M33}{BC} = 0,$$

$$N13\cos(tet11) - \frac{\sin(tet11)\,M11}{AB} + \frac{9}{2}\frac{\sin(tet11)\,M12}{AB} - \frac{9\sin(tet11)\,M13}{AB} + N21\cos(tet2) + \frac{9\sin(tet2)\,M22}{BC} - \frac{9}{2}\frac{\sin(tet2)\,M23}{BC} = 0,$$

$$N13\sin(tet11) + \frac{\cos(tet11)\,M11}{AB} - \frac{9}{2}\frac{\cos(tet11)\,M12}{AB} + \frac{9\cos(tet11)\,M13}{AB} + N21\sin(tet2) - \frac{9\cos(tet2)\,M22}{BC} + \frac{9}{2}\frac{\cos(tet2)\,M23}{BC} = 0,$$

$$N63\cos(tet61) + \frac{9}{2}\frac{\sin(tet61)\,M62}{CG} - \frac{9\sin(tet61)\,M63}{CG} + N53\cos(tet51) + \frac{9}{2}\frac{\sin(tet51)\,M52}{GE} - \frac{9\sin(tet51)\,M53}{GE} + N43\cos(tet41) + \frac{9}{2}\frac{\sin(tet41)\,M42}{DG} - \frac{9\sin(tet41)\,M43}{DG} = 0,$$

$$N63\sin(tet61) - \frac{9}{2}\frac{\cos(tet61)\,M62}{CG} + \frac{9\cos(tet61)\,M63}{CG} + N53\sin(tet51) - \frac{9}{2}\frac{\cos(tet51)\,M52}{GE} + \frac{9\cos(tet51)\,M53}{GE} + N43\sin(tet41) - \frac{9}{2}\frac{\cos(tet41)\,M42}{DG} + \frac{9\cos(tet41)\,M43}{DG} = 0,$$

$$-P + N51\cdot evalf(\cos(tetEG)) + evalf\left(\frac{9.0}{GE}\cdot\sin(tetEG)\right)\cdot M52 - evalf\left(\frac{9.0}{(2.0\cdot GE)}\cdot\sin(tetEG)\right)\cdot M53 = 0.0:$$

$$M1 := x \to masM1 \cdot \left(\left(1 - \frac{11}{(2.0 \cdot AB)} \cdot x + \frac{9}{AB^2} \cdot x^2 - \frac{9}{(2 \cdot AB^3)} \cdot x^3 \right) \cdot M11 + \left(\frac{9}{AB} \cdot x - \frac{45}{(2.0 \cdot AB^2)} \cdot x^2 + \frac{27}{(2 \cdot AB^3)} \cdot x^3 \right) \cdot M12 + \left(-\frac{9}{(2.0 \cdot AB)} \cdot x + \frac{18}{AB^2} \cdot x^2 - \frac{27}{(2 \cdot AB^3)} \cdot x^3 \right) \cdot M13 \right);$$

$$M2 := x \to masM2 \cdot \left(\left(\frac{9}{BC} \cdot x - \frac{45}{(2.0 \cdot BC^2)} \cdot x^2 + \frac{27}{(2 \cdot BC^3)} \cdot x^3 \right) \cdot M22 + \left(-\frac{9}{(2.0 \cdot BC)} \cdot x + \frac{18}{BC^2} \cdot x^2 - \frac{27}{(2 \cdot BC^3)} \cdot x^3 \right) \cdot M23 \right);$$

$$M3 := x \to masM3 \cdot \left(\left(\frac{9}{CD} \cdot x - \frac{45}{(2.0 \cdot CD^2)} \cdot x^2 + \frac{27}{(2 \cdot CD^3)} \cdot x^3 \right) \cdot M32 + \left(-\frac{9}{(2.0 \cdot CD)} \cdot x + \frac{18}{CD^2} \cdot x^2 - \frac{27}{(2 \cdot CD^3)} \cdot x^3 \right) \cdot M33 \right);$$

$$M4 := x \to masM4 \cdot \left(\left(\frac{9}{DG} \cdot x - \frac{45}{(2.0 \cdot DG^2)} \cdot x^2 + \frac{27}{(2 \cdot DG^3)} \cdot x^3 \right) \cdot M42 + \left(-\frac{9}{(2.0 \cdot DG)} \cdot x + \frac{18}{DG^2} \cdot x^2 - \frac{27}{(2 \cdot DG^3)} \cdot x^3 \right) \cdot M43 \right);$$

$$M5 := x \to masM5 \cdot \left(\left(\frac{9}{GE} \cdot x - \frac{45}{(2.0 \cdot GE^2)} \cdot x^2 + \frac{27}{(2 \cdot GE^3)} \cdot x^3 \right) \cdot M52 + \left(-\frac{9}{(2.0 \cdot GE)} \cdot x + \frac{18}{GE^2} \cdot x^2 - \frac{27}{(2 \cdot GE^3)} \cdot x^3 \right) \cdot M53 \right);$$

$$M6 := x \to masM6 \cdot \left(\left(\frac{9}{CG} \cdot x - \frac{45}{(2.0 \cdot CG^2)} \cdot x^2 + \frac{27}{(2 \cdot CG^3)} \cdot x^3 \right) \cdot M42 + \left(-\frac{9}{(2.0 \cdot CG)} \cdot x + \frac{18}{CG^2} \cdot x^2 - \frac{27}{(2 \cdot CG^3)} \cdot x^3 \right) \cdot M43 \right);$$

```
#print(masM1, M11, M12, M13, AB);
display(krug, linii, Mris1(1), Mris2(1), Mris3(1), Mris4(1), Mris5(1), Mris6(1), pl, E1B2,
    E2B1, Stoica(A, r), Stoica(OD, r), thickness = 3);
end:
```

```
display([seq(manipulq(i), i = 0..36)], insequence = true, scaling = constrained);
```

