Казахский Национальный Университет имени аль-Фараби

УДК: 517.923

На правах рукописей

КОНЫРКУЛЖАЕВА МАРАЛ НУРЛАНОВНА

Вычетные и спектральные разложения дифференциальных операторов второго порядка на графах

6Д060100

Диссертация на соискание степени
доктора философии (PhD), доктора по профилю

Научные консультанты:

Кангужин Балтабек Есматович

Доктор физико-математических наук, профессор

Борисов Денис Иванович

Доктор физико-математических наук, профессор

Республика Казахстан

Алматы, 2019

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ..... 4

1 САМОСОПРЯЖЕННЫЕ СУЖЕНИЯ МАКСИМАЛЬНОГО ОПЕРАТОРА НА ГРАФЕ 8

1.1 Основные понятия и определения..... 8
1.2 Определение максимального оператора на графе 9
1.3 Формула Лагранжа для дифференциального оператора определенного на графе 11
1.4 Самосопряженные сужения максимального оператора..... 16
1.5 Основные понятия, связанные с граф–деревом 21
1.6 Определение максимального оператора на граф–дереве..... 22
1.7 Формула Лагранжа для дифференциальных операторов на граф–дереве 24
1.8 Самосопряженные сужение максимального оператора на граф–звезде 30
1.9 Корректные сужения максимального оператора $\Lambda_{\max}$ на граф–звезде 36
1.10 Функция Грина для фиксированного корректного сужения 36
1.11 Описания корректных сужений..... 39

2 ФУНКЦИЯ ГРИНА ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО ОПЕРАТОРА НА ГРАФЕ..... 42

2.1 Основные понятия, связанные с граф–звездой 42
2.2 Определение дифференциального оператора на граф–звезде при m дугах. 42
2.3 Построение функции Грина задачи Дирихле на отрезке 44
2.4 Функция Грина задачи Дирихле на граф–звезде с m дугами с нулевыми потенциалами..... 46
2.5 Функция Грина задачи Дирихле на граф–звезде с m дугами с произвольными потенциалами 53
2.6 О методе вычетного разложения функции Грина 58
2.7 Спектральные свойства оператора Λ_0 61
2.8 Вычетное разложение в ряд Фурье функции Грина задачи Дирихле..... 62
2.9 Спектральное разложение в ряд Фурье функции Грина задачи Дирихле..... 69
2.10 Представление резольвенты дифференциального оператора геометричеком графе 74
2.11 Резольвента корректного сужения дифференциального оператора на графе с гладкой областью определения..... 78

3 ПРОСТЕЙШИЕ ГРАФЫ С МАЛЫМИ ДУГАМИ..... 81

3.1 Возмущение края непрерывного спектра простейшего графа с малой дугой. 81
3.2 Асимтотика резольвенты оператора H_ε^D 95
3.3 Асимтотика резольвенты оператора H_ε^R 98
3.4 Собственные значения оператора H_ε^D 104

3.5 Собственные значения оператора H_ε^R 109
3.6 Асимптотика резольвент и голоморфная зависимость спектра 115
3.7 Доказательство теоремы 3.6.1 124
3.8 Доказательство теоремы 3.6.2 127
3.9 Доказательство теоремы 3.6.3 129
3.10 Доказательство теоремы 3.6.4 133
ЗАКЛЮЧЕНИЕ 139
СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ 140

ВВЕДЕНИЕ

С математической точки зрения графы интересны тем, что они являются хорошей моделью для изучения свойств систем в зависимости от геометрии и топологии пространства. Графы составлены из нульмерных и одномерных многообразий и в этом смысле представляется интересным как смешанная размерность влияет на те или иные свойства математических объектов, определенных на графах.

С практической стороны, прежде всего при расчете упругих конструкций, необходимо исследование задач о сочленении сингулярно вырождающихся областей. При этом конструкция может состоять из областей разных размерностей. Требуется асимптотический анализ решений краевых задач в областях, зависящих от достаточно малых габаритов областей и стягивающихся к предельному «скелету», представимому в виде объединения множеств различных размерностей. Часто такие объекты называют стратифицированными множествами.

Систематическое изучение эллиптических операторов на стратифицированных множествах можно найти в работах О.М.Пенкина и его соавторов [1-7]. Работа [8] – одна из ранних математических работ по исследованию задачи рассеяния на некомпактных графах. Качественные свойства дифференциальных уравнений на геометрических графах изучены в монографии [14]. Возможность восстановления дифференциальных операторов на графах по функциям Вейля, по системе спектров исследована в работе [9]. В работе [10] дано описание самосопряженных краевых задач для дифференциальных уравнений высших порядков на графах.

Заметим, что на графах изучались не только дифференциальные операторы. В монографии [14] на графах введены специальные дискретные лапласианы и приведен их спектральный анализ в графо подобных пространствах.

Таким образом, на графах как стратифицированных множествах исследованы различные проблемы. Однако круг нерешенных проблем, возникающих по аналогии с проблемами для дифференциальных операторов на стандартных областях (отрезках, прямоугольниках, многомерных отрезках) далеко не исчерпан и он требует индивидуального исследования.

В предлагаемой диссертационной работе предлагается рассматривать дифференциальный оператор на графе как оператор, составленный из дифференциальных операторов на одномерных дугах и матричных операторов на нульмерных внутренних вершинах графа. Таким образом, дифференциальный оператор на графе представляет собой гибрид дифференциальных и скалярных матричных операторов. Изучение подобных операторов с точки зрения спектрального анализа представляет актуальную проблему.

В связи с тем, что дифференциальные операторы на графах не являются «чисто» дифференциальными, а представляют собой «гибридные» операторы, поэтому в диссертации ставится **цель:** математический аппарат, который

создан для исследования спектральных свойств чисто дифференциальных операторов, перенести на «гибридные» операторы. Таким образом, **объект исследования** - дифференциальные операторы на графах, как операторы составленные из скалярных матричных и дифференциальных операторов. Для достижения поставленной цели в диссертации исследуются следующие задачи:

- корректно определить максимальный оператор,

- вывести формулу Лагранжа для максимального оператора,

- построить сопряженного оператора,

- описать всевозможные самосопряженные сужения максимального оператора,

- описать корректные сужения максимального оператора и вывод формулы их резольвент,

- найти зависимость резольвент от длин дуг графа и исследовать равномерную резольвентную сходимость к предельному оператору,

- указать спектральные эффекты предельного оператора.

Положения, выносимые на защиту: дано полное описание всевозможных самосопряженных сужений максимального оператора, выписаны корректные сужения максимального оператора и найдены формулы их резольвент, установлена зависимость резольвент от длин дуг графа и исследована равномерная резольвентная сходимость к предельному оператору, приведены спектральные эффекты предельного оператора.

Методы исследования. В диссертации используются хорошо апробированые методы классической теории обыкновенных дифференциальных уравнений, линейных дифференциальных операторов, методы функционального анализа, аппарат спектральной теории неограниченных операторов, методы теории функций комплексного переменного, а также методы теории ОДУ на графах.

Научная новизна исследования. Впервые установлена зависимость резольвент от длин дуг графа и показана равномерная резольвентная сходимость к предельному оператору. Указаны существенные спектральные эффекты предельного оператора, на которые до сих пор не обращали должного внимания.

Обоснованность и достоверность. Обоснованность и достоверность научных выводов, полученных в диссертации, подтверждаются их последовательным теоретическим и математическим обоснованием, а также экспериментальными данными, сопоставленными с имеющимися в открытых источниках технологическими и производственными данными.

Теоретическая и практическая значимость исследования. Работа носит теоретический характер. Результаты работы могут найти применение в

дальнейшем в развитии спектральной теории краевых задач на графах и в исследовании задач, возникающих в теории упругости, теории устойчивости и др.

Достоверность и обоснованность научных положений, выводов и результатов диссертации подтверждается публикациями полученных результатов в журналах, имеющих ненулевой импакт-фактор.

Оценка полноты выполнения целей исследования. Все полученные результаты являются новыми и базируются на собственных методах решения. Были установлены существование вычетного разложения всякой функций из области определения рассматриваемого дифференциального оператора на графе в ряд Фурье по собственным функциям задачи Дирихле.

Публикации. Результаты диссертации опубликованы 14 работах. Из них 3 статьи в рейтинговых журналах [56,57,58], 3 статьи в журналах, рекомендуемых ККСОН МОН РК [59,60,61], 8 тезисов в материалах международных конференций [54,55,62,63,64,65,66,67].

Структура и объём диссертации. Диссертация состоит из 144 страниц, которые включают в себя введение, три главы с разделами, заключение и список использованных источников.

Основное содержание диссертации. Введение диссертации содержит краткое описание современного состояния исследуемой темы диссертации, актуальность и обоснования необходимости исследования. В первой главе вначале вводятся известные понятия и утверждения, касающиеся дифференциальных операторов на произвольных связных геометрических графах без петель. Максимальный оператор на графе определяется дифференциальными выражениями на дугах, условиями Кирхгофа во внутренних вершинах графа. Для введенного максимального оператора доказан аналог формулы Лагранжа. Для произвольного набора граничных условий указан алгоритм построения сопряженных граничных форм. Также дано полное описание всех самосопряженных сужений максимального оператора.

Во второй главе исследуется система дифференциальных уравнений второго порядка, являющейся моделью колебательных систем со стержневой конструкцией. Выведена функция Грина задачи Дирихле для дифференциального оператора на звездообразном графе. При этом использованы стандартные условия Кирхгофа во внутренней вершине и краевые условия Дирихле в граничных вершинах.

В третьей главе рассматривается граф, состоящий из двух бесконечных дуг и одной дуги малой длины. На таком графе рассматривается оператор Шредингера с кусочно – постоянными потенциалами на бесконечных дугах и сингулярным потенциалом на малой дуге. Определены предельные краевые условия, в операторной норме получены двучленные асимптотики для резольвент рассматриваемых операторов и даны оценки остатков. Также изучается эффект возникновение изолированных собственных значений из края существенного спектра. Установлены эффективные, легко проверяемые достаточные условия существования и отсутствия таких собственных значений

и обнаружена голоморфная зависимость возникающих собственных значений из края существенного спектра. Также рассматривается звездный граф, состоящий из двух бесконечных дуг и одной дуги малой длины. Длина последней дуги считается малым параметром в задаче. Во нутренней вершине данного графа задается $\delta'-$взаимодействие, в граничной вершине малой дуги – условие Дирихле или условие Неймана. Получены предельные краевые условия, в операторной норме получены двучленные асимтотики для резольвент, даны оценки остатков. Изучается эффект возникновение изолированных собственных значений из края существенного спектра. Обнаружена голморфная зависимость возникающих собственных значений из края существенного спектра.

Автор выражает свою глубокую благодарность своим научным руководителям доктору физико – математических наук, профессору Кангужину Балтабеку Есматовичу (Казахский Национальный Университет имени аль – Фараби), и доктору физико – математических наук, профессору РАН, Борисову Денису Ивановичу (Институт математики с ВЦ УФИЦ РАН) за постановку интересных задач, полезные советы и всестороннюю поддержку.

Автор благодарит Правительство Казахстана и Казахский Национальный Университет имени аль-Фараби за поддержку и за возможность работать с зарубежным научным консультантом.

1 САМОСОПРЯЖЕННЫЕ СУЖЕНИЯ МАКСИМАЛЬНОГО ОПЕРАТОРА НА ГРАФЕ

В настоящем разделе вначале вводятся известные понятия и утверждения, касающиеся дифференциальных операторов на произвольных связных геометрических графах без петель. Максимальный оператор на графе определяется дифференциальными выражениями на дугах, условиями Кирхгофа во внутренних вершинах графа. Для введенного максимального оператора доказан аналог формулы Лагранжа. Для произвольного набора граничных условий указан алгоритм построения сопряженных граничных форм. Также дано полное описание всех самосопряженных сужений максимального оператора.

1.1 Основные понятия и определения

Геометрический граф – это одномерное стратифицированное многообразие, которое состоит из дуг и вершин. Дуга графа – это одномерное гладкое регулярное многообразие (кривая). Вершина графа – нульмерное многообразие, соединяющее две или более дуг графа [8]. Нужно считать, что дуги графа и вершины заданы независимо друг от друга, также задано отношение: какие концы каких дуг отождествляется с данной вершиной. В диссертации изучаются дифференциальные операторы на графах без петель и без кратных дуг. В дальнейшем предполагается, что граф – связный.

Граф стандартно обозначается через $\Im = \{V, E\}$ где V – множество вершин и E – множество дуг. Количество вершин графа V обозначим через N, а сами вершины будем нумеровать натуральными числами $1,...,N$. Граничные вершины обозначим через Γ. Их выбор произволен. Вершины из множества $I = V \setminus \Gamma$ назовем внутренними вершинами. Дуга $e = [i, j]$, $e \in E$, соединяющая вершины i и j. При этом i – означает начало дуги e, а вершина j – конец дуги e. Часто вершину i обозначают через $\partial_{-} e$, а вместо вершины j пишут $\partial_{+} e$. Дуга $e = [i, j]$, $e \in E$ имеет ориентацию от i к j. Длина каждой дуги равна единице. Множество вершин, соответствующие входящим дугам к вершине i, обозначим через V_i^{+}. А множество вершин, соответствующие исходящим дугам из вершины i, обозначим через V_i^{-}. Пусть $\chi = \sum_{i \in \Gamma} (\left|V_i^{+}\right| + \left|V_i^{-}\right|)$. Множество дуг, для которых $\partial_{+} e = i$, обозначим через E_i^{+}, а множество дуг, для которых $\partial_{-} e = i$, обозначим через E_i^{-}. Считаем, что граф не имеет петель.

Существуют два подхода при исследовании дифференциальных операторов на графах. Суть первого подхода [8] состоит в том, что каждая дуга определена на разных осях, а решения нумеруются в соответствии с какой-либо предварительной нумерацией дуг (оси). Второй подход [15] соответствует

представлению о расчленении графа в вершинах и «выкладыванию» ее дуг в одну линию. Каждая дуга параметризуется своим отрезком $[a_i, a_{i+1}]$ вещественной оси ($a_0 < a_1 < ... < a_r, r -$ число дуг). Так как различные классы графов требуют различной техники, мы ограничиваемся дифференциальными уравнениями второго порядка на графах, где описывается процесс на каждой дуге, т.е. первый подход.

Отметим, что материал данного пункта соответствует работе автора [56].

1.2 Определение максимального оператора на графе

В данном пункте вводится максимальный оператор на графе. Когда граф состоит только из одной дуги (отрезка), максимальный оператор на отрезке обычно задается с помощью дифференциального выражения без каких-либо граничных условий. Поэтому его называют дифференциальным оператором на отрезке. В случае геометрического графа максимальный оператор на одномерных многообразиях (дугах) задается с помощью дифференциальных выражений, а нульмерных многообразиях (вершинах) задается матричным выражением. Таким образом, максимальный оператор на графе представляет гибрид дифференциальных операторов на дугах и матричных операторов в вершинах. Специальным выбором максимального оператора данная работа отличается от ранее известных работ по дифференциальным операторам на графах [8,9,22].

В дальнейшем полезно ввести пространство [48]

$$L_2(\Im) = \prod_{e \in \varepsilon} L_2(e)$$

с элементами

$$\vec{Y}(\vec{X}) = [y_e(x_e), e \in E]^T$$

(где $\vec{X} = (x_e, e \in E)$ и $\prod_{e \in E}$ – декартово произведение подпространств) и с конечной нормой [48]

$$\left\| \vec{Y} \right\|_{L_2(\Im)} = \sqrt{\sum_{e \in E} \int_e |y_e(x_e)|^2 \, dx_e}.$$

Точно также стандартным образом вводится пространство [65]

$$W_2^2(\Im) = \prod_{e \in E} W_2^2(e).$$

Оператор $\Lambda_{\max}$, задаваемый линейными дифференциальными выражениями

$$\Lambda_{\max} y_e(x_e) = -y_e''(x_e) + q_e(x_e) y_e(x_e),\ x_e \in e \in E \quad \text{или} \quad 0 < x_e < 1 \tag{1.2.1}$$

на подмножестве $W_2^2(\Im)$, где в каждой внутренней вершине k при некотором β_k выполняются условия Кирхгофа [11]

$$\begin{aligned} y_e(1) &= \beta_k, \quad \forall e \in \varepsilon_k^+, \\ y_e(0) &= \beta_k, \quad \forall e \in \varepsilon_k^-, \end{aligned} \tag{1.2.2}$$

$$\sum_{e \in \varepsilon_k^+} y_e'(1) = \sum_{e \in \varepsilon_k^-} y_e'(0) \tag{1.2.3}$$

назовем максимальным оператором. Здесь $\{q_e(x_e), x_e \in e \in E, 0 < x_e < 1\}$ – набор вещественных непрерывных функций обычно называемых потенциалами. Из условий (1.2.2) можно исключить набор неизвестных констант $\{\beta_k\}$. Тогда общее количество условий Кирхгофа во внутренних вершинах равно $2|E| - \chi$. В следующем пункте приведена формула Лагранжа для максимального оператора $\Lambda_{\max}$.

Отметим, что материал данного пункта соответствует работе автора [56].

1.3 Формула Лагранжа для дифференциального оператора определенного на графе

При исследований дифференциальных операторов на отрезке важную роль играет формула Лагранжа. В данном пункте приведен аналог формулы Лагранжа в случае дифференциальных операторов на графах.

Поскольку в предыдущем пункте выбран специальный максимальный оператор, представляющий собой гибрид дифференциальных и матричных операторов, то этот выбор максимального оператора отразится на формуле Лагранжа. Для каждого максимального оператора существует своя формула Лагранжа.

Лемма 1.3.1 Для любых функций $\vec{Y}(x)=\{y_e(x_e), e\in E\}, \vec{V}(x)=\{v_e(x_e), e\in E\}$ из $W_2^2(\Im)$ выполняется тождество

$$\sum_{e\in E}\int_e \Lambda_{\max} y_e(x_e)v_e(x_e)dx=\sum_{e\in E}[-y_e'(x)v_e(x)+y_e(x)v_e'(x)]\Big|_{x=0}^{x=1}+\sum_{e\in E}\int_e y_e(x)\Lambda_{\max}v_e(x)dx \tag{1.3.1}$$

Доказательство. Рассмотрим интеграл из левой части соотношения (1.3.1).

$$\int_e \Lambda_{\max} y_e(x)v_e(x)dx=\int_e(-y_e''(x)+q_e(x)y_e(x))v_e(x)dx$$

Двукратное интегрирование по частям дает возможность записать формулу

$$\int_e \Lambda_{\max} y_e(x)v_e(x)dx=\left[-y_e'(x)v_e(x)+y_e(x)v_e'(x)\right]\Big|_{x=0}^{x=1}+\int_e y_e(x)(-v_e''(x)+q_e(x)v_e(x))dx$$

Откуда следует выражение (1.3.1). Лемма 1.3.1 доказана.

Лемма 1.3.2 Для любых функций $\vec{Y}(x)=\{y_e(x_e), e\in E\}, \vec{V}(x)=\{v_e(x_e), e\in E\}$ из области определения максимального оператора $\Lambda_{\max}$ выполняются тождество

$$\sum_{e\in E}\int_e \Lambda_{\max} y_e(x)v_e(x)dx = \sum_{\partial_+ e\in\Gamma}[-y_e'(1)v_e(1)+y_e(1)v_e'(1)] - \sum_{\partial_- e\in\Gamma}[-y_e'(0)v_e(0)+y_e(0)v_e'(0)] +$$

$$+\sum_{e\in\varepsilon}\int_e y_e(x)\Lambda_{\max}v_e(x)dx \qquad (1.3.2)$$

Доказательство. Пусть $a-$внутренняя вершина графа $\Im$. Множество E_a^+ состоит из дуг e, направленных к вершине a, то есть выполняется условие $\partial_+ e = a$. Множество E_a^- состоит из дуг e, исходящих из вершины a, то есть выполняется условие $\partial_- e = a$. Из общей суммы $\sum_{e\in E}[-y_e'(x)v_e(x)+y_e(x)v_e'(x)]\Big|_{x=0}^{x=1}$ выделим только те слагаемые, которые соответствуют внутренней вершине a. Для одной дуги e с условием $\partial_+ e = a$ вклад вершины a в общую сумму $\sum_{e\in E}[-y_e'(x)v_e(x)+y_e(x)v_e'(x)]\Big|_{x=0}^{x=1}$ примет вид $[-y_e'(1)v_e(1)+y_e(1)v_e'(1)]$. Точно также для всех дуг из ε_a^+ вклад вершины a в общую сумму $\sum_{e\in E}[-y_e'(x)v_e(x)+y_e(x)v_e'(x)]\Big|_{x=0}^{x=1}$ примет вид $\sum_{e\in\varepsilon_a^+}[-y_e'(1)v_e(1)+y_e(1)v_e'(1)]$. Для одной e с условием $\partial_- e = a$ вклад вершины a в общую сумму $\sum_{e\in E}[-y_e'(x)v_e(x)+y_e(x)v_e'(x)]\Big|_{x=0}^{x=1}$ примет $[y_e'(0)v_e(0)-y_e(0)v_e'(0)]$. Точно также для всех дуг из ε_a^- вклад вершины a в общую сумму $\sum_{e\in E}[-y_e'(x)v_e(x)+y_e(x)v_e'(x)]\Big|_{x=0}^{x=1}$ примет вид $\sum_{e\in\varepsilon_a^-}[-y_e'(0)v_e(0)+y_e(0)v_e'(0)]$. Таким образом, общий вклад вершины a в сумму $\sum_{e\in E}[-y_e'(x)v_e(x)+y_e(x)v_e'(x)]\Big|_{x=0}^{x=1}$ можно записать в виде

$$I_a = \sum_{e\in\varepsilon_a^+}\left[-y_e'(1)v_e(1)+y_e(1)v_e'(1)\right] + \sum_{e\in\varepsilon_a^-}\left[y_e'(0)v_e(0)-y_e(0)v_e'(0)\right]$$

согласно условиям Кирхгофа $v_e(1)=A,\ y_e(1)=B$ при $e\in E_a^+$, а также $v_e(0)=A,\ y_e(0)=B$ при $e\in E_a^-$. Теперь учитывая условия Кирхгофа (1.2.3) для функций $\vec{Y}(x)=\{y_e(x_e),e\in E\}$, $\vec{V}(x)=\{v_e(x_e),e\in E\}$ выражение I_a перепишем в виде

$$I_a=A\left[-\sum_{e\in\varepsilon_a^+}y_e^{'}(1)+\sum_{e\in\varepsilon_a^-}y_e^{'}(0)\right]+B\left[\sum_{e\in\varepsilon_a^+}v_e^{'}(1)-\sum_{e\in\varepsilon_a^-}v_e^{'}(0)\right]=0$$

Лемма 1.3.2 доказана.

Из леммы 1.3.2 следует, что суммарные вклады внутренних вершин во вне интегральные члены (1.3.2) равны нулю. Иначе говоря, вне интегральные члены выражений (1.3.2) содержат вклады только граничных вершин. Подобные формулы, согласно монографии [12], называются формулами Лагранжа. Формулу (1.3.2) можно обобщить в следующем направлении.

Рассмотрим при $k=1,...,2\chi$ граничные формы [67]

$$U_k(\vec{Y})=\sum_{\partial_+e\in\Gamma}\left[\alpha_{ek}y_e(1)+\beta_{ek}y_e^{'}(1)\right]+\sum_{\partial_-e\in\Gamma}\left[\alpha_{ek}y_e(0)+\beta_{ek}y_e^{'}(0)\right],\qquad(1.3.2)$$

где α_{ek},β_{ek} – некоторые константы.

Теорема 1.3.1 [Формула Лагранжа] Пусть $\{U_1,...,U_{2\chi}\}$ набор линейно независимых граничных форм. Тогда существует единственный набор граничных форм $\{T_1,...,T_{2\chi}\}$ таких, что для любых функций $\vec{Y}(x)=\{y_e(x_e),\ e\in E\},\vec{V}(x)=\{v_e(x_e),\ e\in E\}$ из области определения максимального оператора $\Lambda_{\max}$ выполняется тождество

$$\sum_{e\in E}\int_e\Lambda_{\max}y_e(x)v_e(x)dx=U_1(\vec{Y})T_{2\chi}(\vec{V})+U_2(\vec{Y})T_{2\chi-1}(\vec{V})+...+U_{2\chi}(\vec{Y})T_1(\vec{V})+\sum_{e\in E}\int_e y_e(x)\Lambda_{\max}v_e(x)dx$$

(1.3.3)

Доказательство. Введем разность

$$R(\vec{Y},\vec{V}) = \sum_{e\in E}\int_e \Lambda_{\max} y_e(x)v_e(x)dx - \sum_{e\in E}\int_e y_e(x)\Lambda_{\max} v_e(x)dx$$

Согласно лемме 1.3.2, эта разность представима в виде

$$R(\vec{Y},\vec{V}) = \sum_{\partial_+ e\in\Gamma}\left[-y_e'(1)v_e(1) + y_e(1)v_e'(1)\right] - \sum_{\partial_- e\in\Gamma}\left[-y_e'(0)v_e(0) + y_e(0)v_e'(0)\right]$$

Таким образом, разность выражается через набор из 2χ граничных значений $\left\{y_e(1), y_e'(1), \partial_+ e\in\Gamma\right\}, \left\{y_e(0), y_e'(0), \partial_- e\in\Gamma\right\}$. Указанный набор граничных значений представляет 2χ линейно независимую систему. Поэтому указанный набор граничных значений можно выразить в виде линейной комбинации произвольных граничных форм $\left\{U_1,...,U_{2\chi}\right\}$, удовлетворяющих условиям теоремы 1.3.1. Для этого соотношения (1.3.2) надо рассматривать, как систему линейных алгебраических уравнений относительно $\{y_e(1), y_e'(1), \partial_+ e\in\Gamma\}, \{y_e(0), y_e'(0), \partial_- e\in\Gamma\}$, получим

$$\begin{aligned}
y_e(1) &= \sum_{k=1}^{2\chi}\gamma_{ek}U_k(\vec{Y}), \partial_+ e\in\Gamma,\\
y_e'(1) &= \sum_{k=1}^{2\chi}\tau_{ek}U_k(\vec{Y}), \partial_+ e\in\Gamma,\\
y_e(0) &= \sum_{k=1}^{2\chi}\gamma_{ek}U_k(\vec{Y}), \partial_- e\in\Gamma,\\
y_e'(0) &= \sum_{k=1}^{2\chi}\tau_{ek}U_k(\vec{Y}), \partial_- e\in\Gamma
\end{aligned} \qquad (1.3.4)$$

Подставляя указанные выражения в разность

$$R(\vec{Y},\vec{V}) = \sum_{\partial_+ e\in\Gamma}\left[-\left(\sum_{k=1}^{2\chi}\tau_{ek}U_k(\vec{Y})\right)v_e(1)+\left(\sum_{k=1}^{2\chi}\gamma_{ek}U_k(\vec{Y})\right)v_e^{'}(1)\right]-$$

$$-\sum_{\partial_- e\in\Gamma}\left[-\left(\sum_{k=1}^{2\chi}\tau_{ek}U_k(\vec{Y})\right)v_e(0)+\left(\sum_{k=1}^{2\chi}\gamma_{ek}U_k(\vec{Y})\right)v_e^{'}(0)\right]$$

Теперь остается сгруппировать правую часть последнего равенства относительно $\left\{U_k(\vec{Y})\right\}$, тогда получим

$$R(\vec{Y},\vec{V}) = \sum_{k=1}^{2\chi}U_k(\vec{Y})\left\{\sum_{\partial_+ e\in\Gamma}\left[-\tau_{ek}v_e(1)+\gamma_{ek}v_e^{'}(1)\right]+\sum_{\partial_- e\in\Gamma}\left[-\tau_{ek}v_e(0)+\gamma_{ek}v_e^{'}(0)\right]\right\}$$

Если в последнем выражений суммы в квадратных скобках обозначить через

$$T_{2\chi-k+1}(\vec{V}) = \sum_{\partial_+ e\in\Gamma}[-\tau_{ek}v_e(1)+\gamma_{ek}v_e^{'}(1)]+\sum_{\partial_- e\in\Gamma}[\tau_{ek}v_e(0)-\gamma_{ek}v_e^{'}(0)],$$

то получим требуемую формулу

$$\sum_{e\in E}\int_e \Lambda_{\max}y_e(x)v_e(x)dx = \sum_{k=1}^{2\chi}U_k(\vec{Y})T_{2\chi-k+1}(\vec{V})+\sum_{e\in E}\int_e y_e(x)\Lambda_{\max}v_e(x)dx$$

Формула (1.3.3) называется формулой Лагранжа.

Замечание 1.3.1 В монографии [12] для систем дифференциальных выражений высших порядков приведена формула Лагранжа. Дифференциальный оператор на графе можно интерпретировать как систему дифференциальных выражений на отрезке. Тогда формула Лагранжа из теоремы 1.3.1 представляет частный случай формулы Лагранжа из монографии [21]. Однако есть отличия. В нашем случае максимальный оператор составлен как из дифференциальной части, так и функциональной части (условия Кирхгофа во внутренних вершинах). Роль граничных вершин в нашем случае

играют специально наперед выбранные вершины графа. В дальнейшем этот выбор позволит эффективно отбирать граничные вершины. В монографии [12] нет деления вершин на внутренние и граничные вершины, вследствие чего ее трудно интерпретировать.

Из теоремы 1.3.1 сразу же следует следствие

Следствие 1.3.1 Пусть Λ сужение оператора $\Lambda_{\max}$ на области определения $D(\Lambda)=\{\vec{Y}\in D(\Lambda_{\max}):U_1(\vec{Y})=0,...,U_\chi(\vec{Y})=0\}$. Тогда сопряженный оператор Λ^* также является сужением оператора $\Lambda_{\max}$ на область определения $D(\Lambda^*)=\{\vec{V}\in D(\Lambda_{\max}):T_1(\vec{V})=0,...,T_\chi(\vec{V})=0\}$, и для любых $\vec{Y}\in D(\Lambda)$ и $\vec{V}\in D(\Lambda^*)$ справедливо равенство

$$\sum_{e\in E}\int_e \Lambda y_e(x)v_e(x)dx=\sum_{e\in E}\int_e y_e(x)\Lambda^* v_e(x)dx.$$

Отметим, что материал данного пункта соответствует работе автора [56].

1.4 Самосопряженные сужения максимального оператора

В данном пункте дадим полное описание всех самосопряженных сужений оператора $\Lambda_{\max}$. Сначала введем минимальное сужение Λ_0 оператора $\Lambda_{\max}$. Обозначим через $D(\Lambda_0)$ совокупность всех функций $\vec{Y}(x)$ из $D(\Lambda_{\max})$, удовлетворяющих условиям

$$\begin{aligned} &y_e(1)=0, y_e'(1)=0 \quad \text{при} \quad \partial_+ e\in\Gamma,\\ &y_e(0)=0, y_e'(0)=0 \quad \text{при} \quad \partial_- e\in\Gamma \end{aligned} \tag{1.4.1}$$

Далее, введем минимальное сужение Λ_0 по формуле

$$\Lambda_0\vec{Y}=\Lambda_{\max}\vec{Y},\ \ \vec{Y}\in D(\Lambda_0). \tag{1.4.2}$$

Справедливы утверждения

I) для любых элементов $\vec{Y} \in D(\Lambda_0), \vec{V} \in D(\Lambda_{\max})$ имеет место соотношение

$$\left\langle \Lambda_0 \vec{Y}, \vec{V} \right\rangle = \left\langle \vec{Y}, \Lambda_{\max} \vec{V} \right\rangle, \tag{1.4.3}$$

II) для любых элементов $\vec{Y}, \vec{V} \in D(\Lambda_0)$ верно равенство

$$\left\langle \Lambda_0 \vec{Y}, \vec{V} \right\rangle = \left\langle \vec{Y}, \Lambda_0 \vec{V} \right\rangle.$$

Из (1.4.3) следует операторное включение $\Lambda_{\max} \subset \Lambda_0^*$.

Для исследования свойств минимального оператора удобно ввести операторы Λ_1 и Λ_2, являющиеся сужениями максимального оператора $\Lambda_{\max}$.

Пусть

$$D(\Lambda_1) = \{\vec{Y} \in D(\Lambda_{\max}) : y_e(1) = 0 \text{ при } \partial_+ e \in \Gamma, y_e(0) = 0 \text{ при } \partial_- e \in \Gamma\}$$

и $\Lambda_1 \vec{Y}(x) = \Lambda_{\max} \vec{Y}(x)$ при $\vec{Y} \in D(\Lambda_1)$.

$$D(\Lambda_2) = \{\vec{Y} \in D(\Lambda_{\max}) : y_e'(1) = 0 \text{ при } \partial_+ e \in \Gamma, y_e'(0) = 0 \text{ при } \partial_- e \in \Gamma\}$$

и $\Lambda_2 \vec{Y}(x) = \Lambda_{\max} \vec{Y}(x)$ при $\vec{Y} \in D(\Lambda_2)$.

Предположение 1.4.1 Для любой функций $\vec{F}(x)$ из $L_2(\Im)$ уравнение

$$\Lambda_i \vec{Y}(x) = \vec{F}(x), \ i = 1,2 \tag{1.4.4}$$

имеет единственное решение в $D(\Lambda_i), i = 1,2$.

Замечание 1.4.1 Операторное уравнение (1.4.4) на множестве $D(\Lambda_i), i = 1,2$ эквивалентно системе линейных дифференциальных уравнений второго порядка на множестве дуг E с $2|E| - \chi$ условиями Кирхгофа во внутренних вершинах I и χ условиями в граничных вершинах Г. Таким образом, возникает система неоднородных линейных дифференциальных уравнений второго порядка на множестве дуг E, общее решение которой содержит $2|E|$ констант. Для их определения имеется $(2|E| - \chi) + \chi = 2|E|$ линейных уравнений. Следовательно, можно выписать некоторый определитель $D_i, i = 1,2$

размерности $2|E|$. Тогда однозначная разрешимость уравнения (1.4.4) эквивалентна тому, что выписанный определитель $D_i, i=1,2$ отличен от нуля.

Следуя монографии [21], сформулируем следующие леммы.

Лемма 1.4.1 Пусть $\Lambda_{\max}-$ максимальный оператор на графе $\Im$, введенный в пункте 1.2 и пусть $\vec{F}(x)-$ функция из $L_2(\Im)$. Если выполнено предположение 1.4.1, то уравнение

$$\Lambda_{\max}\vec{Y}_{\max}(x)=\vec{F}(x)$$

Имеет решение $\vec{Y}(x)$, удовлетворяющее условиям (1.4.1) тогда и только тогда, когда $\vec{F}(x)$ ортогональны ко всем элементам из $Ker\Lambda_{\max}$.

Доказательство. Согласно предположению (1.4.1) обозначим через $\vec{Y}(x)$ единственное решение операторного уравнения (1.4.4) при $i=1$. Далее, обозначим через $\vec{V}_1,...,\vec{V}_\chi$ фундаментальную систему решений однородного операторного уравнения $\Lambda_{\max}\vec{V}=0$ удовлетворяющую условиям: все граничные формы $v_{kl}(1)$ при $\partial_+ e\in\Gamma$ и $v_{kl}(0)$ при $\partial_- e\in\Gamma$, кроме одной, равны нулю, а одна форма равна 1. Такая фундаментальная система существует. Это следует из замечания 1.4.1, поскольку условие разрешимости эквивалентно отличию от нуля определителя D_1.

Применяя к функциям $\vec{Y}(x)$ и $\vec{V}_k(x)$ формулу Лагранжа, получим

$$\left\langle \vec{F},\vec{V}_k\right\rangle=\left\langle \Lambda_{\max}\vec{Y},\vec{V}_k\right\rangle=\left\langle \vec{Y},\Lambda_{\max}\vec{V}_k\right\rangle. \qquad (1.4.5)$$

Но $\Lambda_{\max}\vec{V_k}=0$. Кроме того, из включения $\vec{Y}\in D(\Lambda_1)$ вытекает

$$\sum_{\partial_+ e\in\Gamma} y_e(1)v_{kl}^{'}(1)-\sum_{\partial_- e\in\Gamma} y_e(0)v_{kl}^{'}=0.$$

Следовательно, формула (1.4.5) примет вид

$$\left\langle \vec{F}, \vec{V_k} \right\rangle = -\sum_{\partial_+ e \in \Gamma} y_e'(1) v_{kl}(1) + \sum_{\partial_- e \in \Gamma} y_e'(0) v_{kl}(0) =$$
$$= \begin{cases} -y_e'(1) & \text{если } v_{kl}(1) = 1, \\ y_e'(0) & \text{если } v_{kl}(0) = 1. \end{cases} \qquad (1.4.6)$$

Из соотношений (1.4.6) следует утверждение леммы 1.4.1: равенства (1.4.1) выполняются тогда и только тогда, когда $\left\langle \vec{F}, \vec{V_k} \right\rangle = 0, k = 1, ..., \chi.$ Таким образом, $\vec{F}(x)$ ортогональна всем решениям уравнения $\Lambda_{\max} \vec{V} = 0.$

Лемма 1.4.2 Каковы бы ни были числа α_e, β_e при $\partial_+ e \in \Gamma$ и α_e, β_e при $\partial_- e \in \Gamma$ при выполнении предположения (1.4.1) существует функция $\vec{Y}(x) \in D(\Lambda_{\max}),$ удовлетворяющая условиям

$$y_e'(1) = \beta_e, y_e(1) = \alpha_e \quad \text{при } \partial_+ e \in \Gamma,$$
$$y_e'(0) = \beta_e, y_e(0) = \alpha_e \quad \text{при } \partial_- e \in \Gamma.$$

Доказательство. Докажем сначала лемму 1.4.2 для случая, когда все $\alpha_e = 0.$ Выберем $\vec{F}(x)$ из $L_2(\Im)$ так, что

$$\left\langle \vec{F}, \vec{V_k} \right\rangle = \begin{cases} -\beta_e & \text{если } v_{kl}(1) = 1, \\ \beta_e & \text{если } v_{kl}(0) = 1, \end{cases} \qquad (1.4.7)$$

где $\vec{V_k}, k = 1, ..., \chi -$ та же фундаментальная система, что и при доказательстве леммы 1.4.1. Такой элемент существует и притом даже в $Ker \Lambda_{\max}.$ Действительно, если положить

$$\vec{F} = \sum_{k=1}^{\chi} \mu_k \vec{V}_k,$$

то условия (1.4.7) будет системой уравнений относительно постоянных $\mu_1, ..., \mu_\chi,$ определитель которой есть определитель Грама линейно независимых функций $\vec{V}_1, ..., \vec{V_\chi}.$ Следовательно, он отличен от нуля. Обозначим через $\vec{V}$ решение уравнения $\Lambda_1 \vec{V} = \vec{F}.$ Тогда из формулы Лагранжа следует

$$\vec{V}'(1) = \beta_e \text{ при } \partial_+ e \in \Gamma,$$
$$\vec{V}'(0) = \beta_e \text{ при } \partial_- e \in \Gamma.$$

Итак, построенная функция $\vec{V}(x) \in D(\Lambda_{\max})$ такая, что

$$\vec{V}'(1) = \beta_e, \vec{V}(1) = 0 \text{ при } \partial_+ e \in \Gamma,$$
$$\vec{V}'(0) = \beta_e, \vec{V}(0) = 0 \text{ при } \partial_- e \in \Gamma.$$

Меняя ролями наборы α_e, β_e, а также операторы Λ_1 и Λ_2, получим полное доказательство леммы 1.4.2.

Теперь можно сформулировать утверждение относительно минимального оператора Λ_0.

Лемма 1.4.3. $\Lambda_0 \subset \Lambda_0^* = \Lambda_{\max}, \Lambda_{\max}^* = \Lambda_0$.

Лемма 1.4.3 доказывается точно также как доказано утверждение V §17 из монографии [21].

Основная теорема.

Теорема 1.4.1. При выполнении предположения 1.4.1 всякое самосопряженное расширение Λ оператора Λ_0 определяется линейно независимыми $k = 1,..., \chi$ краевыми условиями вида [67]

$$U_k(\vec{Y}) = \sum_{\partial_+ e \in \Gamma} [\alpha_{ek} y_e(1) + \beta_{ek} y_e'(1)] + \sum_{\partial_- e \in \Gamma} [\alpha_{ek} y_e(0) + \beta_{ek} y_e'(0)] = 0, \qquad (1.4.8)$$

где α_{ek}, β_{ek} – некоторые константы, причем

$$\sum_{\partial_+ e \in \Gamma} [\alpha_{ej} \overline{\beta}_{ek} - \overline{\alpha}_{ek} \beta_{ej}] = \sum_{\partial_- e \in \Gamma} [\alpha_{ej} \overline{\beta}_{ek} - \overline{\alpha}_{ek} \beta_{ej}] \qquad (1.4.9)$$

при $j, k = 1,..., \chi$.

Обратно, всякие линейно независимые краевые условия вида (1.4.8), удовлетворяющие соотношениям (1.4.9), определяют область определения некоторого самосопряженного расширения Λ оператора Λ_0, если выполнено предположение 1.4.1.

Доказательство. Следуя схеме доказательства теоремы 5, §18 из монографии [15], введем функций $\vec{V_1},..., \vec{V_\chi}$. Точнее говоря, $\vec{V_k}$ из области определения $D(\Lambda_{\max})$ с условиями

$$\begin{aligned} v_{ke}^{'}(1) = \alpha_{ek}, v_{ke}(1) = -\beta_{ek} \quad \text{при} \quad \partial_{+} e \in \Gamma, \\ v_{ke}^{'}(0) = -\alpha_{ek}, v_{ke}(0) = \beta_{ek} \quad \text{при} \quad \partial_{-} e \in \Gamma. \end{aligned} \tag{1.4.10}$$

Согласно лемме 1.4.2, такие решения существуют. Тогда условия (1.4.8) при $j,k = 1,...,\chi$ примут вид

$$U_k(\vec{Y}) = \sum_{\partial_{+} e \in \Gamma} [y_e(1)v_{ke}^{'}(1) - y_e^{'}(1)v_{ke}(1)] - \sum_{\partial_{-} e \in \Gamma} [y_e(0)v_{ke}^{'}(0) - y_e^{'}(0)v_{ke}(0)] = 0.$$

Согласно результатам монографии [21], краевые условия (1.4.8) определяют область определения самосопряженного расширения Λ оператора Λ_0. Тогда и только тогда, когда все функции $\vec{V}_1,...,\vec{V}_\chi$, определенные согласно (1.4.10), также удовлетворяют соотношениям

$$U_k(\vec{V}_j) = 0, k, j = 1,..., \chi.$$

Теорема 1.4.1 полностью доказана.

Отметим, что материал данного пункта соответствует работе автора [56].

1.5 Основные понятия, связанные с граф-деревом

В следующих пунктах вместо общих геометрических графов будем рассматривать частные их виды: граф-дерево и граф-звезда. При этом некоторые вышеприведенные утверждения (формула Лагранжа и описание самосопряженных сужений) намного упростятся. В частности, приведена формула Лагранжа для дифференциального оператора на дереве с условиями Кирхгофа в его внутренних вершинах. Мы изучаем вопрос о полном описании корректных сужений заданного максимального дифференциального оператора на деревообразном графе. В этом подразделе также описаны все самосопряженные сужения максимального оператора, а также все обратимые сужения максимального оператора.

Сначала приведем известные понятия, связанные с граф-деревом.

Пусть задан граф-дерево $\Im = \{V, E\}$. Ориентированное дерево – ацикличный орграф (ориентированный граф, не содержащий циклов), в котором только одна вершина имеет нулевую степень захода (в неё не ведут дуги), а все остальные вершины имеют степень захода 1 (в них ведёт ровно по одной дуге). Вершина с нулевой степенью захода называется корнем дерева,

которое обозначим 0, вершины с нулевой степенью исхода (из которых не исходит ни одна дуга) называются граничными вершинами или листьями и обозначается через Γ. Вершины, не являющиеся граничными называются внутренними и обозначим через I. Граничные вершины будем нумеровать числами 0 до p, а внутренние вершины $p+1$ до r. Количество исходящую из вершины j дуг обозначим через m_j. Не умоляя общности, считаем, что дуги имеют одинаковую длину. Дуга, имеющая конец в вершине j, обозначаем через e_j. Функцию $y(x)$ определенную на дуге e_j, обозначаем $y_j(x_j), x_j \in e_j$. Путь, исходящий из корня и заканчивающийся в вершине j, обозначим через s_j, а его длину через $|s_j|-1$. Далее, мы предполагаем, что из корня выходит только одна дуга.

1.6 Определение максимального оператора на граф-дереве

Рассмотрим пространство [65]

$$L_2(\Im) = \prod_{j=1}^{r} L_2(e_j)$$

с элементами

$$\vec{Y}(\vec{X}) = [y_j(x_j),\ j = \overline{1,r}]^T,$$

(где $\vec{X} = (x_j,\ j = \overline{1,r})$ и $\prod_{j=1}^{r}$ – декартово произведение подпространств) и с конечной нормой [65]

$$\| \vec{Y} \|_{L_2(\Im)} = \sqrt{\sum_{j=1}^{r} \int_{e_j} | y_j(x_j) |^2 \, dx_j}.$$

Точно также введем пространство [65]

$$W_2^2(\Im) = \prod_{j=1}^{r} W_2^2(e_j).$$

Введем множество функции $D(\Lambda_{\max}) \subset W_2^2(\Im)$, элементы которого в каждой внутренней вершине $k = p+1,...,r$ удовлетворяют условиям Кирхгофа [11]

$$y_k(1) = y_{s_1(k)}(0) = ... = y_{s_{m_k}(k)}(0), \qquad (1.6.1)$$

$$y'_k(1) = y'_{s_1(k)}(0) + ... + y_{s_{m_k}(k)}(0), \qquad (1.6.2)$$

здесь $s_1(k),...,s_{m_k}(k) -$ дуги исходящие из вершины k (Рис 1.).

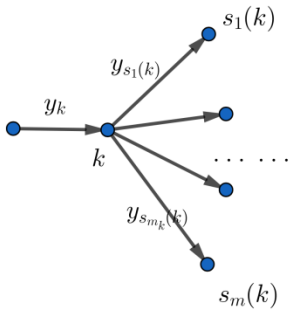


Рис 1. Разветвление во внутренней вершине k

Оператор $\Lambda_{\max}$ с областью определения $D(\Lambda_{\max})$ задаваемый следующим дифференциальным выражением

$$-y_j''(x_j) + q_j(x_j)y_j(x_j),\ e_j \in E,\ 0 < x_j < 1,\ j = 1,...,r,$$

называется максимальным оператором. Где $\{q_j(x_j), x_j \in e_j \in E, 0 < x_j < 1\}$ – набор вещественных непрерывных функций, обычно называемых потенциалами. Отметим, что количество условий Кирхгофа во внутренних вершинах равно $2r - p - 1$.

1.7 Формула Лагранжа для дифференциальных операторов на граф-дереве

Формула Лагранжа играет важную роль при изучении дифференциальных операторов на отрезке. В этом параграфе мы приведем аналог формулы Лагранжа в случае дифференциального оператора на граф-дереве. Сначала сформулируем несколько лемм.

Лемма 1.7.1 Для любых функций $\vec{Y}(\vec{X}) = \{y_j(x_j),\ j = 1,...,r\ \}, \vec{V}(\vec{X}) = \{v_j(x_j),\ j = 1,...,r\}$ из $W_2^2(\Im)$ выполняется тождество

$$\sum_{j=1}^{r} \int_{e_j} \Lambda_{\max} y_j(x_j) \overline{v_j(x_j)} dx_j = \sum_{k=1}^{r} [y_k'(1)\overline{v_k(1)} - y_k(1)\overline{v_k'(1)}] - \sum_{k=p+1}^{r} [y_k'(0)\overline{v_k(0)} - y_k(0)\overline{v_k'(0)}] +$$

$$+ \sum_{j=1}^{r} \int_{e_j} y_j(x_j) \overline{\Lambda_{\max} v_j(x_j)} dx_j, \qquad (1.7.1)$$

где $\bar{z}$-комплексное сопряжение числу z.

Доказательство. Рассмотрим интеграл из левой части соотношения (1.7.1). Интеграл на дуге e_j запишем следующим образом

$$\int_{e_j} \Lambda_{\max} y_j(x_j) \overline{v_j(x_j)} dx_j = \int_0^1 (-y_j''(x_j) + q_j(x_j) y_j(x_j)) \overline{v_j(x_j)} dx_j.$$

Двукратное интегрирование по частям дает возможность записать выражение $\int_0^1 (-y_j^{"}(x_j))\overline{v_j(x_j)}dx_j$ в виде

$$\int_0^1 (-y_j^{"}(x_j))\overline{v_j(x_j)}dx_j = [-y_j^{'}(x_j)\overline{v_j(x_j)} + y_j(x_j)\overline{v_j^{'}(x_j)}]|_{x_j=0}^{x_j=1} + \int_0^1 y_j(x_j)\overline{(-v_j^{"}(x_j))}dx_j. \quad (1.7.2)$$

Так как все дуги $e_1,...,e_r$ имеют концы на $x=1$ и только дуги $e_{p+1},...,e_r$ имеют концы на $x=0,$ тогда из равенств (1.7.2) вытекает лемма 1.7.1.

Лемма 1.7.2 Для любых функций $\vec{Y}(\vec{X}) = \{y_j(x_j),\ j=1,...,r\ \}, \vec{V}(\vec{X}) = \{v_j(x_j),\ j=1,...,r\}$ из области определения максимального оператора $\Lambda_{\max}$ выполняется тождество

$$\sum_{j=1}^{r}\int_{e_j} \Lambda_{\max} y_j(x_j)\overline{v_j(x_j)}dx_j = \sum_{k=1}^{r}[y_k^{'}(1)\overline{v_k(1)} - y_k(1)\overline{v_k^{'}(1)}] + [y_{p+1}^{'}(0)\overline{v_{p+1}(0)} - y_{p+1}(0)\overline{v_{p+1}^{'}(0)}] +$$

$$+\sum_{j=1}^{r}\int_{e_j} y_j(x_j)\overline{\Lambda_{\max} v_j(x_j)}dx_j. \quad (1.7.3)$$

Доказательство. Предположим, что j принимает значения $p+1,...,r.$ Вклад в вершину j можно записать в виде

$$[-y_k^{'}(1)\overline{v_k(1)} + y_k(1)\overline{v_k^{'}(1)}] + \sum_{k=1}^{r}[y_{s_k}^{'}(0)\overline{v_{s_k}(0)} - y_{s_k}(0)\overline{v_{s_k}^{'}(0)}], \quad (1.7.4)$$

По условию (1.7.1) посчитаем значение суммы (1.7.4), получим

$$\left[-y_j'(1)\overline{v_j(1)}+y_j(1)\overline{v_j'(1)}\right]+\overline{v_j(1)}\sum_{k=1}^{m}y'_{s_k(j)}(0)-y_j(1)\sum_{k=1}^{m_j}\overline{v'_{s_k(j)}(0)}. \qquad (1.7.5)$$

Соотношение (1.7.5) означает, что вклад внутренних вершин $p+1,...,r$ в слагаемые, не содержащие интегралы (1.7.3), равен нулю. Поэтому в (1.7.3) необходимо учитывать только вклад граничных вершин $0,...,p$. Тогда мы имеем значения функции $y_j(x), y_j'(x), v_j(x), v_j'(x), j=1,...,p$ в точке $x=1$. Напомним, что эти функции определены на входящих дугах $e_1,...,e_p$ до граничных вершин $1,...,p$. Существуют также значения функций $y_{p+1}(x), y_{p+1}'(x), v_{p+1}(x), v_{p+1}'(x), j=1,...,p$ в точке $x=0$. Эти функции определены на исходящих дугах e_{p+1} из вершины 0 и направленные к вершине $p+1$ (Рис.2):

$$\sum_{k=1}^{p}[-y_k'(1)\overline{v_k(1)}+y_k(1)\overline{v_k'(1)}]-[-y'_{p+1}(0)\overline{v_{p+1}(0)}+y_{p+1}(0)\overline{v'_{p+1}(0)}]$$

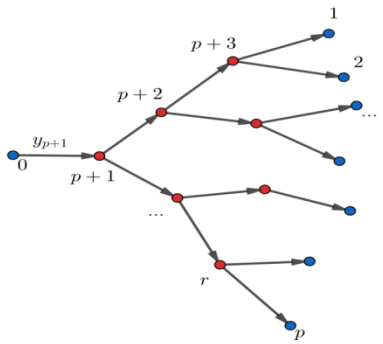


Рис.2 Граф-дерево с r вершинами (красные вершины-внутренние, синие-граничные вершины)

Доказательство леммы 1.7.2 завершено.

Из леммы 1.7.2 следует, что вклад внутренних вершин в члены, не содержащие интегралы (1.7.3), равен нулю. Другими словами, члены, которые вне интеграла (1.7.3) содержат только вклад граничных вершин. Следуя монографии [21] подобные формулы называются формулой Лагранжа. Формула (1.7.3) может быть обобщена в следующем направлении.

Рассмотрим для $k = 1,...,2(p+1)$ следующие граничные формы [67]

$$U_k(\vec{Y}) = \sum_{j=1}^{p}[\alpha_{kj} y_j(1) + \beta_{kj} y_j^{'}(1)] + [\alpha_{k,p+1} y_{p+1}(0) + \beta_{k,p+1} y_{p+1}^{'}(0)], \qquad (1.7.6)$$

где $\alpha_{kj}, \beta_{kj}, \alpha_{k,p+1}, \beta_{k,p+1}$ – некоторые постоянные.

Теорема 1.7.1. [Формула Лагранжа] Пусть $U_1,...,U_{2(p+1)}$ – множество линейно независимых граничных форм. Тогда существует единственный набор граничных форм $T_1,...,T_{2(p+1)}$ таких, что для любых функций $\vec{Y}(x) = \{y_j(x_j), j = 1,...,r\}, \vec{V}(x) = \{v_j(x_j), j = 1,...,r\}$ из $D(\Lambda_{\max})$ имеет место следующее тождество

$$\sum_{j=1}^{r}\int_{e_j} \Lambda_{\max} y_j(x_j)\overline{v_j(x_j)}dx_j = U_1(\vec{Y})\overline{T_{2(p+1)}(\vec{V})} + U_2(\vec{Y})\overline{T_{2(p+1)-1}(\vec{V})} + ... + U_{2(p+1)}(\vec{Y})\overline{T_1(\vec{V})} +$$

$$+\sum_{j=1}^{r}\int_{e_j} y_j(x_j)\overline{\Lambda_{\max} v_j(x_j)}dx_j \qquad (1.7.7)$$

Доказательство. Введем разность

$$R(\vec{Y},\vec{V}) = \sum_{j=1}^{r}\int_{e_j} \Lambda_{\max} y_j(x_j)\overline{v_j(x_j)}dx_j - \sum_{j=1}^{r}\int_{e_j} y_j(x_j)\overline{\Lambda_{\max} v_j(x_j)}dx_j.$$

Согласно лемме 1.7.2, эта разность представима в виде

$$R(\vec{Y},\vec{V}) = \sum_{k=1}^{p}[-y_k^{'}(1)\overline{v_k(1)} + y_k(1)\overline{v_k^{'}(1)}] + [y_{p+1}^{'}(0)\overline{v_{p+1}(0)} + y_{p+1}(0)\overline{v_{p+1}^{'}(0)}]. \qquad (1.7.8)$$

Таким образом, разность выражается набором $2(p+1)$ граничных значений $\{y_j(1), y_j'(1), j=1,...,p\}, \{y_{p+1}(0), y_{p+1}'(0)\}$. Этот набор граничных значений представляет $2(p+1)$ линейную независимую систему. Следовательно, множество граничных значений может быть выражено в виде линейной комбинации произвольных граничных форм $U_1,...,U_{2(p+1)}$, удовлетворяющих условиям теоремы 1.7.1. Для этого соотношения (1.7.6) следует рассматривать как систему линейных алгебраических уравнений относительно $\{y_j(1), y_j'(1), j=1,...,p\}, \{y_{p+1}(0), y_{p+1}'(0)\}$. Разрешая систему (1.7.6) относительно $\{y_j(1), y_j'(1), j=1,...,p\}, \{y_{p+1}(0), y_{p+1}'(0)\}$, имеем

$$y_j(1) = \sum_{k=1}^{2(p+1)} \gamma_{kj} U_k(\vec{Y}),\ j=1,...,p,$$
$$y_j'(1) = \sum_{k=1}^{2(p+1)} \xi_{kj} U_k(\vec{Y}),\ j=1,...,p,$$
$$y_{p+1}(0) = \sum_{k=1}^{2(p+1)} \gamma_{k,p+1} U_k(\vec{Y}),$$
$$y_{p+1}'(0) = \sum_{k=1}^{2(p+1)} \xi_{k,p+1} U_k(\vec{Y}),$$

Подставляя указанные выражения в разность

$$R(\vec{Y},\vec{V}) = \sum_{k=1}^{p} \left[-\left(\sum_{j=1}^{2(p+1)} \xi_{jk} U_j(\vec{Y}) \right) \overline{v_j(1)} + \left(\sum_{j=1}^{2(p+1)} \gamma_{jk} U_j(\vec{Y}) \right) \overline{v_j'(1)} \right] +$$
$$+ \left[\left(\sum_{j=1}^{2(p+1)} \xi_{j,p+1} U_j(\vec{Y}) \right) \overline{v_{p+1}(0)} - \left(\sum_{j=1}^{2(p+1)} \gamma_{j,p+1} U_j(\vec{Y}) \right) \overline{v_{p+1}'(0)} \right].$$

Сгруппируем правую часть последнего равенства относительно $\left\{U_k(\vec{Y})\right\}$, тогда получим

$$R(\vec{Y},\vec{V}) = \sum_{j=1}^{2(p+1)} U_j(\vec{Y})\left\{\sum_{k=1}^{p}\left[-\xi_{jk}\overline{v_j(1)} + \gamma_{jk}\overline{v_j'(1)}\right] + \left[\xi_{j,p+1}\overline{v_{p+1}(0)} - \gamma_{j,p+1}\overline{v_{p+1}'(0)}\right]\right\}.$$

Если в последнем выражении сумму в квадратных скобках обозначить через

$$T_{2(p+1)-k+1}(\vec{V}) = \sum_{k=1}^{p}[-\overline{\xi_{jk}}v_j(1) + \overline{\gamma_{jk}}v_j'(1)] + \left[\overline{\xi_{j,p+1}}v_{p+1}(0) - \overline{\gamma_{j,p+1}}v_{p+1}'(0)\right],$$

то получим требуемую формулу

$$\sum_{j=1}^{r}\int_{e_j}\Lambda_{\max}y_j(x_j)\overline{v_j(x_j)}dx_j = \sum_{k=1}^{2(p+1)}U_k(\vec{Y})\overline{T_{2(p+1)-k+1}(\vec{V})} + \sum_{j=1}^{r}\int_{e_j}y_j(x_j)\overline{\Lambda_{\max}v_j(x_j)}dx_j.$$

Формула (1.7.7) называется формулой Лагранжа.

Из теоремы (1.7.1) следует

Следствие 1.7.1. Пусть Λ сужение оператора $\Lambda_{\max}$ на области определения $D(\Lambda) = \{\vec{Y} \in D(\Lambda_{\max}) : U_1(\vec{Y}) = 0,...,U_{p+1}(\vec{Y}) = 0\}$. Тогда сопряженный оператор Λ^* также является сужением оператора $\Lambda_{\max}$ на области определения $D(\Lambda^*) = \{\vec{V} \in D(\Lambda_{\max}) : T_1(\vec{V}) = 0,...,T_{p+1}(\vec{V}) = 0\}$, и для любых $\vec{Y} \in D(\Lambda)$ и $\vec{V} \in D(\Lambda)$ справедливо равенство

$$\sum_{j=1}^{r}\int_{e_j}\Lambda y_j(x_j)\overline{v_j(x_j)}dx_j = \sum_{j=1}^{r}\int_{e_j}y_j(x_j)\overline{\Lambda^* v_j(x_j)}dx_j.$$

1.8 Самосопряженные сужения максимального оператора на граф-дереве

В этом разделе дадим полное описание всех самосопряженных сужений максимального оператора $\Lambda_{\max}$. Сначала введем минимальное сужение Λ_0 максимального оператора $\Lambda_{\max}$. Обозначим через $D(\Lambda_0)$ множество всех функций $\vec{Y}(x)$ из $D(\Lambda_{\max})$, которые удовлетворяют условиям

$$\begin{aligned} &y_j(1)=0, y_j^{'}(1)=0,\ j=1,...,p \\ &y_{p+1}(0)=0, y_{p+1}^{'}(0)=0. \end{aligned} \tag{1.8.1}$$

Теперь нужно ввести минимальное сужение Λ_0 по формуле

$$\Lambda_0\vec{Y}=\Lambda_{\max}\vec{Y},\ \ \vec{Y}\in D(\Lambda_0).$$

Выполняется следующее равенство

$$\text{I)}\quad <\Lambda_0\vec{Y},\vec{V}>=<\vec{Y},\Lambda_{\max}\vec{V}>,\ \ \vec{Y}\in D(\Lambda_0),\vec{V}\in D(\Lambda_{\max}), \tag{1.8.2}$$

$$\text{II)}\quad <\Lambda_0\vec{Y},\vec{V}>=<\vec{Y},\Lambda_0\vec{V}>,\ \ \vec{Y},\vec{V}\in D(\Lambda_0).$$

Из равенства (1.8.2) следует, что $\Lambda_{\max}\subset\Lambda_0^*$.

Чтобы изучить свойства минимального оператора удобно ввести операторы Λ_1,Λ_2, которые будут сужениями оператора $\Lambda_{\max}$.

Пусть

$$D(\Lambda_1)=\{\vec{Y}\in D(\Lambda_{max}): y_j(1)=0,\ j=1,...,p, y_{p+1}(0)=0\}$$
$$\Lambda_1\vec{Y}(x)=\Lambda_{\max}\vec{Y}(x),\vec{Y}\in D(\Lambda_1).$$

$$D(\Lambda_2)=\{\vec{Y}\in D(\Lambda_{\max}): y_j^{'}(1)=0,\ j=1,...,p, y_{p+1}^{'}(0)=0\}$$
$$\Lambda_2\vec{Y}(x)=\Lambda_{\max}\vec{Y}(x),\vec{Y}\in D(\Lambda_2).$$

Предположение 1.8.1. Уравнение

$$\Lambda_i\vec{Y}(x)=\vec{F}(x),\ \ i=1,2 \qquad (1.8.3)$$

имеет единственное решение в $D(\Lambda_i), i=1,2$ для всех функций $\vec{F}(x)$ из $L_2(\Im)$.

Замечание 1.8.1. Операторное уравнение (1.8.3) во множестве $D(\Lambda_i), i=1,2$ эквивалентна системе линейных дифференциальных уравнений второго порядка, определенных на дугах E с $2|E|-p-1$ условиями Кирхгофа во внутренних вершинах I и $p+1$ условиями на граничных вершинах. Таким образом, имеется система линейных неоднородных дифференциальных уравнений второго порядка на множестве дуг E, общее решение которых содержат $2|E|$ констант. Чтобы определить их имеется $(2|E|-p-1)+p+1=2|E|$ линейных условий. Следовательно, можно выписать некоторый определитель $D_i, i=1,2$ размерности $2|E|$. Тогда однозначная разрешимость уравнения (1.8.3) эквивалентна тому, что выписанный определитель $D_i, i=1,2$ отличен от нуля.

Следуя монографии [12] сформулируем две леммы.

Лемма 1.8.1. Пусть $\Lambda_{\max}$ максимальный оператор на граф-дереве $\Im$ введенный в параграфе 1.6. И пусть $\vec{F}(x)$ – функция из $L_2(\Im)$. Если выполнено предположение 1.8.1, то уравнение

$$\Lambda_{\max}\vec{Y}(x)=\vec{F}(x)$$

имеет решение $\vec{Y}(x)$, которое удовлетворяет условию (1.8.3) тогда и только тогда, когда $\vec{F}(x)$ ортогональна всем элементам из $Ker\Lambda_{\max}$.

Доказательство. По предположению 1.8.1 обозначим через $\vec{Y}(x)$ единственное решение операторного уравнения (1.8.3) для $i=1$. Обозначим через $\vec{V}_1,...,\vec{V}_{p+1}$ фундаментальное множество решений операторного уравнения $\Lambda_{\max}\vec{V}=0$, удовлетворяющее следующим условиям: все граничные формы $v_{jl}(1)$ для $j=1,...,p$ и $v_{p+1,l}(0)$, равны нулю за исключением одного из них, а одна из форма равна 1. Существует такая фундаментальная система. Из замечания 1.8.1 следует, что условие разрешимости эквивалентно тому, что определитель D_1 не равен нулю.

Применяя формулу Лагранжа к функциям $\vec{Y}(x),V_k(x),$ имеем

$$<\vec{F},\vec{V}_k>=<\Lambda_{\max}\vec{Y},\vec{V}_k>-<\vec{Y},\Lambda_{\max}\vec{V}_k>. \tag{1.8.4}$$

Однако $\Lambda_{\max}\vec{V}_k=0.$ Кроме того, из включения $\vec{Y}\in D(\Lambda_1)$ вытекает

$$\sum_{l=1}^{p} y_l(1)v_{kl}^{'}(1)-y_{p+1}(0)v_{k,p+1}^{'}(0)=0.$$

Теперь формула (1.8.4) имеет следующий вид

$$<\vec{F},\vec{V}_k>=-\sum_{l=1}^{p} y_l^{'}(1)v_{kl}(1)+y_{p+1}^{'}(0)v_{k,p+1}(0)=\begin{cases}-y_l^{'}(1) & \text{если } v_{kl}(1)=1,\\ y_{p+1}^{'}(0) & \text{если } v_{k,p+1}(0)=1.\end{cases} \tag{1.8.5}$$

Из соотношения (1.8.5) вытекает утверждение леммы 1.8.1: равенства (1.8.1) справедлива тогда и только тогда, когда $<\vec{F},\vec{V}_k>=0, k=1,..., p+1.$. А именно, $\vec{F}(x)$ ортогональна всем решениям уравнения $\Lambda_{\max}\vec{V}=0$.

Лемма 1.8.2. Пусть выполняется предположение 1.8.1, то существует функция $\vec{Y}(x)\in D(\Lambda_{\max})$ такая, что выполняется следующие условия

$$y_k'(1)=\beta_k, y_k(1)=\alpha_k, k=1,..., p,$$
$$y_{p+1}'(0)=\beta_{p+1}, y_{p+1}(0)=\alpha_{p+1}$$

для всех чисел $\alpha_k,\beta_k, k=1,..., p$ и α_{p+1},β_{p+1}.

Доказательство. Сначала, докажем лемму 1.8.2 для случая $\alpha_k=0.$ Выберем $\vec{F}(x)\in L_2(\Im)$ такой что

$$<\vec{F},\vec{V}_k>=\begin{cases}-\beta_l \text{ если } v_{kl}(1)=1,\\ \beta_{p+1} \text{ если } v_{k,p+1}(0)=1,\end{cases} \tag{1.8.6}$$

где $\vec{V}_k, k=1,..., p+1$ такая же система фундаментальных решений, как в доказательстве леммы 1.8.1. Такой элемент существует и притом даже в $Ker\Lambda_{\max}$. Действительно, если взять

$$\vec{F}=\sum_{k=1}^{p+1}\mu_k\vec{V}_k,$$

тогда условие (1.8.6) является системой уравнений относительно констант $\mu_1,...,\mu_{p+1}$, определитель которого является определителем Грама линейно независимых функций $\vec{V}_1,...,\vec{V}_{p+1}$. Следовательно, определитель не равняется нулю. Обозначим через $\vec{V}$ решения уравнения $\Lambda_1\vec{V}=\vec{F}$. Тогда из формулы Лагранжа следует

$$\vec{V}'(1) = \beta_j \text{ для } j = 1,..., p,$$
$$\vec{V}'(0) = \beta_{p+1}.$$

Тогда из формулы Лагранжа следует

$$\vec{V}'(1) = \beta_j, \vec{V}(1) = 0, \; j = 1,..., p,$$
$$\vec{V}'(0) = \beta_{p+1}, \vec{V}(0) = 0.$$

Меняя местами наборы α_j, α_{p+1} и β_j, β_{p+1}, а также надо поменять оператор Λ_1 на оператор Λ_2, получим доказательство леммы 1.8.2.

Теперь сформулируем утверждение о минимальном операторе Λ_0.

Лемма 1.8.3. $\Lambda_0 \subset \Lambda_0^* = \Lambda_{\max}, \Lambda_{\max}^* = \Lambda_0.$

Доказательство леммы 1.8.3 приведено как в монографии [12].

Сформулируем основную теорему этого параграфа.

Теорема 1.8.1. При выполнении предположения 1.8.1, всякое самосопряженное расширение Λ оператора Λ_0 определяется по линейно независимым $k = 1,..., p+1$ граничными условиями вида

$$U_k(\overline{Y}) = \sum_{j=1}^{p} [\alpha_{jk} y_j(1) + \beta_{jk} y_j'(1)] + [\alpha_{p+1,k} y_{p+1}(0) + \beta_{p+1,k} y_{p+1}'(0)] = 0, \qquad (1.8.7)$$

где $\alpha_{jk}, \beta_{jk}, \alpha_{p+1,k}, \beta_{p+1,k}$ – некоторые постоянные, причем

$$\sum_{j=1}^{p} [\alpha_{jk} \overline{\beta}_{jk} - \overline{\alpha}_{jk} \beta_{jk}] = \alpha_{p+1,k} \overline{\beta}_{p+1,k} - \overline{\alpha}_{p+1,k} \beta_{p+1,k}, \; k = 1,..., p+1. \qquad (1.8.8)$$

Обратно, любые линейные независимые граничные условия вида (1.8.7), которые удовлетворяют соотношениям (1.8.8), задают область определения некоторого самосопряженного ограничения Λ оператора Λ_0, если выполнено предположение (1.8.1).

Доказательство. Следуя доказательству теоремы 5 §18 из монографии [12], введем функции $\vec{V}_1,...,\vec{V}_{p+1}$. Точнее, $\vec{V}_k$ из области определения $D(\Lambda_{\max})$ с условиями

$$\begin{aligned} &v_{kj}^{'}(1)=\alpha_{jk},\ v_{kj}(1)=-\beta_{jk}\ , j=1,...,p, \\ &v_{k,p+1}^{'}(0)=-\alpha_{p+1,k}, v_{k,p+1}(0)=\beta_{p+1,k}. \end{aligned} \tag{1.8.9}$$

Согласно лемме 1.8.2 такие решения существуют. Тогда условия (1.8.7) при $k=1,...,p+1$ имеет вид

$$U_k(\vec{Y})=\sum_{j=1}^{p}[y_j(1)v_{kj}^{'}(1)-y_j^{'}(1)v_{kj}(1)]-[y_{p+1}(0)v_{k,p+1}^{'}(0)-y_{p+1}^{'}(1)v_{k,p+1}(0)]=0$$

По результатам монографии [12] граничные условия (1.8.7) задают область определения самосопряженного ограничения Λ оператора Λ_0. Если и только если все функции $\vec{V}_1,...,\vec{V}_{p+1}$, определяемые (1.8.9), также удовлетворяют следующим соотношениям

$$U_k(\vec{Y}_j)=0,\ k, j=1,...,p+1.$$

Теорема доказана.

1.9 Корректные сужения максимального оператора $\Lambda_{\max}$ на граф-дереве

В предыдущем параграфе представлено полное описание всех самосопряженных сужений максимального оператора $\Lambda_{\max}$. Теперь опишем корректные сужения максимального оператора $\Lambda_{\max}$. Напомним определение корректных сужений оператора [71, 72]. Оператор Λ называется корректными сужениями максимального оператора $\Lambda_{\max}$, если выполнены следующие условия

а) $\Lambda \subset \Lambda_{\max}$,

б) $\exists \Lambda^{-1}$ ограниченный оператор в $L_2(\Im)$.

Мотивируя работами [71, 72], во-первых, нам нужно выбрать некоторое фиксированное корректное сужение Λ_1 максимального оператора $\Lambda_{\max}$. После этого, зная обратный оператор Λ_1^{-1}, нам нужно описать все другие корректные сужения.

1.10 Функция Грина для фиксированного корректного сужения

В качестве фиксированного корректного сужения максимального оператора $\Lambda_{\max}$ возьмем оператор $\Lambda_1 \subset \Lambda_{\max}$ с областью определения

$$D(\Lambda_1) = \{\vec{Y} \in D(\Lambda_{\max}) : y_j(1) = 0,\ j = 1,..., p,\ y_{p+1}(0) = 0\}.$$

Далее, мы предполагаем, что предположение 1.8.1 верно для $i = 1$. По предположению 1.8.1 существует ограниченный оператор Λ_1^{-1} в пространстве $L_2(\Im)$ при $i = 1$. В этом пункте мы находим структуру обратного оператора Λ_1^{-1}. Итак, рассмотрим операторное уравнение $\Lambda_1 \vec{Y} = \vec{F}$ для произвольного $\vec{F}$ из $L_2(\Im)$. Нам нужно выразить его решение $\vec{Y} = \{y_j(x_j), x_j \in e_j,\ j = 1,..., r\} \in D(\Lambda_1)$ по $\vec{F} = \{f_j(x_j), x_j \in e_j,\ j = 1,..., r\} \in D(\Lambda_1)$. Известно [30], что на дуге e_j функция $y_j(x_j)$ удовлетворяет уравнению

$$-y_j^{''}(x_j)+q_j(x_j)y_j(x_j)=f_j(x_j), x_j\in e_j,$$

и решение имеет вид

$$y_j(x_j)=y_j(0)c_j(x_j)+y_j^{'}(0)s_j(x_j)+\int_0^{x_j} g_j(x_j,t)\,f_j(t)dt, \qquad (1.10.1)$$

где $\{c_j(x_j), s_j(x_j)\}-$ фундаментальное множество решений однородного уравнения $-y_j^{''}(x_j)+q_j(x_j)y_j(x_j)=0$, подчиненные условиям Коши $s_j^{'}(0)=c_j(0)=1, s_j(0)=c_j^{'}(0)=0.$ В формуле (1.10.1) также появляется функция Коши $g_j(x_j,t)$, определяемая как формула

$$g_j(x_j,t)=\begin{vmatrix} c_j(t) & s_j(t) \\ c_j(x) & s_j(x) \end{vmatrix}, t<x_j.$$

Удобно ввести следующее обозначение

$$g_j(x_j,t)=\begin{cases} 0 \ \text{ если } \ x_j\le t<1, \\ g_j(x_j,t) \ \text{ если } \ 0\le t<x_j. \end{cases}$$

Формула (1.10.1) для $x_j\in e_j$ имеет вид

$$y_j(x_j)=y_j(0)c_j(x_j)+y_j^{'}(0)s_j(x_j)+\int_{e_j} g_j(x_j,t)\,f_j(t)dt. \qquad (1.10.2)$$

Поскольку существует Λ_1^{-1}, то значения $y_j(0)$ и $y_j^{'}(0)$ могут быть однозначно определены с помощью $\vec{F}$. Поскольку Λ_1 является линейным оператором, то обратный оператор Λ_1^{-1} также является линейным. Следовательно, функционалы $y_j(0)$ и $y_j^{'}(0)$ линейно зависят от $\vec{F}$. Из ограниченности оператора Λ_1^{-1} следует ограниченность линейных функционалов $y_j(0)$ и $y_j^{'}(0)$ в $L_2(\Im)$. Следовательно, по теореме Рисса о представлении общего вида непрерывного линейного функционала [35-38] в $L_2(\Im)$ вытекает утверждение: в $L_2(\Im)$ существуют функции $\overrightarrow{A_j}$ и $\overrightarrow{B_j}$, такие что

$$\begin{aligned} y_j(0) &= \sum_{k=1}^{r} \int_{e_k} a_{jk}(x) f_k(x) dx, \\ y_j^{'}(0) &= \sum_{k=1}^{r} \int_{e_k} b_{jk}(x) f_k(x) dx. \end{aligned} \tag{1.10.3}$$

Из соотношений (1.9.2) в силу (1.9.3) следует, что

$$y_j(x_j) = \sum_{k=1}^{r} \int_{e_k} \{a_{jk}(t)c_j(x_j) + b_{jk}(t)s_j(x_j)\} f_k(t)dt + \int_{e_j} g_j(x_j,t) f_j(t)dt. \tag{1.10.4}$$

Таким образом, для фиксированного $x_j \in e_j$ правая часть соотношения (1.10.4) имеет вид внутреннего произведения пространства $L_2(\Im)$. Следовательно, формула (1.10.4) для $j = 1,...,r$ можно переписать в виде

$$y_j(x_j) = \sum_{k=1}^{r} \int_{e_k} d_{jk}(x_j,t_k)dt_k, x_j \in e_j, \tag{1.10.5}$$

где $d_{jk}(x_j,t_k)$ некоторый набор функций.

Итак, обратный оператор Λ_1^{-1} определяется формулой (1.10.5). Матрицу $D = \| d_{jk}(x_j,t_k) \|$ обычно называют функцией Грина оператора Λ_1.

Замечание 1.10.1. Вместо сужения оператора Λ_1 можно выбрать другие обратимые сужения максимального оператора $\Lambda_{\max}$. Возникает следующий вопрос: обратный оператор какого сужения имеет более простую форму? Например, ограниченный обратный сужения оператора $\Lambda_3 \subset \Lambda_{\max}$ в области определения

$$D(\Lambda_3)=\{\vec{Y}\in D(\Lambda_{\max}): y_j(1)=0,\ j=1,...,p-1, y_{p+1}(0)=y'_{p+1}(0)=0\}$$

Имеет следующий вид

$$y_j(x_j)=\sum_{k=2}^{|s_j|-1}\int\limits_{e_{n_{k,j}}} d_{n_{k,j}}(x_j,t)\,f_{n_{k,j}}(t)dt, x_j\in e_j. \qquad (1.10.6)$$

Здесь $s_j=\{n_{1j},n_{2j},...,n_{|s_j|,j}\}-$ путь, соединяющий вершины 0 и j. Ясно, что $n_{1j}=0, n_{2j}=p+1,...,n_{|s_j|,j}=j.$ В отличие от формулы (1.10.5) в формуле (1.10.6) появляются только дуги, образующие путь s_j. В то же время в правой части формулы (1.10.5) важно, чтобы граф был деревом, т. е. все дуги дерева будут участвовать в формуле (1.10.6).

1.11 Описание корректных сужений

Пусть $\vec{H}=\{h_j(x_j), x_j\in e_j, j=1,...,r\}-$ произвольный элемент множества $D(\Lambda_{\max})$.

Введем новую функцию $\vec{Z}=\{z_j(x_j), x_j\in e_j, j=1,...,r\}$ по формуле (1.10.5)

$$z_j(x_j)=\sum_{k=1}^{r}\int\limits_{e_k} d_{jk}(x_j,t_k)(-h_k''(t_k)+q_k(t_k)h_k(t_k))dt_k, x_j\in e_j. \qquad (1.11.1)$$

Ясно, что функция $\vec{Z}$ имеет следующие свойства

$$-z_j''(x_j)+q_j(x_j)z_j(x_j)=-h_j''(x_j)+q_j(x_j)h_j(x_j), x_j\in e_j, \qquad (1.11.2)$$

$$z_{p+1}(0)=0, z_1(1)=z_2(1)=...=z_p(1)=0, \qquad (1.11.3)$$

$$\vec{Z}\in D(\Lambda_1)\subset D(\Lambda_{\max}). \qquad (1.11.4)$$

С другой стороны, используя формулу Лагранжа (1.7.7) правую часть (1.11.1) можно переписать в виде

$$z_j(x_j)=\sum_{k=1}^{r}\int\limits_{e_k}(-d''_{jk}(x_j,t_k)+q_k(t_k)d_{jk}(x_j,t_k))h_k(t_k)dt_k+\sum_{k=1}^{p}[-h'_k(1)d_{jk}(x_j,1)+h_k(1)\frac{\partial}{\partial t}d_{jk}(x_j,1)]+$$

$$+[h'_{p+1}(0)d_{j,p+1}(x_j,0)-h_{p+1}(0)\frac{\partial}{\partial t_{p+1}}d_{j,p+1}(x_j,0)].$$

Следовательно, согласно (1.11.2) и (1.11.3) имеем

$$z_j(x_j) = h_j(x_j) - h_{p+1}(0)\frac{\partial}{\partial t_{p+1}} d_{j,p+1}(x_j,0) + \sum_{k=1}^{p} h_k(1)\frac{\partial}{\partial t_k} d_{jk}(x_j,1). \qquad (1.11.5)$$

Таким образом, справедливо следующее утверждение.

Лемма 1.11.1. Равенство (1.11.5) выполняется для всех функций $\vec{H} = \{h_j(x_j), x_j \in e_j,\ j = 1,...,r\}$, где $\vec{Z} = \Lambda_1^{-1}(\Lambda_{\max}\vec{H})$.

Из леммы 1.11.1 немедленно вытекает следующее следствие.

Следствие 1.11.1. Следующие равенства справедливы

$$\frac{\partial}{\partial t_{p+1}} d_{p+1,p+1}(x_{p+1},0)\,|_{x_{p+1}=0} = 1,$$

$$\frac{\partial}{\partial t_{p+1}} d_{j,p+1}(x_j,0)\,|_{x_j=1} = 0,$$

$$\frac{\partial}{\partial t_k} d_{j,k}(x_j,1)\,|_{x_j=1} = \delta_{jk}, k = 1,..., p,\ j = 1,..., p.$$

Отсюда следует, что, во-первых, тождество (1.11.5) выполняется для всех $\vec{H} \in D(\Lambda_{\max})$ и функция $\vec{Z}$ удовлетворяет соотношениям (1.11.3).

Теперь мы формируем новые функции

$$w_j(x_j) = y_j(x_j) - h_{p+1}(0)\frac{\partial}{\partial t_{p+1}} d_{j,p+1}(x_j,0) + \sum_{k=1}^{p} h_k(1)\frac{\partial}{\partial t_k} d_{jk}(x_j,1), x_j \in e_j \qquad (1.11.6)$$

для $j = 1,...,r$, где $\vec{H}$ произвольная функция из $D(\Lambda_{\max})$, и функция $y_j(x_j)$ определенные по формулам (1.10.5).

Теорема 1.11.1. Функция $\vec{W} = \{w_j(x_j), x_j \in e_j,\ j = 1,...,r\}$, введенная по формуле (1.11.6), является решением следующей задачи

$$\Lambda_{\max}\vec{W} = \vec{F}, \vec{W} \in D(\Lambda_{\max}), \qquad (1.11.7)$$

$$w_{p+1}(0) = h_{p+1}(0), w_j(1) = h_j(1),\ j = 1,...,r. \qquad (1.11.8)$$

Более того, решение задачи (1.11.7), (1.11.8) единственно, т.е. решение задачи (1.11.7), (1.11.8) зависит только от множества $\{h_{p+1}(0), h_1(1), ..., h_p(1)\}$, но не зависит от функции $h_j(x_j), x_j \in e_j, j = 1, ..., r.$.

Доказательство. Из следствия 1.11.1 вытекает справедливость равенства (1.11.8). Для проверки равенства (1.11.7) достаточно вспомнить, что функция Грина $d_{jk}(x_j, t)$ является решением соответствующего однородного уравнения для $\overrightarrow{X} = (x_1, ..., x_r) \neq \vec{T} = (t_1, ..., t_r).$. Из предположения 1.8.1 вытекает единственность задачи (1.11.7), (1.11.8) для $j = 1.$ Тем самым доказательство теоремы 1.11.1 завершено.

Теперь мы покажем, как построить новые граничные корректные задачи для уравнения $\Lambda_{\max} \vec{Y} = \vec{F}$, применяя теорему 1.11.1. Достаточно того, что $\vec{H}$ будет зависеть непрерывно на $\vec{F}$ в теореме 1.11.1, т. е. существует непрерывный оператор K, отображающий $\vec{F}$ из $L_2(\Im)$ в $\vec{H}$

Итак, пусть $\vec{H} = K\vec{F}$. Тогда задача (1.11.7), (1.11.8) имеет вид

$$\Lambda_{\max} \vec{W} = \vec{F}, \vec{W} \in D(\Lambda_{\max}), \tag{1.11.9}$$

$$w_j(1) = (K\Lambda_{\max} \vec{F})_j(1), j = 1, ..., r, w_{p+1}(0) = (K\Lambda_{\max} \vec{F})_{p+1}(0). \tag{1.11.10}$$

Условия (1.11.10), налагаемые на функции $\vec{W}$, можно интерпретировать как дополнительные условия для того, чтобы уравнение (1.11.9) имело единственное решение для любой правой руки сторона $\vec{F}$. Таким образом, задача (1.11.9),(1.11.10) представляет всюду корректную задачу с новым «граничным» условием (1.11.10). Итак, следующее утверждение верно.

Теорема 1.11.1 Для всех непрерывных операторов K, отображающих пространство $L_2(\Im)$ в $D(\Lambda_{\max})$, задача (1.11.9), (1.11.10) имеет единственное устойчивое решение для всех $\vec{F}$. Обратное утверждение также верно.

2 ФУНКЦИЯ ГРИНА ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО ОПЕРАТОРА НА ГРАФЕ

В данном разделе исследуется система дифференциальных уравнений второго порядка, являющейся моделью колебательных систем со стержневой конструкцией. Для операторов с нулевыми и произвольными потенциалами построена функция Грина. На основании полученных формул построено вычетное разложение для резольвенты оператора с условием Кирхгофа во внутренней вершине и условием Дирихле в граничных вершинах. Данное вычетное разложение сравнивается со спектральным разложением и устанавливается взаимосвязь между этими разложениями.

2.1 Основные понятия, связанные с граф-звездой

Граф-звезда – это связный граф, в котором не более одной вершины имеет степень больше единицы. Вершина, имеющая степень больше единицы, называется внутренней вершиной. Остальные вершины граф-звезды назовем граничными.

Пусть задан ориентированный граф-звезда $\Im = \{V, E\}$, где $V, E -$ два множества. Элементы множества $V -$ называются вершинами графа, через $E -$ обозначено множество его дуг. Количество дуг обозначим через m. Пусть $I = \{0\} -$ внутренняя вершина, $\Gamma = \{1, ..., m\} -$ граничные вершины. При $j = \overline{1, m}$ входящую в вершину j дугу обозначим через e_j. В дальнейшем считаем, что длина каждой дуги $|e_j| = a_j$. На каждой дуге e_j введем переменную $x_j \in [0, a_j]$. Для удобства обозначим значение $x_j = a_j$ соответствующее граничной вершине дуги e_j, а значение $x_j = 0$ - внутренней вершине.

Определения и понятия данного пункта заимствованы из работ автора [66,67].

2.2 Определение дифференциального оператора на граф-звезде при m дугах

Рассмотрим пространство [43]

$$L_2(\Im) = \prod_{e \in E} L_2(e\ )$$

с элементами

$$\vec{Y}(\vec{X}) = [y_e(x_e), e \in E]^T,$$

(где $\vec{X} = (x_e, e \in E)$ и $\prod_{e \in E}$ – декартово произведение подпространств) и с конечной нормой [43]

$$\| \vec{Y} \|_{L_2(\Im)} = \sqrt{\sum_{e \in E} \int_e | y_e(x_e) |^2 \, dx_e}.$$

Точно также введем пространство [43]

$$W_2^2(\Im) = \prod_{e \in E} W_2^2(e).$$

Рассмотрим множество функций $D(\Lambda) \subset W_2^2(\Im)$, элементы которых во внутренней вершине удовлетворяют условиям Кирхгофа [11]

$$\begin{aligned} & y_1(0) = y_j(0),\ j = 2, \ldots, m \\ & \sum_{j=1}^{m} y_j^{'}(0) = 0 \end{aligned} \qquad (2.2.1)$$

В пространстве $L_2(\Im)$ рассмотрим дифференциальный оператор Λ, задаваемый линейными дифференциальными выражениями

$$-y_j^{"}(x_j)+q_j(x_j)y_j(x_j)=\lambda y_j(x_j)+f_j(x_j),\ j=1,...,m \qquad (2.2.2)$$

с областью определения $D(\Lambda)$. Здесь $\{q_j(x_j),0<x_j<a_i\}-$ потенциал, $\lambda-$ спектральный параметр, $\{f_j(x_j),0<x_j<a_i\}-$плотность распределения внешней силы.

Условия Дирихле в граничных вершинах

$$y_1(a_1)=...=y_m(a_m)=0. \qquad (2.2.3)$$

Материал данного пункта соответствует работе автора [67].

2.3 Построение функции Грина задачи Дирихле на отрезке

Результаты этого пункта хорошо известны [34].

В настоящем пункте изучается вопрос о построении функции Грина для задачи Дирихле на отрезке

$$-y''(x)+q(x)y(x)=\lambda y(x)+F(x),\ \ 0<x<a, \qquad (2.3.1)$$

$$y(a)=0,\ y(0)=0, \qquad (2.3.2)$$

где $q(\cdot)-$суммируемая на $[0,a]$ функция.

Под функцией Грина мы понимаем скалярную функцию двух переменных $G(x,t,\lambda)$при каждой $F(\cdot)$ непрерывной на отрезке $[0,a]$ и задаваемую формулой [66]

$$y(x,\lambda)=\int_0^a G(x,t,\lambda)F(t)dt,$$

где $y(x,\lambda)$ – решение задачи (2.3.1)-(2.3.2). Известно следующее утверждение [25].

Лемма 2.3.1 Решение задачи (2.3.1), (2.3.2) может быть представлено в виде

$$y(x,\lambda)=\int_0^x \frac{s_0(t,\lambda)s_a(x,\lambda)}{D(t,\lambda)}F(t)dt+\int_x^a \frac{s_a(t,\lambda)s_0(x,\lambda)}{D(t,\lambda)}F(t)dt, \qquad (2.3.3)$$

где $D(t,\lambda)=-s_a'(t,\lambda)s_0(t,\lambda)+s_a(t,\lambda)s_0'(t,\lambda)$ и функций $s_0(x,\lambda)$ и $s_a(x,\lambda)$ являются линейно независимыми решениями однородного уравнения с условиями Коши

$$-s_0''(x)+q(x)s_0(x)=\lambda s_0(x),\quad 0<x<a,\quad s_0(0,\lambda)=0, s_0'(0,\lambda)=1,$$
$$-s_a''(x)+q(x)s_a(x)=\lambda s_a(x),\quad 0<x<a,\quad s_a(a,\lambda)=0, s_a'(a,\lambda)=1.$$

Доказательство. Покажем, что правая часть выражения (2.3.3) является решением задачи (2.3.1), (2.3.2). Сначала вычислим первую производную правой части (2.3.3)

$$y'(x,\lambda)=\int_0^x \frac{s_0(t,\lambda)s_a'(x,\lambda)}{D(t,\lambda)}F(t)dt+\int_x^a \frac{s_a(t,\lambda)s_0'(x,\lambda)}{D(t,\lambda)}F(t)dt,$$

Затем вычислим вторую производную правой части (2.3.3)

$$y''(x,\lambda)=\int_0^x \frac{s_0(t,\lambda)s_a''(x,\lambda)}{D(t,\lambda)}F(t)dt+\int_x^a \frac{s_a(t,\lambda)s_0''(x,\lambda)}{D(t,\lambda)}F(t)dt-F(x).$$

Так как $s_0''(x,\lambda)=(q(x)-\lambda)s_0(x,\lambda)$, $s_a''(x,\lambda)=(q(x)-\lambda)s_a(x,\lambda)$ тогда с учетом (2.3.3), получим равенство

$$y''(x,\lambda)=(q(x)-\lambda)\left(\int_0^x \frac{s_0(t,\lambda)s_a(x,\lambda)}{D(t,\lambda)}F(t)dt+\int_x^a \frac{s_a(t,\lambda)s_0(x,\lambda)}{D(t,\lambda)}F(t)dt\right)-F(x)=$$
$$=(q(x)-\lambda)y(x,\lambda)-F(x)$$

отсюда следует соотношение (2.3.1).
Теперь проверим выполнение граничных условий (2.3.2). Подставляя в (2.3.3) значение $x=0$, получим равенство

$$y(0,\lambda)=\int_x^a \frac{s_a(t,\lambda)s_0(0,\lambda)}{D(t,\lambda)}F(t)dt=0,$$

так как $s_0(0,\lambda)=0.$ Подставляя в (2.3.3) значение $x=a$, получим равенство

$$y(a,\lambda)=\int_x^a \frac{s_0(t,\lambda)s_a(a,\lambda)}{D(t,\lambda)}\vec{F}(t)dt=0,$$

так как $s_a(a,\lambda)=0.$ Лемма 2.3.1 доказана.

Лемма 2.3.1 применяется при построении функции Грина задачи Дирихле на граф-звезде.

2.4 Функция Грина задачи Дирихле на граф-звезде с m дугами с нулевыми потенциалами

В данном пункте построим функцию Грина задачи Дирихле на граф-звезде, используя результаты пункта 2.3.

Для этого надо решить следующую задачу для дифференциального оператора на граф-звезде с m дугами.

$$\begin{cases} -y_1''(x_1)=\lambda y_1(x_1)+f_1(x_1),\ x_1\in e_1 \\ -y_2''(x_2)=\lambda y_2(x_2)+f_2(x_2),\ x_2\in e_2 \\ \dots \quad \dots \quad \dots \\ -y_m''(x_m)=\lambda y_m(x_m)+f_m(x_m),\ x_m\in e_m \end{cases}$$

Также выполнены условия Дирихле в граничных вершинах:

$$y_1(a_1)=y_2(a_2)=\dots=y_m(a_m)=0$$

и условия Кирхгофа во внутренней вершине:

$$y_1(0) = y_2(0) = ... = y_m(0),$$
$$\sum_{k=1}^{m} y_1'(0) = 0$$

Сформулируем основное утверждение данного пункта.

Теорема 2.4.1 Пусть $q_j(x_j) \equiv 0,\ x_j \in [0, a_j],\ j = 1,...,m$. Тогда при произвольных $\{f_1(\cdot) \in L_2(e_1),..., f_m(\cdot) \in L_2(e_1)\}$ решение задачи (2.2.1),(2.2.2),(2.2.3) может быть записано в виде при $0 < x_j < a_j$, $j = 1,...,m$

$$y_j(x_j) = \frac{1}{\sum_{k=1}^{m} \sqrt{\lambda}\, ctg\sqrt{\lambda} a_k} \left(\sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^{m} \int_0^{a_k} \frac{\sin\sqrt{\lambda}(a_k - t_k)}{\sin\sqrt{\lambda} a_k} \cdot \frac{\sin\sqrt{\lambda}(a_j - x_j)}{\sin\sqrt{\lambda} a_j} f_k(t_k)\, dt_k + \right.$$
$$+ \int_0^{x_j} \frac{\sin\sqrt{\lambda}(a_j - x_j)}{\sin\sqrt{\lambda} a_j} \left(\sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^{m} \sin\sqrt{\lambda} t_j\, ctg\sqrt{\lambda} a_k + \cos\sqrt{\lambda} t_j \right) f_j(t_j)\, dt_j +$$
$$\left. + \int_{x_j}^{a_j} \frac{\sin\sqrt{\lambda}(a_j - t_j)}{\sin\sqrt{\lambda} a_j} \left(\sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^{m} \sin\sqrt{\lambda} x_j\, ctg\sqrt{\lambda} a_k + \cos\sqrt{\lambda} x_j \right) f_j(t_j)\, dt_j \right) \tag{2.4.1}$$

Доказательство. Покажем, что правая часть равенства (2.4.1) представляет решение задачи Дирихле с условиями Кирхгофа во внутренней вершине. Проверка выполнения уравнения (2.2.2) при $q_j(x_j) \equiv 0,\ x_j \in [0, a_j],\ j = 1,...,m$. Сначала вычислим первую производную правой части (2.4.1)

$$y_j'(x_j)=\frac{1}{\sum_{k=1}^{m}\sqrt{\lambda}\,ctg\sqrt{\lambda}a_k}\left(\sum_{\substack{k=1\\k\neq j}}^{m}\int_0^{a_k}\frac{\sin\sqrt{\lambda}\left(a_k-t_k\right)}{\sin\sqrt{\lambda}a_k}\cdot\frac{(-\sqrt{\lambda})\cos\sqrt{\lambda}\left(a_j-x_j\right)}{\sin\sqrt{\lambda}a_j}f_k\left(t_k\right)dt_k+\right. \qquad (2.4.2)$$

$$+\int_0^{x_j}\frac{(-\sqrt{\lambda})\cos\sqrt{\lambda}\left(a_j-x_j\right)}{\sin\sqrt{\lambda}a_j}\left(\sum_{\substack{k=1\\k\neq j}}^{m}ctg\sqrt{\lambda}a_k\sin\sqrt{\lambda}t_j+\cos\sqrt{\lambda}t_j\right)f_j\left(t_j\right)dt_j+$$

$$\left.+\int_{x_j}^{a_j}\frac{\sqrt{\lambda}\sin\sqrt{\lambda}\left(a_j-t_j\right)}{\sin\sqrt{\lambda}a_j}\left(\sum_{\substack{k=1\\k\neq j}}^{m}\cos\sqrt{\lambda}x_j\,ctg\sqrt{\lambda}a_k-\sin\sqrt{\lambda}x_j\right)f_j\left(t_j\right)dt_j\right)$$

Теперь вычислим вторую производную правой части (2.4.1)

$$y_j''\left(x_j\right)=\frac{1}{\sum_{k=1}^{m}\sqrt{\lambda}\,ctg\sqrt{\lambda}a_k}\left(\sum_{\substack{k=1\\k\neq j}}^{m}\int_0^{a_k}\frac{\sin\sqrt{\lambda}\left(a_k-t_k\right)}{\sin\sqrt{\lambda}a_k}\cdot\frac{(-\lambda)\sin\sqrt{\lambda}\left(a_j-x_j\right)}{\sin\sqrt{\lambda}a_j}f_k\left(t_k\right)dt_k+\right. \qquad (2.4.3)$$

$$+\int_{x_j}^{a_j}\frac{(-\lambda)\sin\sqrt{\lambda}\left(a_j-x_j\right)}{\sin\sqrt{\lambda}a_j}\left(\sin\sqrt{\lambda}t_j\left(ctg\sqrt{\lambda}a_1+\ldots+ctg\sqrt{\lambda}a_{j-1}+ctg\sqrt{\lambda}a_{j+1}+\ldots+ctg\sqrt{\lambda}a_m\right)+\cos\sqrt{\lambda}t_j\right)f_j\left(t_j\right)dt_j-$$

$$-\int_{x_j}^{a_j}\frac{\lambda\sin\sqrt{\lambda}(a_j-t_j)}{\sin\sqrt{\lambda}a_j}\left(\sqrt{\lambda}ctg\sqrt{\lambda}a_k\cos\sqrt{\lambda}t_j+\cos\sqrt{\lambda}t_j\right)f_j\left(t_j\right)dt_j+$$

$$+\left[\frac{\cos\sqrt{\lambda}(a_j-x_j)}{\sin\sqrt{\lambda}a_j}\left(ctg\sqrt{\lambda}a_1+\ldots+ctg\sqrt{\lambda}a_{j-1}+ctg\sqrt{\lambda}a_{j+1}+\ldots+ctg\sqrt{\lambda}a_m\right)\sin\sqrt{\lambda}x_j+\cos\sqrt{\lambda}x_j\right]+$$

$$\left.+\frac{\sin\sqrt{\lambda}(a_j-x_j)}{\sin\sqrt{\lambda}a_j}\left[\left(ctg\sqrt{\lambda}a_1+\ldots+ctg\sqrt{\lambda}a_{j-1}+ctg\sqrt{\lambda}a_{j+1}+\ldots+ctg\sqrt{\lambda}a_m\right)\cos\sqrt{\lambda}x_1-\sin\sqrt{\lambda}x_j\right]\right)$$

Отдельно вычислим вне интегральный член

$$\frac{\left(-\sqrt{\lambda}\right)f_j(x_j)}{\sqrt{\lambda}\left(ctg\sqrt{\lambda}a_1+...+ctg\sqrt{\lambda}a_m\right)}\left[\frac{\cos\sqrt{\lambda}(a_j-x_j)}{\sin\sqrt{\lambda}a_j}\left[\left(ctg\sqrt{\lambda}a_1+...+ctg\sqrt{\lambda}a_{j-1}+ctg\sqrt{\lambda}a_{j+1}+...+ctg\sqrt{\lambda}a_m\right)\sin\sqrt{\lambda}x_j+\cos\sqrt{\lambda}x_j\right]\right]+$$

$$+\frac{\sin\sqrt{\lambda}(a_j-x_j)}{\sin\sqrt{\lambda}a_j}\left[\left(ctg\sqrt{\lambda}a_1+...+ctg\sqrt{\lambda}a_{j-1}+ctg\sqrt{\lambda}a_{j+1}+...+ctg\sqrt{\lambda}a_m\right)\cos\sqrt{\lambda}x_j-\sin\sqrt{\lambda}x_j\right]=$$

$$=-\frac{f_j(x_j)}{\left(ctg\sqrt{\lambda}a_1+...+ctg\sqrt{\lambda}a_m\right)\sin\sqrt{\lambda}a_j}\left(ctg\sqrt{\lambda}a_1+...+ctg\sqrt{\lambda}a_{j-1}+ctg\sqrt{\lambda}a_{j+1}+...+ctg\sqrt{\lambda}a_m+ctg\sqrt{\lambda}a_j\right)=-f_j(x_j)$$

Подставляя полученное выражение в (2.4.3), получим требуемое равенство (2.2.2).

Проверка выполнения условии Кирхгофа (2.2.1) во внутренней вершине. В равенство (2.4.1) подставим $x_j=0$. Тогда получим

$$y_j(0)=\frac{1}{\sum_{k=1}^{m}\sqrt{\lambda}\,ctg\sqrt{\lambda}a_k}\left(\sum_{\substack{k=1\\k\neq j}}^{m}\int_0^{a_k}\frac{\sin\sqrt{\lambda}\left(a_k-t_k\right)}{\sin\sqrt{\lambda}a_k}f_k\left(t_k\right)dt_k+\int_0^{a_j}\frac{\sin\sqrt{\lambda}\left(a_j-t_j\right)}{\sin\sqrt{\lambda}a_j}f_j\left(t_j\right)dt_j\right)=$$

$$=\frac{1}{\sum_{k=1}^{m}\sqrt{\lambda}\,ctg\sqrt{\lambda}a_k}\left(\sum_{k=1}^{m}\int_0^{a_k}\frac{\sin\sqrt{\lambda}\left(a_k-t_k\right)}{\sin\sqrt{\lambda}a_k}f_k\left(t_k\right)dt_k\right)$$

Отсюда следуют равенства

$$y_1(0)=...=y_m(0).$$

В равенство (2.4.2) подставим $x_j=0$. Тогда получим

$$y_j^{'}(0)=\frac{1}{\sum_{k=1}^{m}\sqrt{\lambda}\,ctg\sqrt{\lambda}a_k}\left(\sum_{\substack{k=1\\k\neq j}}^{m}\int_0^{a_k}\frac{\sin\sqrt{\lambda}\left(a_k-t_k\right)}{\sin\sqrt{\lambda}a_k}\cdot\frac{(-\sqrt{\lambda})\cos\sqrt{\lambda}a_j}{\sin\sqrt{\lambda}a_j}f_k\left(t_k\right)dt_k+\right.$$

$$\left.+\int_0^{a_j}\frac{\sqrt{\lambda}\sin\sqrt{\lambda}\left(a_j-t_j\right)}{\sin\sqrt{\lambda}a_j}\left(\sum_{\substack{k=1\\k\neq j}}^{m}ctg\sqrt{\lambda}a_k\right)f_j\left(t_j\right)dt_j\right)$$

Теперь проверим второе условие Кирхгофа (2.2.1).

$$y_1'(0)+y_2'(0)+\ldots+y_m'(0)=0$$

Для этого достаточно проверить следующее равенство

$$\sum_{j=1}^{m}\left(-ctg\sqrt{\lambda}a_j\left[\sum_{k=1}^{m}\int_0^{a_k}\frac{\sin\sqrt{\lambda}(a_k-t_k)}{\sin\sqrt{\lambda}a_k}f_k(t_k)dt_k-\int_0^{a_j}\frac{\sin\sqrt{\lambda}(a_j-t_j)}{\sin\sqrt{\lambda}a_j}f_j(t_j)dt_j\right]+\right.$$
$$\left.+\sum_{j=1}^{m}\left(\sum_{k=1}^{m}ctg\sqrt{\lambda}a_k-ctg\sqrt{\lambda}a_j\right)\int_0^{a_j}\frac{\sin\sqrt{\lambda}(a_j-t_j)}{\sin\sqrt{\lambda}a_j}f_j(t_j)dt_j\right)=0$$

Остается проверить условия Дирихле (2.2.3) в граничных вершинах.

В равенство (2.4.1) подставим $x_j=a_j$. Тогда получим

$$y_j(a_j)=\frac{1}{\sum_{k=1}^{m}\sqrt{\lambda}\,ctg\sqrt{\lambda}a_k}\left(\sum_{\substack{k=1\\k\neq j}}^{m}\int_0^{a_k}\frac{\sin\sqrt{\lambda}(a_k-t_k)}{\sin\sqrt{\lambda}a_k}\cdot\frac{\sin\sqrt{\lambda}(a_j-a_j)}{\sin\sqrt{\lambda}a_j}f_k(t_k)dt_k+\right.$$
$$+\int_0^{a_j}\frac{\sin\sqrt{\lambda}(a_j-a_j)}{\sin\sqrt{\lambda}a_j}\left(\sum_{\substack{k=1\\k\neq j}}^{m}\sin\sqrt{\lambda}t_j\,ctg\sqrt{\lambda}a_k+\cos\sqrt{\lambda}t_j\right)f_j(t_j)dt_j+$$
$$\left.+\int_{a_j}^{a_j}\frac{\sin\sqrt{\lambda}(a_j-t_j)}{\sin\sqrt{\lambda}a_j}\left(\sum_{\substack{k=1\\k\neq j}}^{m}\sin\sqrt{\lambda}x_j\,ctg\sqrt{\lambda}a_k+\cos\sqrt{\lambda}x_j\right)f_j(t_j)dt_j\right)=0$$

Теорема полностью доказана. Из теоремы 2.4.1 вытекает представление функции Грина задачи (2.2.1),(2.2.2),(2.2.3).

Теорема 2.4.2 Для функций Грина задачи (2.2.1),(2.2.2),(2.2.3) справедливо представление

$$G(\vec{x},\vec{t},\lambda)=\frac{1}{\Delta(\lambda)}\left(B\times B^T-diag\left[h_1(x_1,t_1,\lambda),h_2(x_2,t_2,\lambda),\ldots,h_m(x_m,t_m,\lambda)\right]+\right.$$
$$+diag\left[w_1(x_1,t_1,\lambda),w_2(x_2,t_2,\lambda),\ldots,w_m(x_m,t_m,\lambda)\right]\theta(x_j-t_j)+$$
$$\left.+diag\left[w_1(t_1,x_1,\lambda),w_2(t_2,x_2,\lambda),\ldots,w_m(t_m,x_m,\lambda)\right]\theta(t_j-x_j)\right)$$

где

$$\Delta(\lambda)=\frac{1}{\sum\limits_{k=1}^{m}\sqrt{\lambda}\,ctg\sqrt{\lambda}a_k},$$

$$B^T(\vec{t},\lambda)=\left[\frac{\sin\sqrt{\lambda}\left(a_1-t_1\right)}{\sin\sqrt{\lambda}a_1},\frac{\sin\sqrt{\lambda}\left(a_2-t_2\right)}{\sin\sqrt{\lambda}a_2},...,\frac{\sin\sqrt{\lambda}\left(a_m-t_m\right)}{\sin\sqrt{\lambda}a_m}\right]^T,$$

$$h_j(x_j,t_j,\lambda)=\frac{\sin\sqrt{\lambda}\left(a_j-x_j\right)}{\sin\sqrt{\lambda}a_j}\frac{\sin\sqrt{\lambda}\left(a_j-t_j\right)}{\sin\sqrt{\lambda}a_j},$$

$$w_j(x_j,t_j,\lambda)=\frac{\sin\sqrt{\lambda}\left(a_j-x_j\right)}{\sin\sqrt{\lambda}a_j}\left(\sum_{\substack{k=1\\k\neq j}}^{m}\sin\sqrt{\lambda}t_j\,ctg\sqrt{\lambda}a_k+\cos\sqrt{\lambda}t_j\right),$$

Доказательство. Для доказательства теоремы 2.4.2 запишем решение задачи (2.2.1),(2.2.2),(2.2.3) в матрично-векторной форме. Для этого введем обозначения

$$\vec{Y}\left(\vec{X}\right)=\left[y_1\left(x_1\right),...,y_2\left(x_2\right)\right]^T,$$

$$\Psi(t_j,\lambda)=\sum_{\substack{k=1\\k\neq j}}^{m}\sin\sqrt{\lambda}t_j\,ctg\sqrt{\lambda}a_k+\cos\sqrt{\lambda}t_j$$

Нам удобно ввести следующие матрицы

$$H(\vec{x},\vec{t},\lambda)=\begin{bmatrix}\frac{\sin\sqrt{\lambda}\left(a_1-x_1\right)}{\sin\sqrt{\lambda}a_1}\int\limits_0^{a_1}\frac{\sin\sqrt{\lambda}\left(a_1-t_1\right)}{\sin\sqrt{\lambda}a_1}dt_1 & 0 & ... & 0\\ 0 & \frac{\sin\sqrt{\lambda}\left(a_2-x_2\right)}{\sin\sqrt{\lambda}a_2}\int\limits_0^{a_2}\frac{\sin\sqrt{\lambda}\left(a_2-t_2\right)}{\sin\sqrt{\lambda}a_2}dt_2 & ... & 0\\ 0 & 0 & ... & 0\\ 0 & 0 & ... & \frac{\sin\sqrt{\lambda}\left(a_m-x_m\right)}{\sin\sqrt{\lambda}a_m}\int\limits_0^{a_m}\frac{\sin\sqrt{\lambda}\left(a_m-t_m\right)}{\sin\sqrt{\lambda}a_m}dt_m\end{bmatrix}$$

$$W(\vec{x},\vec{t},\lambda)=\begin{bmatrix} \frac{\sin\sqrt{\lambda}(a_1-x_1)}{\sin\sqrt{\lambda}a_1}\int_0^{x_1}\Psi_1(t_1,\lambda)dt_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \frac{\sin\sqrt{\lambda}(a_2-x_2)}{\sin\sqrt{\lambda}a_2}\int_0^{x_2}\Psi_2(t_2,\lambda)dt_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \frac{\sin\sqrt{\lambda}(a_m-x_m)}{\sin\sqrt{\lambda}a_m}\int_0^{x_m}\Psi_m(t_m,\lambda)dt_m \end{bmatrix}$$

$$R(\vec{x},\vec{t},\lambda)=\begin{bmatrix} \Psi_1(x_1,\lambda)\int_{x_1}^{a_1}\frac{\sin\sqrt{\lambda}(a_1-t_1)}{\sin\sqrt{\lambda}a_1}dt_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \Psi_2(x_2,\lambda)\int_{x_2}^{a_2}\frac{\sin\sqrt{\lambda}(a_2-t_2)}{\sin\sqrt{\lambda}a_2}dt_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \Psi_m(x_m,\lambda)\int_{x_m}^{a_m}\frac{\sin\sqrt{\lambda}(a_m-t_m)}{\sin\sqrt{\lambda}a_m}dt_m \end{bmatrix}$$

Тогда из теоремы 2.4.2 получаем матрично-векторное соотношение

$$\begin{bmatrix} \dots \\ \dots \\ y_j(x_j) \\ \dots \\ \dots \end{bmatrix}=\frac{1}{\Delta(\lambda)}\begin{bmatrix} \dots \\ \dots \\ \frac{\sin\sqrt{\lambda}(a_j-x_j)}{\sin\sqrt{\lambda}a_j} \\ \dots \\ \dots \end{bmatrix}\left[\int_0^{a_1}\frac{\sin\sqrt{\lambda}(a_1-t_1)}{\sin\sqrt{\lambda}a_1}dt_1,\quad \dots,\quad \int_0^{a_m}\frac{\sin\sqrt{\lambda}(a_m-t_m)}{\sin\sqrt{\lambda}a_m}dt_m\right]\begin{bmatrix} f_1(t_1) \\ \dots \\ f_m(t_m) \end{bmatrix}-$$

$$-\frac{1}{\Delta(\lambda)}H(\vec{x},\vec{t},\lambda)\begin{bmatrix} f_1(t_1) \\ f_2(t_2) \\ \dots \\ f_m(t_m) \end{bmatrix}+\frac{1}{\Delta(\lambda)}W(\vec{x},\vec{t},\lambda)\begin{bmatrix} f_1(t_1) \\ f_2(t_2) \\ \dots \\ f_m(t_m) \end{bmatrix}+\frac{1}{\Delta(\lambda)}R(\vec{t},\vec{x},\lambda)\begin{bmatrix} f_1(t_1) \\ f_2(t_2) \\ \dots \\ f_m(t_m) \end{bmatrix}$$

В выше указанных формулах вначале производится матричное умножение только затем вычисление соответствующих интегралов. Таким образом, теорема 4.2.2 полностью доказана.

2.5 Функция Грина задачи Дирихле на граф-звезде с m дугами с произвольными потенциалами

В данном пункте выписана функция Грина задачи Дирихле на граф-звезде при произвольных потенциалах, то есть могут нарушаться следующие условия $q_j(x_j) \equiv 0,\ x_j \in [0, a_j],\ j = 1,...,m$. Для формулировки результатов нам потребуются следующие обозначения: $G_{0j}(\vec{x}, \vec{t}, \lambda)$ – функция Грина задачи Дирихле на дуге e_j,

$$-y_j^{"}(x_j) + q_j(x_j) y_j(x_j) = \lambda y_j(x_j) + f_j(x_j),\ \ 0 < x_j < a_j,$$

$$y_j(0) = 0,\ y_j(a_j) = 0$$

$s_{0j}(x_j, \lambda),\ s_{aj}(x_j, \lambda)$-линейно независимые решения однородного уравнения с условиями Коши

$$-s_{0j}''(x_j) + q_j(x_j) s_{0j}(x_j) = \lambda s_{0j}(x_j), \quad 0 < x_j < a_j, \quad s_{0j}(0, \lambda) = 0, s_{0j}'(0, \lambda) = 1,$$
$$-s_{aj}''(x_j) + q_j(x_j) s_{aj}(x_j) = \lambda s_{aj}(x_j), \quad 0 < x_j < a_j, \quad s_{aj}(a_j, \lambda) = 0, s_{aj}'(a_j, \lambda) = 1.$$

Введем также целую функцию

$$\Delta(\lambda) = s_{a1}^{'}(0) s_{a2}(0)...s_{am}(0) + s_{a1}(0) s_{a2}^{'}(0)...s_{am}(0) + s_{a1}(0) s_{a2}(0)...s_{am}^{'}(0)$$

Лемма 2.5.1 Если внутренняя вершина граф-звезды закреплена, то есть выполняются условия Дирихле во внутренней вершине $y_j(0) = 0, j = 1,...,m$, то функция Грина такой задачи имеет представление

$$G_0(\vec{x},\vec{t},\lambda) = diag\left\{G_{01}(x_1,t_1,\lambda),...,G_{0m}(x_m,t_m,\lambda)\right\}$$

где

$$G_{0j}(x_j,t_j,\lambda) = \begin{cases} \dfrac{s_{0j}(t_j,\lambda)s_{aj}(x_j,\lambda)}{s_{aj}(0,\lambda)}, & 0<t_j<x_j, \\ \dfrac{s_{aj}(t_j,\lambda)s_{0j}(x_j,\lambda)}{s_{aj}(0,\lambda)}, & x_j<t_j<a_j, \end{cases}$$

Доказательство леммы следует из того, что $G_{0j}(x_j,t_j,\lambda)$ представляет функцию Грина задачи Дирихле на дуге e_j. Теперь вычислим решения $y_1(x_1), y_2(x_2),..., y_m(x_m), 0<x_j<a_j, j=1,...,m$ задачи (2.2.1), (2.2.2), (2.2.3) для любых правых частей $f_1(x_1), f_2(x_2),..., f_m(x_m)$ уравнений (2.2.2).

Сначала рассмотрим частный случай, когда $f_1(x_1)\neq 0, f_2(x_2)=0,..., f_m(x_m)=0$. По набору функций $f_1(x_1), f_2(x_2)\equiv 0,..., f_m(x_m)\equiv 0$ находим решение $y_1(x_1), y_2(x_2),..., y_m(x_m)$.

Теорема 2.5.1 Если $f_1(x_1)\neq 0, f_2(x_2)\equiv 0,..., f_m(x_m)\equiv 0,$ то решение задачи Дирихле (2.2.1), (2.2.2), (2.2.3) может быть записана в виде при

$$\begin{cases} y_1(x_1,\lambda)=\dfrac{s_{a1}(x_1,\lambda)s_{a2}(0,\lambda)...s_{am}(0,\lambda)}{\Delta(\lambda)}\displaystyle\int_0^{a_1}\frac{s_{a1}(t_1,\lambda)}{s_{01}(a_1,\lambda)}f_1(t_1)dt_1+ \\ +\displaystyle\int_0^{x_1}\frac{s_{01}(t_1,\lambda)s_{a1}(x_1,\lambda)}{s_{a1}(0,\lambda)}f_1(t_1)dt_1+\int_{x_1}^{a_1}\frac{s_{a1}(t_1,\lambda)s_{01}(x_1,\lambda)}{s_{a1}(0,\lambda)}f_1(t_1)dt_1 \\ ... \\ y_j(x_m,\lambda)=\dfrac{s_{a1}(0,\lambda)...s_{aj-1}(0,\lambda)s_{aj}(x_j,\lambda)s_{aj+1}(0,\lambda)...s_{am}(0,\lambda)}{\Delta(\lambda)}\displaystyle\int_0^{a_1}\frac{s_{a1}(t_1,\lambda)}{s_{01}(a_1,\lambda)}f_1(t_1)dt_1 \end{cases} \tag{2.5.1}$$

Доказательство. Вводим решение задачи (2.2.1), (2.2.2), (2.2.3) в виде

Покажем, что функций заданные системой (2.5.2) удовлетворяют уравнениям (2.2.2), граничным условиям (2.2.3) и условиям Кирхгофа (2.2.1).

Сначала проверим выполнение граничных условий (2.2.3). Значения $x_1=a_1, x_2=a_2,..., x_m=a_m$ подставляя в (2.5.2), получим

$$\begin{cases} y_2(a_2,\lambda)=B_1s_{a_1}(0,\lambda)s_{a_2}(a_2,\lambda)...s_{a_m}(0,\lambda)=0 \\ \quad ... \\ y_m(a_m,\lambda)=B_1s_{a_1}(0,\lambda)s_{a_2}(0,\lambda)...s_{a_{m-1}}(0,\lambda)s_{a_m}(a_m,\lambda)=0 \\ y_1(a_1,\lambda)=B_1s_{a_1}(a_1,\lambda)s_{a_2}(0,\lambda)...s_{a_m}(0,\lambda)+\displaystyle\int_0^{a_1}\frac{s_{01}(t_1,\lambda)s_{a_1}(a_1,\lambda)}{s_{a_1}(0,\lambda)}f_1(t_1)dt_1+\int_{a_1}^{a_1}\frac{s_{a_1}(t_1,\lambda)s_{01}(a_1,\lambda)}{s_{a_1}(0,\lambda)}f_1(t_1)dt_1=0 \end{cases}$$

Теперь проверим выполнение условий (2.2.1). Значения $x_1=0, x_2=0,..., x_m=0$ подставляя в (2.5.2), получим, что выполняется первое условие Кирхгофа

Непосредственными вычислениями убеждаемся, что для функций вида (2.5.2) выполняются уравнения (2.2.2). Согласно соотношениям (2.5.2), второе соотношение условии (2.2.1) примет следующий вид

$$B_1\left(s'_{a_1}(0)s_{a_2}(0)...s_{a_m}(0)+s_{a_1}(0)s'_{a_2}(0)...s_{a_m}(0)+s_{a_1}(0)s_{a_2}(0)...s'_{a_m}(0)\right)=-\int_0^{a_1}\frac{s_{a_1}(t_1,\lambda)}{s_{a_1}(0,\lambda)}f_1(t_1)dt_1.$$

Отсюда следует

$$B_1=-\frac{1}{\Delta(\lambda)}\int_0^{a_1}\frac{s_{a_1}(t_1,\lambda)}{s_{a_1}(0,\lambda)}f_1(t_1)dt_1.$$

Подставим B_1 в (2.5.2), получим решение (2.5.1).

Теорема доказана.

Сформулируем теорему для произвольного $f_2(x_2)\neq 0,\ f_1(x_1)\equiv 0,...,\ f_m(x_m)\equiv 0,$

Теорема 2.5.2 Если $f_2(x_2)\neq 0,\ f_1(x_1)\equiv 0,...,\ f_m(x_m)\equiv 0,$ то решение задачи Дирихле (2.2.1), (2.2.2), (2.2.3) может быть записана в виде при

$$\begin{cases} y_1(x_1,\lambda)=\dfrac{s_{a_1}(x_1,\lambda)s_{a_2}(0,\lambda)...s_{a_m}(0,\lambda)}{\Delta(\lambda)}\displaystyle\int_0^{a_2}\frac{s_{a_2}(t_2,\lambda)}{s_{02}(a_2,\lambda)}f_2(t_2)dt_2 \\ y_2(x_2,\lambda)=\dfrac{s_{a_1}(0,\lambda)s_{a_2}(x_2,\lambda)...s_{a_m}(0,\lambda)}{\Delta(\lambda)}\displaystyle\int_0^{a_2}\frac{s_{a_2}(t_2,\lambda)}{s_{02}(a_2,\lambda)}f_2(t_2)dt_2+ \\ +\displaystyle\int_0^{x_2}\frac{s_{02}(t_2,\lambda)s_{a_2}(x_2,\lambda)}{s_{a_2}(0,\lambda)}f_2(t_2)dt_2+\int_{x_2}^{a_2}\frac{s_{a_2}(t_2,\lambda)s_{02}(x_2,\lambda)}{s_{a_2}(0,\lambda)}f_2(t_2)dt_2 \\ \vdots \\ y_m(x_m,\lambda)=\dfrac{s_{a_1}(0,\lambda)...s_{a_{m-1}}(0,\lambda)s_{a_m}(x_m,\lambda)}{\Delta(\lambda)}\displaystyle\int_0^{a_2}\frac{s_{a_2}(t_2,\lambda)}{s_{02}(a_2,\lambda)}f_2(t_2)dt_2 \end{cases} \qquad (2.5.3)$$

Теперь можно сформулировать основную теорему о представлении функции Грина задачи (2.2.1), (2.2.2), (2.2.3).

Теорема 2.5.3 Функция Грина задачи Дирихле (2.2.1), (2.2.2), (2.2.3) при $q_j(x_j) \neq 0$, имеет представление

$$G_{\Im}\left(\vec{x},\vec{t},\lambda\right) = diag\left\{G_{01}\left(x_1,t_1,\lambda\right),G_{02}\left(x_2,t_2,\lambda\right),\ldots,G_{0m}\left(x_m,t_m,\lambda\right)\right\} +$$
$$+\frac{1}{\Delta(\lambda)}\begin{bmatrix} s_{a1}(x_1,\lambda)s_{a2}(0,\lambda)\ldots s_{am}(0,\lambda) \\ s_{a1}(0,\lambda)s_{a2}(x_2,\lambda)\ldots s_{am}(0,\lambda) \\ \vdots \\ s_{a1}(0,\lambda)s_{a2}(0,\lambda)\ldots s_{am}(x_m,\lambda) \end{bmatrix} \times \left[\frac{s_{a1}(t_1,\lambda)}{s_{01}(a_1,\lambda)},\frac{s_{a2}(t_2,\lambda)}{s_{02}(a_2,\lambda)},\ldots,\frac{s_{am}(t_m,\lambda)}{s_{0m}(a_m,\lambda)}\right]$$

Доказательство. Решение задачи (2.2.1),(2.2.2),(2.2.3) для произвольных $f_1(x_1),..., f_m(x_m)$ запишем в матричном виде

$$\vec{Y}\left(\vec{x},\vec{t},\lambda\right) = \begin{bmatrix} y_1(x_1,\lambda) \\ y_2(x_2,\lambda) \\ \vdots \\ y_m(x_m,\lambda) \end{bmatrix} = \frac{1}{\Delta(\lambda)}\begin{bmatrix} s_{a1}(x_1,\lambda)s_{a2}(0,\lambda)\ldots s_{am}(0,\lambda) \\ s_{a2}(0,\lambda)s_{a2}(x_2,\lambda)\ldots s_{am}(0,\lambda) \\ \vdots \\ s_{a1}(0,\lambda)s_{a2}(0,\lambda)\ldots s_{am}(x_m,\lambda) \end{bmatrix} \times$$
$$\times\left[\int_0^{a_1}\frac{s_{a1}(t_1,\lambda)}{s_{01}(a_1,\lambda)}dt_1,\int_0^{a_2}\frac{s_{a2}(t_2,\lambda)}{s_{02}(a_2,\lambda)}dt_2,\ldots,\int_0^{a_m}\frac{s_{am}(t_m,\lambda)}{s_{0m}(a_m,\lambda)}dt_m\right]\begin{bmatrix} f_1(t_1) \\ f_2(t_2) \\ \vdots \\ f_m(t_m) \end{bmatrix} +$$
$$+ diag\left\{\int_0^{a_1}G_{01}\left(x_1,t_1,\lambda\right)dt_1,\int_0^{a_2}G_{02}\left(x_2,t_2,\lambda\right)dt_2,\ldots,\int_0^{a_m}G_{0m}\left(x_m,t_m,\lambda\right)dt_m\right\}\begin{bmatrix} f_1(t_1) \\ f_2(t_2) \\ \vdots \\ f_m(t_m) \end{bmatrix}$$

Отсюда получим представление функции Грина для задачи (2.2.1),(2.2.2),(2.2.3)

$$G_{\Im}\left(\vec{x},\vec{t},\lambda\right)=diag\left\{G_{01}\left(x_1,t_1,\lambda\right),G_{02}\left(x_2,t_2,\lambda\right),\ldots,G_{0m}\left(x_m,t_m,\lambda\right)\right\}+$$

$$+\frac{1}{\Delta(\lambda)}\begin{bmatrix} s_{a1}(x_1,\lambda)s_{a2}(0,\lambda)\ldots s_{am}(0,\lambda) \\ s_{a1}(0,\lambda)s_{a2}(x_2,\lambda)\ldots s_{am}(0,\lambda) \\ \vdots \\ s_{a1}(0,\lambda)s_{a2}(0,\lambda)\ldots s_{am}(x_m,\lambda) \end{bmatrix}\left[\frac{s_{a1}(t_1,\lambda)}{s_{01}(a_1,\lambda)},\frac{s_{a2}(t_2,\lambda)}{s_{02}(a_2,\lambda)},\ldots,\frac{s_{am}(t_m,\lambda)}{s_{0m}(a_m,\lambda)}\right]$$

2.6 О методе вычетного разложения функции Грина

В данном пункте поясняется стандартный подход к изучению рядов Фурье по корневым функциям несамосопряженного оператора, определенного на граф-звезде.

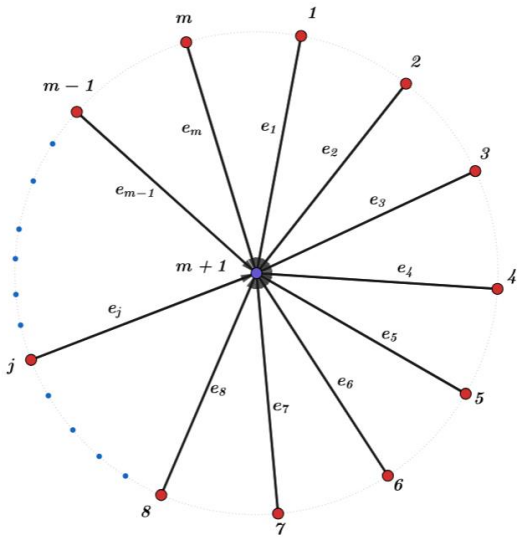


Рис 2.6.1 Граф-звезда с $m+1$ вершинами (красные вершины-граничные, синяя-внутренняя вершина)

Пусть $\Lambda-$оператор, соответствующий задаче Дирихле в граничных вершинах и условиям Кирхгофа во внутренней вершине. Также обозначим через Λ_0-оператор, когда внутренняя вершина закреплена. Результаты теоремы 2.5.3 в терминах резольвент операторов Λ и Λ_0 примут вид

$$\left(\Lambda-\lambda I\right)^{-1}\vec{F}(\vec{x})=\left(\Lambda_0-\lambda I\right)^{-1}\vec{F}(\vec{x})+ \tag{2.6.1}$$

$$+\frac{1}{\Delta(\lambda)}\begin{bmatrix} s_{a1}(x_1,\lambda)s_{a2}(0,\lambda)\ldots s_{am}(0,\lambda)\\ s_{a1}(0,\lambda)s_{a2}(x_2,\lambda)\ldots s_{am}(0,\lambda)\\ \vdots\\ s_{a1}(0,\lambda)s_{a2}(0,\lambda)\ldots s_{am}(x_m,\lambda)\end{bmatrix}\left[\int_0^{a_1}\frac{s_{a1}(t_1,\lambda)}{s_{01}(a_1,\lambda)}f_1(t_1)dt_1,\int_0^{a_2}\frac{s_{a2}(t_2,\lambda)}{s_{02}(a_2,\lambda)}f_2(t_2)dt_2,\ldots,\int_0^{a_m}\frac{s_{am}(t_m,\lambda)}{s_{0m}(a_m,\lambda)}f_m(t_m)dt_m\right]$$

В дальнейшем считаем, что при $j=1,...,m$ потенциалы представляют вещественные функции, то есть $q_j(x_j)=\overline{q_j(x_j)},\forall x_j\in e_j$. Заметим, что оператор Λ_0 является самосопряженным. Следовательно, его система собственных функций образует ортогональный базис в $L_2(\Im)$, а соответствующие собственные значения – вещественные. Заметим, что оператор Λ можно интерпретировать как конечномерное возмущение самосопряженного оператора Λ_0.

Теперь, чтобы пояснить дальнейшее изложение, надо напомнить традиционный подход к изучению рядов Фурье по корневым векторам несамосопряженного оператора Λ, близкого к самосопряженному положительному оператору Λ_0. Зафиксируем сколь угодно малое число $\varepsilon>0$ и обозначим через Ω объединение сектора $\{\lambda:|\arg\lambda|<\varepsilon\}$ на комплексной плоскости с полукругом $\{\lambda:\sigma>0,|\lambda|<r\}$, $\sigma-$реальная часть λ, настолько большого радиуса r, что все собственные значения оператора Λ содержатся в Ω. (Если все они содержатся в указанном секторе, то можно не добавлять полукруг, т.е. взять $r=0$.) Предположим, что можно разрезать область Ω вертикальными отрезками $I_k(k=1,2,...)$ с абсциссами $\alpha_k\nearrow\infty$ так, что на эти отрезках нет собственных значений операторов Λ и Λ_0. Обозначим через Ω_k часть области Ω, лежащую между I_k и I_{k+1} при $k\geq1$ и левее I_1 при $k=0$. Через N_k обозначим контур области Ω_k с положительным направлением обхода. Этот контур при $k\geq1$ состоит из отрезков I_k и I_{k+1} и отрезков J_k^+, и лежащих на верхней и нижней сторонах сектора. Введем проекторы Рисса [37]

$$P_k=-\frac{1}{2\pi i}\int_{\mathrm{N}_k}R_\Lambda(\lambda)d\lambda,\ Q_k=-\frac{1}{2\pi i}\int_{\mathrm{N}_k}R_{\Lambda_0}(\lambda)d\lambda, \tag{2.6.2}$$

где $R_\Lambda(\lambda)=\left(\Lambda-\lambda I\right)^{-1}$, $R_{\Lambda_0}(\lambda)=\left(\Lambda_0-\lambda I\right)^{-1}$.

Операторы Q_k являются ортопроекторами в $L_2(\Im)$, и для любого вектора $f\in L_2(\Im)$ мы имеем ортогональное разложение

$$f(x)=\sum_k Q_k f(x). \tag{2.6.3}$$

Этот ряд получается из ряда Фурье вектора $f(x)$ по собственным векторам оператора Λ_0 расстановкой скобок: $Q_k f(x)$ есть сумма членов последнего ряда, отвечающая собственным значениям $\lambda_j(\Lambda_0)$, лежащим между α_k и α_{k+1} при $k\geq 1$ и левое α_1 при $k=0$. Аналогично $P_k f(x)$ есть часть (формального) ряда Фурье вектора $f(x)$ по корневым векторам оператора Λ, отвечающего его собственным значениям лежащим в Ω_k. Если

$$f(x)=\sum_k P_k f(x) \tag{2.6.4}$$

для любого $f\in L_2(\Im)$, то, по определению, $\left\{P_k L_2(\Im)\right\}$ – базис из подпространств в $L_2(\Im)$ и из корневых векторов оператора Λ можно составить базис со скобками. Для проверки равенства (2.6.4) достаточно проверить сходимость ряда

$$\sum_k\left(P_k-Q_k\right)f(x).$$

Приведенные рассуждения можно найти в работе [78].

В следующих пунктах к операторам Λ и Λ_0 применяется метод вычетного разложения.

2.7 Спектральные свойства оператора Λ_0

Из определения оператора Λ_0 следует, что распадается в прямую сумму однотипных операторов Штурма – Лиувилля на отрезках

$$\Lambda_0 = B_1 \otimes B_2 \otimes \ldots \otimes B_m$$

Здесь оператор B_j определен в пространстве $L_2(e_j)$ и соответствует задаче Дирихле на отрезке

$$-y''(x_j) + q_j(x_j)y(x_j) = f(x_j)$$

$$y(0) = 0;\ y(a_j) = 0$$

Известно [79], что оператор $B_j \left(= B_j^*\right)$ самосопряжен в $L_2(e_j)$ и имеет счетное множество вещественных (≥ 0) собственных значений с единственной предельной точкой на бесконечности. Если пронумеровать собственные значения (по убыванию) $0 \leq \mu_1(B_j) \leq \mu_2(B_j) \leq \ldots$, то справедлива асимптотика при $n \to \infty$

$$\sqrt{\mu_n(B_j)} = \frac{\pi}{a_j} n + \frac{1}{2\pi n} \int_0^{a_j} q_j(\tau) d\tau + O\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

Считывающая функция оператора B_j имеет вид

$$N(\lambda, B_j) := \sum_{\mu_n(B_j)<\lambda} 1 = \frac{a_j\sqrt{\lambda}}{\pi} + O(n), \lambda \to \infty$$

Тогда считывающая функция оператора Λ_0 имеет асимптотику при $\lambda \to \infty$

$$N(\lambda, \Lambda_0) = \frac{\sqrt{\lambda}}{\pi}\sum_{j=1}^{m} a_j + O(1).$$

Величина $\sum_{j=1}^{m} a_j$ имеет геометрическую интерпретацию равную длине всех дуг звезды.

Через $y_j\left(x, \mu_n\left(B_j\right)\right)$ будем обозначать собственную функцию оператора B_j, соответствующую собственному значению $\mu_n\left(B_j\right)$. Теперь поговорим о структуре независимых собственных векторов оператора Λ_0. Если $\mu_n\left(B_j\right)$ – собственное значение оператора B_j, то $\lambda = \mu_n\left(B_j\right)$ будет собственным значением также оператора Λ_0. Причем собственная функция $\vec{Y}(\vec{x}, \lambda)$ оператора Λ_0, соответствующая собственному значению λ, имеет следующую структуру $\vec{Y}(\vec{x}, \lambda) = \left[0, \ldots, 0, y_j\left(x_j, \mu_n\left(B_j\right)\right), 0, \ldots, 0\right]$. Ясно, что такого рода система собственных функций оператора Λ_0 – ортогональна система в $L_2\left(\Im\right)$.

2.8 Вычетное разложение в ряд Фурье функции Грина задачи Дирихле

В настоящем параграфе изучается вопрос о разложении в ряд Фурье функции Грина задачи (2.2.1), (2.2.2), (2.2.3) по собственным функциям соответствующей спектральной задачи. Выпишем известную теорему из монографии [21].

Теорема 2.8.1 Всякая функция из области определения самосопряженного дифференциального оператора разлагается в равномерно сходящийся ряд Фурье по собственным функциям этого оператора.

Докажем следующую лемму.

Лемма 2.8.1 Оператор, соответствующий краевой задаче (2.2.1), (2.2.2), (2.2.3) является самосопряженным, т.е. функция Грина $G_{\Im}(\vec{x},\vec{t},\lambda)$ есть симметризируемое ядро в пространстве $L_2(\Im)$

$$G_{\Im}(x_1,x_2,\ldots,x_m,t_1,t_2,\ldots,t_m,\lambda)=G_{\Im}^{T}(t_1,t_2,\ldots,t_m,x_1,x_2,\ldots,x_m,\lambda) \qquad (2.8.1)$$

Доказательство. Преобразуем функцию Грина задачи (2.2.1), (2.2.2), (2.2.3) следующим образом

$$G_{\Im}(x_1,x_2,\ldots,x_m,t_1,t_2,\ldots,t_m,\lambda)=diag\{G_{01}(x_1,t_1,\lambda),\ldots,G_{0m}(x_m,t_m,\lambda)\}+$$

$$+\frac{1}{\Delta(\lambda)}\begin{bmatrix} s_{a1}(x_1,\lambda)s_{a2}(0,\lambda)\ldots s_{am}(0,\lambda) \\ \vdots \\ s_{a1}(0,\lambda)s_{a2}(0,\lambda)\ldots s_{am}(x_m,\lambda)\end{bmatrix}\left[\frac{s_{a1}(t_1,\lambda)}{s_{01}(a_1,\lambda)},\ldots,\frac{s_{am}(t_m,\lambda)}{s_{0m}(a_m,\lambda)}\right].$$

Отсюда имеем

$$G_{\Im}^{T}(x_1,x_2,\ldots,x_m,t_1,t_2,\ldots,t_m,\lambda)=diag\{G_{01}(x_1,t_1,\lambda),\ldots,G_{0m}(x_m,t_m,\lambda)\}+$$

$$+\frac{1}{\Delta(\lambda)}\begin{bmatrix} \frac{s_{a1}(t_1,\lambda)}{s_{01}(a_1,\lambda)} \\ \vdots \\ \frac{s_{am}(t_m,\lambda)}{s_{0m}(a_m,\lambda)}\end{bmatrix}\times\left[s_{a1}(x_1,\lambda)s_{a2}(0,\lambda)\ldots s_{am}(0,\lambda),\ldots,s_{a1}(0,\lambda)s_{a2}(0,\lambda)\ldots s_{am}(x_m,\lambda)\right].$$

Рассмотрим элементы матрицы $G_{\Im}^{T}$ с номером (k, j)

$$\frac{s_{ak}(t_k,\lambda)}{s_{0k}(a_k,\lambda)} s_{a1}(0,\lambda)...s_{aj-1}(0,\lambda)s_{aj}(x_j,\lambda)s_{aj+1}(0,\lambda)...s_{am}(0,\lambda) \qquad (2.8.2)$$

и сравним его с элементом матрицы $G_{\Im}$ с номером (k, j)

$$s_{a1}(0,\lambda)...s_{ak-1}(0,\lambda)s_{ak}(x_k,\lambda)s_{ak+1}(0,\lambda)...s_{am}(0,\lambda)\frac{s_{aj}(t_j,\lambda)}{s_{0j}(a_j,\lambda)} \qquad (2.8.3)$$

Если в выражении (2.8.2) переменную t_k заменить на x_k и переменную x_j заменить на t_j, то выражение (2.8.2) совпадает со значением (2.8.3). Таким образом доказано, что

$$G_{\Im}(x_1,x_2,...,x_m,t_1,t_2,...,t_m,\lambda) = G_{\Im}^{T}(t_1,t_2,...,t_m,x_1,x_2,...,x_m,\lambda).$$

Лемма доказана.

Таким образом, если функция Грина $G_{\Im}(\vec{x},\vec{t},\lambda)$ является эрмитовым (т.е. симметризируемым) ядром, то на основании теоремы Гильберта-Шмидта из теории интегральных уравнении [80] произвольную функцию можно разложить в равномерно сходящийся ряд по собственным функциям ядра $G_{\Im}(\vec{x},\vec{t},\lambda)$. Пусть $q_1(x_1) \equiv ... \equiv q_m(x_m) \equiv q(x),\ 0 < x_j < a_j$. Тогда $s_{a1}(x,\lambda) \equiv ... \equiv s_{a1}(x,\lambda) \equiv s_a(x,\lambda)$ при $0 \le x_j \le a_j$ имеем

$$G_{0j}(x_j,t_j,\lambda) = \begin{cases} \dfrac{s_{0j}(t_j,\lambda)s_{aj}(x_j,\lambda)}{s_{aj}(0,\lambda)},\ 0 < t_j < x_j, \\ \dfrac{s_{aj}(t_j,\lambda)s_{0j}(x_j,\lambda)}{s_{aj}(0,\lambda)},\ x_j < t_j < a_j, \end{cases}$$

Пусть λ_0 является нулем функции $s_a(0,\lambda)$ кратности k_0, то есть

$$s_a(0,\lambda_0)=\ldots=\frac{d^{k_0-1}}{d\lambda_0^{k_0-1}}s_a(0,\lambda_0)=0,\ \ \frac{d^{k_0}}{d\lambda_0^{k_0}}s_a(0,\lambda_0)\neq 0.$$

Ясно, что $s_a^{'}(0,\lambda_0)\neq 0$. Вычислим вычет матрицы

$$\operatorname*{res}_{\lambda_0}G_{\Im}(\vec{x},\vec{t},\lambda)=\operatorname*{res}_{\lambda_0}diag\{G_{01}(x_1,t_1,\lambda),\ldots,G_{0m}(x_m,t_m,\lambda)\}+$$

$$+\frac{1}{m}\operatorname*{res}_{\lambda_0}\frac{1}{s_a^{'}(0,\lambda)s_a(0,\lambda)}\begin{bmatrix}s_{a1}(x_1,\lambda)\\ \ldots\\ s_{am}(x_m,\lambda)\end{bmatrix}\times\left[s_{a1}(t_1,\lambda),\ldots,s_{am}(t_m,\lambda)\right].$$

Тогда получим формулу вычета матрицы $G_{\Im}(x_1,x_2,\ldots,x_m,t_1,t_2,\ldots,t_m,\lambda)$ в точке $\lambda=\lambda_0$

$$\operatorname*{res}_{\lambda_0}G_{\Im}(x_1,x_2,\ldots,x_m,t_1,t_2,\ldots,t_m,\lambda)=\sum_{i_1=0}^{k_0-1}\frac{1}{i_1!}\frac{d^{i_1}}{d\lambda^{i_1}}s_{aj}(x_j,\lambda)|_{\lambda=\lambda_0}\sum_{i_2=0}^{k_0-1-i_1}\frac{1}{i_2!}\frac{d^{i_2}}{d\lambda^{i_2}}s_{aj}(t_j,\lambda)|_{\lambda=\lambda_0}\times$$

$$\sum_{i_3=0}^{k_0-1-i_1-i_2}\frac{1}{i_3!}\frac{d^{i_3}}{d\lambda^{i_3}}\left[\frac{(\lambda-\lambda_0)^k}{s_{aj}(0,\lambda)}\right]|_{\lambda=\lambda_0}+\frac{1}{m}\sum_{i_1=0}^{k_0-1}\frac{1}{i_1!}\frac{d^{i_1}}{d\lambda^{i_1}}s_{ap}(x_p,\lambda)|_{\lambda=\lambda_0}\sum_{i_2=0}^{k_0-1-i_1}\frac{1}{i_2!}\frac{d^{i_2}}{d\lambda^{i_2}}s_{ar}(t_r,\lambda)|_{\lambda=\lambda_0}\times$$

$$\times\frac{1}{m}\sum_{i_3=0}^{k_0-1-i_1-i_2}\frac{1}{i_3!}\frac{d^{i_3}}{d\lambda^{i_3}}\left[\frac{1}{s_{aj}^{'}(0,\lambda)}\right]|_{\lambda=\lambda_0}\sum_{i_4=0}^{k_0-1-i_1-i_2-i_3}\frac{1}{i_4!}\frac{d^{i_4}}{d\lambda^{i_4}}\left[\frac{(\lambda-\lambda_0)^{k_0}}{s_{aj}(0,\lambda)}\right]|_{\lambda=\lambda_0}.$$

В случае $k_0=1$ приведенная формула становится более наглядной. К примеру, при $t_j\le x_j$ имеем

$$\operatorname*{res}_{\lambda_0} G_{\Im}(\vec{x},\vec{t},\lambda) = diag\left\{\frac{s_{01}(t_1,\lambda_0)s_{a1}(x_1,\lambda_0)}{-\frac{d}{d\lambda_0}s_{a1}(0,\lambda_0)},...,\frac{s_{0m}(t_m,\lambda_0)s_{am}(x_m,\lambda_0)}{-\frac{d}{d\lambda_0}s_{am}(0,\lambda_0)}\right\}+$$

$$+\frac{1}{m}\frac{1}{s'_{a1}(0,\lambda_0)\frac{d}{d\lambda_0}s_{a1}(0,\lambda_0)}\times\begin{bmatrix}s_{a1}(x_1,\lambda_0)\\ ...\\ s_{am}(x_m,\lambda_0)\end{bmatrix}\left[s_{a1}(t_1,\lambda_0),...,s_{am}(t_m,\lambda_0)\right].$$

Здесь функций $\begin{bmatrix}s_{a1}(x_1,\lambda_0)\\ ...\\ s_{am}(x_m,\lambda_0)\end{bmatrix}$ назовем основными функциями, соответствующие собственным значениям λ_0. Основные функций не являются собственными функциями, так как для них нарушается второе соотношение условии (2.2.1). Действительно, $s'_{a1}(0,\lambda_0)+...+s'_{am}(0,\lambda_0)\neq 0$. До этого мы рассматривали нули функции $s_{aj}(0,\lambda)$. Пусть λ_1 является нулем функции $s'_{aj}(0,\lambda)$ кратности k_1, то есть

$$s'_{a1}(0,\lambda_1)=...=\frac{d^{k_1-1}}{d\lambda_1^{k_1-1}}s'_{am}(0,\lambda_1)=0,\ \ \frac{d^{k_1}}{d\lambda_1^{k_1}}s'_{am}(0,\lambda_1)\neq 0.$$

Ясно, что $s_{aj}(0,\lambda_0)\neq 0$. Нули функции $s'_{aj}(0,\lambda_1)$ являются полюсами функции $G_{\Im}(\vec{x},\vec{t},\lambda)$. Применяя аналогичные рассуждения, которые приведены при вычислении вычета функций $G_{\Im}(x_1,x_2,...,x_m,t_1,t_2,...,t_m,\lambda)$ в точке λ_0, вычислим вычет функций $G_{\Im}(x_1,x_2,...,x_m,t_1,t_2,...,t_m,\lambda)$ в точке λ_1. Очевидно, что

$$\operatorname*{res}_{\lambda_1} diag\left\{G_{01}(x_1,t_1,\lambda),...,G_{0m}(x_m,t_m,\lambda)\right\}=0.$$

Остается вычислить вычеты в нулях функции $s'_{aj}(0,\lambda_1)$

$$\operatorname*{res}_{\lambda_1} G_{\Im}(\vec{x},\vec{t},\lambda_1)=\frac{1}{ms_{aj}(0,\lambda_1)\dfrac{d}{d\lambda_1}s_{aj}^{'}(0,\lambda_1)}\begin{bmatrix}s_{a1}(x_1,\lambda_1)\\ \dots\\ s_{am}(x_m,\lambda_1)\end{bmatrix}\left[s_{a1}(t_1,\lambda_1),\dots,s_{am}(t_m,\lambda_1)\right].$$

Здесь функций $\begin{bmatrix}s_{a1}(x_1,\lambda_1)\\ \dots\\ s_{am}(x_m,\lambda_1)\end{bmatrix}$ являются собственными функциями, соответствующие собственным значениям λ_1. Действительно, для них выполняются второе соотношение условии (2.3.1). Следовательно, по теоремам 1 и 2 [21] следует разложение функции Грина

$$G_{\Im}(\vec{x},\vec{t})=\sum_{\lambda_0:s_{aj}(0,\lambda_0)=0}\frac{\operatorname*{res}_{\lambda_0}G_{\Im}(\vec{x},\vec{t},\lambda)}{\lambda_0}+\sum_{\lambda_1:s_{aj}^{'}(0,\lambda_1)=0}\frac{\operatorname*{res}_{\lambda_1}G_{\Im}(\vec{x},\vec{t},\lambda)}{\lambda_1}.$$

Здесь первое суммирование производится по всем λ_0, которые подчинены условию $s_{aj}(0,\lambda_0)=0$. Аналогичный смысл имеет вторая сумма. Таким образом, справедливо следующее утверждение.

Лемма 2.8.2 Если все собственные значения оператора Λ, порожденного условиями Кирхгофа (2.2.1) и краевыми условиями (2.2.3), суть простые нули функции $s_{aj}(0,\lambda), s_{aj}^{'}(0,\lambda),$ то для функции Грина имеет место разложение

$$G_{\Im}(\vec{x},\vec{t})=\sum_{\lambda_0:s_0(\pi,\lambda_0)=0}\frac{1}{\lambda_0}diag\left\{\frac{s_{01}(t_1,\lambda_0)s_{a1}(x_1,\lambda_0)}{-\dfrac{d}{d\lambda}s_{a1}(0,\lambda_0)},\dots,\frac{s_{0m}(t_m,\lambda_0)s_{am}(x_m,\lambda_0)}{-\dfrac{d}{d\lambda}s_{am}(0,\lambda_0)}\right\}+$$

$$+\sum_{\lambda_0:s_{aj}(0,\lambda_0)=0}\frac{1}{\lambda_0 ms_{aj}^{'}(0,\lambda_0)\dfrac{d}{d\lambda_0}s_{aj}(0,\lambda_0)}\begin{bmatrix}s_{a1}(x_1,\lambda_0)\\ \dots\\ s_{am}(x_m,\lambda_0)\end{bmatrix}\left[s_{a1}(t_1,\lambda_0),\dots,s_{am}(t_m,\lambda_0)\right]+$$

$$+\sum_{\lambda_1:s'_{aj}(0,\lambda_1)=0}\frac{1}{\lambda_1 m s'_{aj}(0,\lambda_1)\dfrac{d}{d\lambda_1}s'_{aj}(0,\lambda_1)}\begin{bmatrix}s_{a1}(x_1,\lambda_1)\\ \dots\\ s_{am}(x_m,\lambda_1)\end{bmatrix}\left[s_{a1}(t_1,\lambda_1),\dots,s_{am}(t_m,\lambda_1)\right].$$

Теорема 2.8.2 Пусть Λ оператор, порожденный условиями Кирхгофа (2.2.1) и краевыми условиями (2.2.3), все собственные значения которого суть простые нули функции $s_{aj}(0,\lambda), s'_{aj}(0,\lambda)$. Тогда всякая вектор-функция $\vec{F}(\vec{X})$ из области определения $L_2(\Im)$ оператора Λ_D разлагается в равномерно сходящийся ряд

$$\vec{F}(\vec{X})=-\sum_{\lambda_0:s_{aj}(0,\lambda_0)=0}\frac{1}{\lambda_0 s'_{aj}(0,\lambda_0)\dfrac{d}{d\lambda_0}s_{aj}(0,\lambda_0)}\begin{bmatrix}\int_0^{a_1} f_1(t_1)s_{a1}(t_1,\lambda_0)dt_1 s_{a1}(x_1,\lambda_0)\\ \dots\\ \int_0^{a_m} f_m(t_m)s_{am}(t_m,\lambda_0)dt_m s_{am}(x_m,\lambda_0)\end{bmatrix}+$$

$$+\sum_{\lambda_0:s_{aj}(0,\lambda_0)=0}\frac{1}{\lambda_0 m s'_{aj}(0,\lambda_0)\dfrac{d}{d\lambda_0}s_{aj}(0,\lambda_0)}\left[\int_0^{a_1} f_1(t_1)s_{a1}(t_1,\lambda_0)dt_1+\dots+\int_0^{a_m} f_m(t_m)s_{am}(t_m,\lambda_0)dt_m\right]\begin{bmatrix}s_{a1}(x_1,\lambda_0)\\ \dots\\ s_{am}(x_m,\lambda_0)\end{bmatrix}+$$

$$+\sum_{\lambda_1:s'_{aj}(0,\lambda_1)=0}\frac{1}{\lambda_1 m s'_{aj}(0,\lambda_1)\dfrac{d}{d\lambda_1}s'_{aj}(0,\lambda_1)}\left[\int_0^{a_1} f_1(t_1)s_{a1}(t_1,\lambda_1)dt_1+\dots+\int_0^{a_m} f_m(t_m)s_{am}(t_m,\lambda_1)dt_m\right]\begin{bmatrix}s_{a1}(x_1,\lambda_1)\\ \dots\\ s_{am}(x_m,\lambda_1)\end{bmatrix}.$$

Здесь $\begin{bmatrix}s_{a1}(x_1,\lambda_0)\\ \dots\\ s_{am}(x_m,\lambda_0)\end{bmatrix}$ – основные функции, соответствующие собственным значениям

$$\lambda_0,\ \frac{1}{\lambda_0 m s'_{aj}(0,\lambda_1)\dfrac{d}{d\lambda_0}s'_{aj}(0,\lambda_0)}\left[\int_0^{a_1} f_1(t_1)s_{a1}(t_1,\lambda_0)dt_1+\dots+\int_0^{a_m} f_m(t_m)s_{am}(t_m,\lambda_0)dt_m\right]-$$

коэффициенты Фурье разложения по основным функциям, соответствующие

собственным значениям λ_0, $\begin{bmatrix} s_{a1}(x_1,\lambda_1) \\ ... \\ s_{am}(x_m,\lambda_1) \end{bmatrix}$ – собственные функции, соответствующие собственным значениям λ_1, $\frac{1}{\lambda_1 s'_{aj}(0,\lambda_1)\frac{d}{d\lambda_1}s'_{aj}(0,\lambda_1)}\left[\int_0^{a_1} f_1(t_1)s_{a1}(t_1,\lambda_1)dt_1 + ... + \int_0^{a_m} f_m(t_m)s_{am}(t_m,\lambda_1)dt_m\right]$ – коэффициенты Фурье разложения по собственным функциям, соответствующие собственным значениям λ_1.

Приведенное в теореме 2.8.2 разложение мы назовем вычетным разложением. Однако обычно используется спектральное разложение, то есть разложение по собственным функциям. Покажем как из вычетного разложения получить спектральное разложение.

2.9 Спектральное разложение в ряд Фурье функции Грина задачи Дирихле

Известно, что

$$s_{aj}(0,\lambda_0) = 0. \qquad (2.9.4)$$

Разложение (2.8.3) представим в виде суммы

$$\vec{F}(\vec{X}) = \vec{F_1}(\vec{X}) + \vec{F_2}(\vec{X}), \qquad (2.9.5)$$

где

$$\vec{F_1}(\vec{X}) = -\sum_{\lambda_0 : s_{aj}(0,\lambda_0)=0} \frac{1}{s'_{aj}(0,\lambda_0)\frac{d}{d\lambda_0}s_{aj}(0,\lambda_0)} \begin{bmatrix} \int_0^{a_1} f_1(t_1)s_{a1}(t_1,\lambda_0)dt_1 s_{a1}(x_1,\lambda_0) \\ ... \\ \int_0^{a_m} f_m(t_m)s_{am}(t_m,\lambda_0)dt_m s_{am}(x_m,\lambda_0) \end{bmatrix} + \qquad (2.9.6)$$

$$+\sum_{\lambda_0:s_{aj}(0,\lambda_0)=0}\frac{1}{ms'_{aj}(0,\lambda_0)\dfrac{d}{d\lambda_0}s_{aj}(0,\lambda_0)}\left[\int_0^{a_1}f_1(t_1)s_{a1}(t_1,\lambda_0)dt_1+\ldots+\int_0^{a_m}f_m(t_m)s_{am}(t_m,\lambda_0)dt_m\right]\begin{bmatrix}s_{a1}(x_1,\lambda_0)\\ \ldots\\ s_{am}(x_m,\lambda_0)\end{bmatrix}-$$

разложение по основным функциям и

$$\overrightarrow{F_2}(\overrightarrow{X})=\sum_{\lambda_1:s'_{aj}(0,\lambda_1)=0}\frac{1}{ms'_{aj}(0,\lambda_1)\dfrac{d}{d\lambda_1}s'_{aj}(0,\lambda_1)}\left[\int_0^{a_1}f_1(t_1)s_{a1}(t_1,\lambda_1)dt_1+\ldots+\int_0^{a_m}f_m(t_m)s_{am}(t_m,\lambda_1)dt_m\right]\begin{bmatrix}s_{a1}(x_1,\lambda_1)\\ \ldots\\ s_{am}(x_m,\lambda_1)\end{bmatrix}-$$

(2.9.7)

разложение по собственным функциям.

Теперь (2.9.6) преобразуем следующим образом

$$\overrightarrow{F_1}(\overrightarrow{X})=\sum_{\lambda_0:s_{aj}(0,\lambda_0)=0}\frac{1}{ms'_{aj}(0,\lambda_0)\dfrac{d}{d\lambda}s_{aj}(0,\lambda_0)}\begin{bmatrix}-ms_{a1}(x_1,\lambda_0)\int_0^{a_1}f_1(t_1)s_{a1}(t_1,\lambda_0)dt_1\\ -ms_{a2}(x_2,\lambda_0)\int_0^{a_2}f_2(t_2)s_{a2}(t_2,\lambda_0)dt_2\\ \ldots\\ -ms_{am}(x_m,\lambda_0)\int_0^{a_m}f_m(t_m)s_{am}(t_m,\lambda_0)dt_m\end{bmatrix}+$$

$$+\sum_{\lambda_0:s_{aj}(0,\lambda_0)=0}\frac{1}{ms'_{aj}(0,\lambda_0)\dfrac{d}{d\lambda}s_{aj}(0,\lambda_0)}\begin{bmatrix}s_{a1}(x_1,\lambda_0)\left(\int_0^{a_1}f_1(t_1)s_{a1}(t_1,\lambda_0)dt_1+\ldots+\int_0^{a_m}f_m(t_m)s_{am}(t_m,\lambda_0)dt_m\right)\\ s_{a2}(x_2,\lambda_0)\left(\int_0^{a_1}f_1(t_1)s_0(t_1,\lambda_0)dt_1+\ldots+\int_0^{\pi}f_m(t_m)s_{am}(t_m,\lambda_0)dt_m\right)\\ \ldots\\ s_{am}(x_m,\lambda_0)\left(\int_0^{a_1}f_1(t_1)s_0(t_1,\lambda_0)dt_1+\ldots+\int_0^{\pi}f_m(t_m)s_{am}(t_m,\lambda_0)dt_m\right)\end{bmatrix}.$$

Складывая две суммы, получаем

$$\vec{F}_1(\vec{X}) = \sum_{\lambda_0 : s_{aj}(0,\lambda_0)=0} \frac{1}{m s'_{aj}(0,\lambda_0) \dfrac{d}{d\lambda_0} s_{aj}(0,\lambda_0)} \times$$

$$\begin{bmatrix} s_{a1}(x_1,\lambda_0)\left[(1-m)\int_0^{a_1} f_1(t_1)s_{a1}(t_1,\lambda_0)dt_1 + \int_0^{a_2} f_2(t_2)s_{a2}(t_2,\lambda_0)dt_2 + \ldots + \int_0^{a_m} f_m(t_m)s_0(t_m,\lambda_0)dt_m\right] \\ s_{a2}(x_2,\lambda_0)\left[\int_0^{a_1} f_1(t_1)s_{a1}(t_1,\lambda_0)dt_1 + (1-m)\int_0^{a_2} f_2(t_2)s_{a2}(t_2,\lambda_0)dt_2 + \ldots + \int_0^{a_m} f_m(t_m)s_0(t_m,\lambda_0)dt_m\right] \\ \ldots \\ s_{am}(x_m,\lambda_0)\left[((1-m)\int_0^{a_1} f_1(t_1)s_{a1}(t_1,\lambda_0)dt_1 + \int_0^{a_2} f_2(t_2)s_{a2}(t_2,\lambda_0)dt_2 + \ldots + (1-m)\int_0^{a_m} f_m(t_m)s_0(t_m,\lambda_0)dt_m\right] \end{bmatrix}$$

Последнее выражение запишем в виде

$$\vec{F}_1(\vec{X}) = \sum_{\lambda_0 : s_{aj}(0,\lambda_0)=0} \frac{1}{m s'_{aj}(0,\lambda_0) \dfrac{d}{d\lambda_0} s_{aj}(0,\lambda_0)} \times \left\{ \begin{bmatrix} (1-m)s_{a1}(x_1,\lambda_0) \\ s_{a2}(x_2,\lambda_0) \\ \ldots \\ s_{am}(x_m,\lambda_0) \end{bmatrix} \int_0^{a_1} f_1(t_1)s_{a1}(t_1,\lambda)dt_1 + \right.$$

$$\left. + \begin{bmatrix} s_{a1}(x_1,\lambda_0) \\ (1-m)s_{a2}(x_2,\lambda_0) \\ \ldots \\ s_{am}(x_m,\lambda_0) \end{bmatrix} \int_0^{a_2} f_2(t_2)s_{a2}(t_2,\lambda_0)dt_2 + \ldots + \begin{bmatrix} s_{a1}(x_1,\lambda_0) \\ s_{a2}(x_2,\lambda_0) \\ \ldots \\ (1-m)s_{am}(x_m,\lambda_0) \end{bmatrix} \int_0^{a_m} f_m(t_m)s_{am}(t_m,\lambda_0)dt_m \right\}.$$

Для краткости вводим следующие обозначения

$$\vec{e}_1 = \begin{bmatrix} (1-m)s_{a1}^1 \\ s_{a2}^2 \\ \ldots \\ s_{am}^m \end{bmatrix}, \quad \vec{e}_2 = \begin{bmatrix} s_{a1}^1 \\ (1-m)s_{a2}^2 \\ \ldots \\ s_{am}^m \end{bmatrix}, \ldots, \vec{e}_m = \begin{bmatrix} s_{a1}^1 \\ s_{a2}^2 \\ \ldots \\ (1-m)s_{am}^m \end{bmatrix}, \tag{2.9.8}$$

где $s_{a1}^1 = s_{a1}(x_1,\lambda_0),\ s_{a2}^2 = s_{a2}(x_2,\lambda_0),\ldots,s_{am}^m = s_{am}(x_m,\lambda_0).$

Так как

$$\begin{vmatrix} (1-m)s_{a1}^1 & s_{a2}^1 & \dots & s_{am}^1 \\ s_{a2}^2 & (1-m)s_{a2}^2 & \dots & s_{am}^2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ s_{am}^m & s_{am}^m & \dots & (1-m)s_{am}^m \end{vmatrix} = 0,$$

то система векторов $\vec{e_1}, \vec{e_2}, ..., \vec{e_m}$ является линейно зависимой. Но векторы $\vec{e_1}, \vec{e_2}, ..., \vec{e}_{m-1}$ образуют линейно независимую систему. Легко проверить, что вектор-функций $\vec{e_1}, \vec{e_2}, ..., \vec{e}_{m-1}$ удовлетворяют условиям (2.2.1) и (2.2.3). Отсюда следует, что они являются собственными функциями операторами Λ. А вектор-функция $\vec{e}_m$ выражается через них

$$-\vec{e}_m = \vec{e}_1 + \vec{e}_2 + ... + \vec{e}_{m-1},$$

или

$$-\begin{bmatrix} s_0^1 \\ s_0^2 \\ \dots \\ (1\text{-}m)s_0^m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (1-m)s_0^1 \\ s_0^2 \\ \dots \\ s_0^m \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} s_0^1 \\ (1-m)s_0^2 \\ \dots \\ s_0^m \end{bmatrix} + ... + \begin{bmatrix} s_0^1 \\ s_0^2 \\ \dots \\ (1-m)s_0^{m-1} \\ s_0^m \end{bmatrix}. \qquad (2.9.9)$$

С учетом (2.9.9), разложение (2.9.10) можно записать через собственные функций

$$\vec{F_1}(\vec{X}) = \sum_{\lambda_0 : s_0(\pi, \lambda_0) = 0} \frac{1}{m s_{aj}^{'}(\pi, \lambda_0) \frac{d}{d\lambda_0} s_{aj}(\pi, \lambda_0)} \times \begin{Bmatrix} (1-m)s_{a1}(x_1, \lambda_0) \\ s_{a2}(x_2, \lambda_0) \\ \dots \\ s_{am}(x_m, \lambda_0) \end{Bmatrix} \times \qquad (2.9.10)$$

$$\times \begin{Bmatrix} s_{a1}(x_1, \lambda_0) \\ \dots \\ (1-m)s_{a2}(x_{m-1}, \lambda_0) \\ s_{am}(x_m, \lambda_0) \end{Bmatrix} \left(\int_0^{a_{m-1}} f_{m-1}(t_{m-1}) s_{am-1}(t_{m-1}, \lambda_0) dt_{m-1} - \int_0^{a_m} f_m(t_m) s_{am}(t_m, \lambda_0) dt_m \right) +$$

$$+\begin{bmatrix} s_{a1}(x_1,\lambda_0) \\ \dots \\ (1-m)s_{am-1}(x_{m-1},\lambda_0) \\ s_{am}(x_m,\lambda_0) \end{bmatrix}\left(\int_0^{a_{m-1}} f_{m-1}(t_{m-1})s_{am-1}(t_{m-1},\lambda_0)dt_{m-1}-\int_0^{a_m} f_m(t_m)s_{am}(t_m,\lambda_0)dt_m\right).$$

Таким образом, доказана теорема в которой представлено спектральное разложение произвольной вектор-функций из области определения дифференциального оператора заданного на граф-звезде с условиями Кирхгофа во внутренней вершине и с условиями Дирихле на вершинах графа.

Теорема 2.9.3 Пусть Λ оператор, порожденный условиями Кирхгофа (2.3.1) и краевыми условиями (2.3.3), все собственные значения которого суть простые нули функции $s_{aj}(0,\lambda)s'_{aj}(0,\lambda)$. Тогда всякая вектор-функция $\vec{F}(\vec{X})$ из области определения $L_2(\Im)$ оператора Λ разлагается в ряд по собственным функциям оператора Λ

$$\vec{F}(\vec{X})=\sum_{\lambda_0:s_0(\pi,\lambda_0)=0}\frac{1}{ms'_0(\pi,\lambda_0)\dfrac{d}{d\lambda}s_0(\pi,\lambda_0)}\times$$

$$\times\left\{\begin{bmatrix} (1-m)s_{a1}(x_1,\lambda_0) \\ \dots \\ s_{am-1}(x_{m-1},\lambda_0) \\ s_{am}(x_m,\lambda_0) \end{bmatrix}\left(\int_0^{a_1} f_1(t_1)s_{a1}(t_1,\lambda_0)dt_1-\int_0^{a_m} f_m(t_m)s_{am}(t_m,\lambda_0)dt_m\right)+\right.$$

$$+\begin{bmatrix} s_{a1}(x_1,\lambda_0) \\ (1-m)s_{a2}(x_1,\lambda_0) \\ \dots \\ s_{am}(x_m,\lambda_0) \end{bmatrix}\left(\int_0^{a_2} f_2(t_2)s_{a2}(t_2,\lambda_0)dt_2-\int_0^{a_m} f_m(t_m)s_{am}(t_m,\lambda_0)dt_m\right)+\dots+$$

$$\left.+\begin{bmatrix} s_{a1}(x_1,\lambda_0) \\ \dots \\ (1-m)s_{am-1}(x_{m-1},\lambda_0) \\ s_{am}(x_m,\lambda_0) \end{bmatrix}\left(\int_0^{a_{m-1}} f_{m-1}(t_{m-1})s_{am-1}(t_{m-1},\lambda_0)dt_{m-1}-\int_0^{a_m} f_m(t_m)s_{am}(t_m,\lambda_0)dt_m\right)+\right.$$

$$+\sum_{\lambda_1: s'_{aj}(0,\lambda_1)=0} \frac{1}{ms'_{aj}(0,\lambda_1)\dfrac{d}{d\lambda_1}s_{aj}(0,\lambda_1)}\left[\int_0^{a_1} f_1(t_1)s_{a1}(t_1,\lambda_1)dt_1+\ldots+\int_0^{a_m} f_m(t_m)s_{am}(t_m,\lambda_1)dt_m\right]\begin{bmatrix} s_{a1}(x_1,\lambda_1)\\ \ldots\\ s_{am}(x_m,\lambda_1)\end{bmatrix}.$$

Здесь $\begin{bmatrix}(1-m)s_{a1}(x_1,\lambda_0)\\ s_{a2}(x_2,\lambda_0)\\ \ldots\\ s_{am}(x_m,\lambda_0)\end{bmatrix},\ldots,\begin{bmatrix} s_{a1}(x_1,\lambda_0)\\ \ldots\\ (1\text{-}m)s_{am-1}(x_{m-1},\lambda_0)\\ s_{am}(x_m,\lambda_0)\end{bmatrix}$ – собственные функций, соответствующие собственным значениям λ_0, $\left(\int_0^{a_1} f_1(t_1)s_{a_1}(t_1,\lambda_0)dt_1-\int_0^{a_m} f_m(t_m)s_{am}(t_m,\lambda_0)dt_m\right),\ldots,\left(\int_0^{a_{m-1}} f_{m-1}(t_{m-1})s_{am-1}(t_{m-1},\lambda_0)dt_{m-1}-\int_0^{a_m} f_m(t_m)s_{am}(t_m,\lambda_0)dt_m\right)$ – коэффициенты Фурье разложения по собственным функциям, соответствующие собственным значениям λ_0, $\begin{bmatrix} s_{a1}(x_1,\lambda_1)\\ s_{a2}(x_2,\lambda_1)\\ \ldots\\ s_{am}(x_m,\lambda_1)\end{bmatrix}$ – собственные функций, соответствующие собственным значениям

λ_1, $\dfrac{1}{ms'_{aj}(0,\lambda_1)\dfrac{d}{d\lambda_1}s_{aj}(0,\lambda_1)}\left[\int_0^{a_1} f_1(t_1)s_{a1}(t_1,\lambda_1)dt_1+\ldots+\int_0^{a_m} f_m(t_m)s_{am}(t_m,\lambda_1)dt_m\right]$-

коэффициенты Фурье разложения по собственным функциям, соответствующие собственным значениям λ_1.

2.10 Представление резольвенты дифференциального оператора на геометрическом графе

Данный пункт посвящен нахождению резольвенты для дифференциального оператора на графе. Выведена формула резольвенты, порождаемой краевой задачей для дифференциального уравнения второго порядка на геометрическом графе.

Основные понятия

Определения и понятия данного пункта соответствует параграфу 1.1

Под геометрическим графом $\Im_0=\{V,E\}$ понимается одномерное стратифицированное многообразие. Множество вершин графа обозначим как $V=\{1,\ldots,N\}$, E – множество ребер. Дуга графа – это одномерное гладкое

регулярное многообразие (кривая), обозначаются через $\gamma \in E$ или (если они занумерованы индексом i) через $\gamma_i \in E$, длина каждого ребра равна $|\gamma_i| = 1$, вершины – через a (или a_j, при этом нумерация вершин предполагается независимой от нумерации дуг). Граничные вершины обозначим через $\Gamma \subset V$. Вершины из множества $I = V \setminus \Gamma$ называем внутренними точками. Множество вершин, соответствующие входящим дугам к вершинам i и j для которых $a_{ij} = +1$ обозначим через V_i^+, а множество вершин, соответствующие исходящим дугам из вершины i и j для которых $a_{ij} = -1$ обозначим через V_i^-.Пусть $\chi = \sum_{s \in \Gamma} (|V^+(s)| + |V^-(s)|)$.

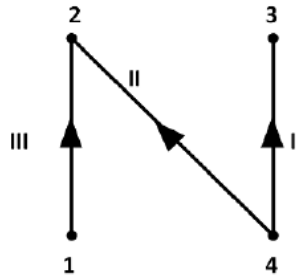


Рисунок 2.10.1

Рассмотрим ориентированный граф $\Im_0 = \{V, E\}$, изображенный на рисунке 2.10.1, где мощность множества вершин $|V| = 4$, количество ребер $|\gamma| = 3$. Граничные вершины $\Gamma \subset V$ состоит из вершин 1 и 3, элементами множества $I = V \setminus \Gamma$ являются вершины 2 и 4. Дуги графа $\Im_0$ обозначим через: $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$. Сумма входящих и исходящих вершин $\chi = 2$.

Рассмотрим пространство

$$L_2(\Im_0) := L_2(\gamma_1) \otimes L_2(\gamma_2) \otimes L_2(\gamma_3)$$

с элементами

$$\vec{\Psi}(\vec{X}) = [\psi_{\gamma_1}(x_{\gamma_1}), \psi_{\gamma_2}(x_{\gamma_2}), \psi_{\gamma_3}(x_{\gamma_3})]^T,$$

где $\otimes$– декартово произведение подпространств.

На каждой дуге графа $\Im_0$ определено дифференциальное выражение:

$$\Lambda_{\gamma_1} \psi_{\gamma_1}(x_{\gamma_1}) \equiv -\frac{d^2}{dx_{\gamma_1}^2} \psi_{\gamma_1} + u_{\gamma_1}(x_{\gamma_1}) \psi_{\gamma_1}(x_{\gamma_1}) = f_{\gamma_1}(x_{\gamma_1}), 0 < x_{\gamma_1} < 1. \qquad (2.10.1)$$

$$\Lambda_{\gamma_2}\psi_{\gamma_2}(x_{\gamma_2}) \equiv -\frac{d^2}{dx_{\gamma_2}^2}\psi_{\gamma_2} + u_{\gamma_2}(x_{\gamma_2})\psi_{\gamma_2}(x_{\gamma_2}) = f_{\gamma_2}(x_{\gamma_2}), 0 < x_{\gamma_2} < 1.$$

$$\Lambda_{\gamma_3}\psi_{\gamma_3}(x_{\gamma_3}) \equiv -\frac{d^2}{dx_{\gamma_3}^2}\psi_{\gamma_3} + u_{\gamma_3}(x_{\gamma_3})\psi_{\gamma_3}(x_{\gamma_3}) = f_{\gamma_3}(x_{\gamma_3}), 0 < x_{\gamma_3} < 1.$$

где Λ – дифференциальный оператор, $\psi_{\gamma_i}(x_{\gamma_i}), i = 1,2,3$ функция определенная на каждом ребре γ_i, $u_{\gamma_i}(x_{\gamma_i})$ – вещественная функция, называемая потенциалом, $f_{\gamma_i}(x_{\gamma_i})$ – плотность распределения внешней силы.

Потребуем, чтобы во внутренних вершинах $2,4 \in I$ выполнялись условия непрерывности:

$$\begin{aligned} \psi_{\gamma_3}(1) &= \psi_{\gamma_2}(1), \text{ при } 2 \in V_i^+ \\ \psi_{\gamma_2}(0) &= \psi_{\gamma_1}(0), \text{ при } 4 \in V_i^- \end{aligned} \qquad (2.10.2)$$

Так же потребуем, чтобы во внутренних вершинах $2,4 \in I$ выполнялось условие сохранения баланса потока:

$$\begin{aligned} \psi'_{\gamma_3}(1) - \psi'_{\gamma_2}(1) &= 0, \\ \psi'_{\gamma_2}(0) + \psi'_{\gamma_1}(0) &= 0 \end{aligned} \qquad (2.10.3)$$

Заметим, что законы (2.10.2), (2.10.3) известны в электротехнике как законы Кирхгофа [11].

В граничных вершинах потребуем выполнение краевых условии

$$\begin{aligned} U_1(\Psi(X)) &= \psi'_{,\gamma_3}(0) = 0, \\ U_2(\Psi(X)) &= \psi'_{,\gamma_1}(0) = 0 \end{aligned} \qquad (2.10.4)$$

Оператор B с областью определения $D(B) = W_2^2(\Im_0)$ и задаваемый линейными дифференциальными выражениями и условиями во внутренних точках

$$B\vec{\Psi}(\vec{X}) := [\Lambda_e\psi_e(x_e) := -\frac{d^2}{dx_e^2}\psi_e(x_e) + u_e(x_e)\psi_e(x_e), e = \{\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3\}:$$

$$\psi_{\gamma_3}(1) = \psi_{\gamma_2}(1), \psi_{\gamma_2}(1) = \psi_{\gamma_1}(0), 2 \in V_1^+, 4 \in V_4^-, \psi'_{\gamma_3}(1) - \psi'_{\gamma_2}(1) = 0, \psi'_{\gamma_2}(0) + \psi'_{\gamma_1}(0) = 0]^T$$

назовем максимальным оператором.

Заметим, что ядро $KerB = \{\vec{\Psi}(\vec{X}) \in D(B) : B\vec{\Psi}(\vec{X}) = 0\}$, и оно имеет конечную размерность $\dim KerB = \chi$.

Набор линейных граничных форм $\{U_1, U_2\}$ представляет линейно независимую систему функционалов в подпространстве $KerB$ размерности χ. Тогда в пространстве $KerB$ найдется единственная система функции $\left\{\vec{\Psi_1}(\vec{X}), \vec{\Psi_2}(\vec{X})\right\}$, подчиненная условиям

$$U_r(\vec{\Psi_t}(\vec{X})) = \delta_{rt},$$

где $\delta_{rt} = \begin{cases} 0, r \neq t \\ 1, r = t. \end{cases}$, $r, t = 1,2.$

Система функции $\{\vec{\Psi}_1(\vec{X}), \vec{\Psi}_2(\vec{X})\}$ называется биортогональной в подпространстве $KerB$ к системе линейных функционалов $\{U_r\}$.

Обозначим через Λ_0 сужение максимального оператора B с областью определения

$$D(\Lambda_0) = \{\vec{\Psi}(\vec{X}) \in W_2^2(\Im) : U_1(\vec{\Psi}_{\gamma_3}(\vec{X})) = 0, U_2(\vec{\Psi}_{\gamma_3}(\vec{X})) = 0\}$$

Теорема 2.10.1 Если набор $\{U_1, U_2\}$ краевых форм линейно независим, то существует непрерывный обратный оператор Λ_0^{-1}, соответствующий краевой задаче (1.1), (1.2), (1.3), (1.4) в пространстве $L_2(\Im_0)$.

Доказательство. Общее решение каждого дифференциального уравнения (2.10.1) имеет по две константы. Следовательно, к системе уравнений (2.10.1) для корректной постановки краевой задачи надо добавить $2|E| = 6$ граничных условий. Суммарное количество условий вида (2.10.2), (2.10.3) и (2.10.4) равно сумме индексов всех вершин, т.е. удвоенному числу дуг $2|E|$:

$$\sum_{i \in I}(|V^+(i)| + |V^-(i)|) + \sum_{s \in \Gamma}(|V^+(s)| + |V^-(s)|) = 2|E|.$$

$$\sum_{i \in I}(|V^+(i)| + |V^-(i)|) + \sum_{s \in \Gamma}(|V^+(s)| + |V^-(s)|) = 6.$$

Таким образом, обратный дифференциальный оператор Λ_0^{-1}, соответствующий краевой задаче (2.10.1), (2.10.2), (2.10.3), (2.10.4) корректно определен на заданном графе $\Im_0$. Теорема доказана.

2.11 Резольвента корректного сужения дифференциального оператора на графе с гладкой областью определения

Рассмотрим оператор Λ_0 задаваемый линейными дифференциальными выражениями

$$\Lambda_0\psi_{\gamma_1}(x_{\gamma_1}) \equiv -\frac{d^2}{dx_{\gamma_1}^2}\psi_{\gamma_1} + \lambda\psi_{\gamma_1}(x_{\gamma_1}) = f_{\gamma_1}(x_{\gamma_1}), 0 < x_{\gamma_1} < 1. \qquad (2.11.1)$$

$$\Lambda_0\psi_{\gamma_2}(x_{\gamma_2}) \equiv -\frac{d^2}{dx_{\gamma_2}^2}\psi_{\gamma_2} + \lambda\psi_{\gamma_2}(x_{\gamma_2}) = f_{\gamma_2}(x_{\gamma_2}), 0 < x_{\gamma_2} < 1.$$

$$\Lambda_0\psi_{\gamma_3}(x_{\gamma_{3_1}}) \equiv -\frac{d^2}{dx_{\gamma_3}^2}\psi_{\gamma_3} + \lambda\psi_{\gamma_3}(x_{\gamma_3}) = f_{\gamma_3}(x_{\gamma_3}), 0 < x_{\gamma_3} < 1.$$

где λ – комплексный параметр и с областью определения

$$D(\Lambda_0) = \{\vec{\Psi}(\vec{X}) \in W_2^2(\Im_0) : U_1(\vec{\Psi}_{\gamma_3}(\vec{X})) = 0, U_2(\vec{\Psi}_{\gamma_1}(\vec{X})) = 0\}.$$

Оператор Λ_0 также является корректным сужением максимального оператора B.

В монографии [12] решение уравнения (2.10.1) записано через функцию Грина в следующем виде

$$\psi_e(x_e) = \frac{H_e(x_{\gamma_i}, f, \lambda, t)}{\Delta(\lambda)} \quad , \qquad (2.11.2)$$

где $\vec{F}(\vec{X}) = (f_e(x_e), e = \{\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3\}) \in L_2(\Im_0).$

Функции $\Delta(\lambda)$ и $H_{\gamma_i}(x_{\gamma_i}, f, \lambda, t)$ определяются через фундаментальную систему решений однородного дифференциального уравнения

$$-\frac{d^2}{dx_e^2}\psi_e - \lambda\psi_e(x_e) = 0, \; 0 < x_e < 1, e = \{\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3\} \qquad (2.11.3)$$

где

$$\Delta(\lambda)=\begin{vmatrix} \cos\sqrt{\lambda} & -\cos\sqrt{\lambda} & \dfrac{\sin\sqrt{\lambda}}{\sqrt{\lambda}} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -\cos\sqrt{\lambda} \\ \sqrt{\lambda}\sin\sqrt{\lambda} & \sqrt{\lambda}\sin\sqrt{\lambda} & \cos\sqrt{\lambda} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\sqrt{\lambda}\sin\sqrt{\lambda} \end{vmatrix} = -\sqrt{\lambda}\sin 3\sqrt{\lambda}$$

$$H_{\gamma_1}(x_{\gamma_1}, f, \lambda, t)=\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & \cos\sqrt{\lambda}x\gamma_1 & -\int_1^x \dfrac{\sin\sqrt{\lambda}(t-x_{\gamma_1})}{\sqrt{\lambda}} f_{\gamma_1}dt \\ \cos\sqrt{\lambda} & -\cos\sqrt{\lambda} & \dfrac{\sin\sqrt{\lambda}}{\sqrt{\lambda}} & 0 & \int_0^1 \dfrac{\sin\sqrt{\lambda}t}{\sqrt{\lambda}} f_{\gamma_3}dt - \int_0^1 \dfrac{\sin\sqrt{\lambda}t}{\sqrt{\lambda}} f_{\gamma_2}dt \\ 0 & 1 & 0 & -\cos\sqrt{\lambda} & -\int_0^1 \dfrac{\sin\sqrt{\lambda}t}{\sqrt{\lambda}} f_{\gamma_3}dt \\ \sqrt{\lambda}\sin\sqrt{\lambda} & \sqrt{\lambda}\sin\sqrt{s} & \cos\sqrt{\lambda} & 0 & -\int_0^1 \cos\sqrt{\lambda}tf_{\gamma_3}dt - \int_0^1 \cos\sqrt{\lambda}tf_{\gamma_2}dt \\ 0 & 0 & 1 & -\sqrt{\lambda}\sin\sqrt{\lambda} & \int_0^1 \dfrac{\sin\sqrt{\lambda}t}{\sqrt{\lambda}} f_{\gamma_1}dt \end{vmatrix}$$

$$H_{\gamma_2}(x_{\gamma_2}, f, \lambda, t)=\begin{vmatrix} 0 & \cos\sqrt{\lambda}(x_{\gamma_2}-1) & \dfrac{\sin\sqrt{\lambda}(x_{\gamma_2}-t)}{\sqrt{\lambda}} & 0 & -\int_1^x \dfrac{\sin\sqrt{\lambda}(t-x_{\gamma_2})}{\sqrt{\lambda}} f_{\gamma_2}dt \\ \cos\sqrt{\lambda} & -\cos\sqrt{\lambda} & \dfrac{\sin\sqrt{\lambda}}{\sqrt{\lambda}} & 0 & \int_0^1 \dfrac{\sin\sqrt{\lambda}t}{\sqrt{\lambda}} f_{\gamma_3}dt - \int_0^1 \dfrac{\sin\sqrt{\lambda}t}{\sqrt{\lambda}} f_{\gamma_2}dt \\ 0 & 1 & 0 & -\cos\sqrt{\lambda} & -\int_0^1 \dfrac{\sin\sqrt{\lambda}t}{\sqrt{\lambda}} f_{\gamma_3}dt \\ \sqrt{\lambda}\sin\sqrt{\lambda} & \sqrt{\lambda}\sin\sqrt{s} & \cos\sqrt{\lambda} & 0 & -\int_0^1 \cos\sqrt{\lambda}tf_{\gamma_3}dt - \int_0^1 \cos\sqrt{\lambda}tf_{\gamma_2}dt \\ 0 & 0 & 1 & -\sqrt{\lambda}\sin\sqrt{\lambda} & \int_0^1 \cos\sqrt{\lambda}tf_{\gamma_3}dt \end{vmatrix}$$

$$H_{\gamma_3}(x_1, f, \lambda, t)=\begin{vmatrix} \cos\sqrt{\lambda}(x_{\gamma_3}-1) & 0 & 0 & 0 & -\int_1^x \dfrac{\sin\sqrt{\lambda}(t-x_{\gamma_3})}{\sqrt{\lambda}} f_{\gamma_3}dt \\ \cos\sqrt{\lambda} & -\cos\sqrt{\lambda} & \dfrac{\sin\sqrt{\lambda}}{\sqrt{\lambda}} & 0 & \int_0^1 \dfrac{\sin\sqrt{\lambda}t}{\sqrt{\lambda}} f_{\gamma_3}dt - \int_0^1 \dfrac{\sin\sqrt{\lambda}t}{\sqrt{\lambda}} f_{\gamma_2}dt \\ 0 & 1 & 0 & -\cos\sqrt{\lambda} & \int_0^1 \dfrac{\sin\sqrt{\lambda}t}{\sqrt{\lambda}} f_{\gamma_1}dt \\ \sqrt{\lambda}\sin\sqrt{\lambda} & \sqrt{\lambda}\sin\sqrt{s} & \cos\sqrt{\lambda} & 0 & -\int_0^1 \cos\sqrt{\lambda}tf_{\gamma_3}dt - \int_0^1 \cos\sqrt{\lambda}tf_{\gamma_2}dt \\ 0 & 0 & 1 & -\sqrt{\lambda}\sin\sqrt{\lambda} & -\int_0^1 \cos\sqrt{\lambda}tf_{\gamma_1}dt \end{vmatrix}$$

Тогда подставляя найденные значения в (2.10.2), получим

$$(\Lambda_0 - \lambda I)^{-1}\vec{F}(\vec{X}) = \begin{bmatrix} \dfrac{H_{\gamma_1}(x_{\gamma_1}, f, \lambda, t)}{\Delta(\lambda)} \\ \dfrac{H_{\gamma_2}(x_{\gamma_2}, f, \lambda, t)}{\Delta(\lambda)} \\ \dfrac{H_{\gamma_3}(x_{\gamma_3}, f, \lambda, t)}{\Delta(\lambda)} \end{bmatrix} = \frac{1}{\Delta(\lambda)} \begin{bmatrix} H_{\gamma_1}(x_{\gamma_1}, f, \lambda) \\ H_{\gamma_2}(x_{\gamma_2}, f, \lambda) \\ H_{\gamma_3}(x_{\gamma_3}, f, \lambda) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_{\gamma_1}(t) \\ f_{\gamma_2}(t) \\ f_{\gamma_3}(t) \end{bmatrix} = \qquad =-$$

$$= -\frac{1}{\Delta(\lambda)} \int_0^1 \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_{\gamma_1}(t) \\ f_{\gamma_2}(t) \\ f_{\gamma_3}(t) \end{pmatrix} dt = -\frac{1}{\Delta(\lambda)} \int_0^1 A\,\vec{F} dt,$$

где матрица A состоит из членов:

$$A_{11}(x_{\gamma_1}, \lambda, t) = \begin{vmatrix} \cos\sqrt{\lambda}(x_{\gamma_1} - 1) & 0 & 0 & 0 & -\dfrac{\sin\sqrt{\lambda}(t - x_{\gamma_1})}{\sqrt{\lambda}} \\ \cos\sqrt{\lambda} & -\cos\sqrt{\lambda} & \dfrac{\sin\sqrt{\lambda}}{\sqrt{\lambda}} & 0 & \dfrac{\sin\sqrt{\lambda}t}{\sqrt{\lambda}} \\ 0 & 1 & 0 & -\cos\sqrt{\lambda} & 0 \\ \sqrt{\lambda}\sin\sqrt{\lambda} & \sqrt{\lambda}\sin\sqrt{\lambda} & \cos\sqrt{\lambda} & 0 & -\cos\sqrt{\lambda}t \\ 0 & 0 & 1 & -\sqrt{\lambda}\sin\sqrt{\lambda} & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= -\cos\sqrt{\lambda}(x_{\gamma_1} - 1)\cos\sqrt{\lambda}(t + 2),$$

Точно также вычисляются другие элементы матрицы .

Таким образом, доказана следующая теорема.

Теорема 2.11.1 Справедливо следующее представление резольвенты $(\Lambda_0 - \lambda I)^{-1}$ оператора Λ_0 на графе $\Im_0$

$$(\Lambda_0 - \lambda I)^{-1}\vec{F}(\vec{X}) = -\frac{1}{\Delta(\lambda)} \int_0^1 A\,\vec{F} dt, \qquad (2.11.4)$$

для $\forall\, \vec{F}(\vec{X}) = (f_{\gamma_i}(x_{\gamma_i}), \gamma_i \in \varepsilon_0) \in L_2(\Im_0)$, где элементы A_{ij} матрицы A представлены выше, $E_0 = \{\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3\}$.

Данный пункт соотвествует работе автора [59].

3 ПРОСТЕЙШИЕ ГРАФЫ С МАЛЫМИ ДУГАМИ

В настоящей главе рассматривается звездный граф, состоящий из двух бесконечных дуг и одной дуги малой длины. На таком графе рассматривается оператор Шредингера с кусочно – постоянными потенциалами на бесконечных дугах и сингулярным потенциалом на малой дуге. Длина последней дуги считается малым параметром в задаче. Во внутренней вершине данного графа задается $\delta'-$взаимодействие, в граничной вершине малой дуги – условие Неймана. Определены предельные краевые условия, в операторной норме получены двучленные асимптотики для резольвент рассматриваемых операторов и даны оценки остатков. Также изучается эффект возникновение изолированных собственных значений из края существенного спектра. Установлены эффективные, легко проверяемые достаточные условия существования и отсутствия таких собственных значений и обнаружена голоморфная зависимость по малому параметру собственных значений возникающих из края существенного спектра. Во второй задаче рассматривается простейший граф, состоящий из двух дуг конечной длины и малой дуги с общей внутренней вершиной. Длина малой дуги считается малым параметром в задаче, описывающем возмущение. На таком графе дуге также рассматривается оператор Шредингера с условиями Кирхгофа во внутренней вершине, условиями Дирихле на внешних конечных дугах и условием Дирихле либо условием Неймана на внешней вершине малой дуги. Показано, что такие операторы в смысле равномерное резольвентной сходимости сходится к оператору Шредингеру на графе без малой дуги. Получен результат для резольвент – выяснение вида первой поправки в их асимптотике и получение оценки остатка. Изучены зависимости собственных значений от малого параметра. Несмотря на по сути сингулярное возмущение графа, собственные значения зависят от малого параметра голоморфно и представляется сходящимися степенными рядами. Обнаружено, что при возмущении могут возникать неподвижные собственные значения, остающиеся на месте и не зависящие от малого параметра. Приведен критерий, определяющий возникновение таких собственных значений. Для подвижных собственных значений выписаны формулы для коэффициента в первом члене в их ряде Тейлора. Заметим, что в работе автора [59] также написано представление резольвент дифференциального оператора второго порядка на графах.

3.1 Возмущение края непрерывного спектра простейшего графа с малой дугой

Пусть $\Im_\varepsilon$ – ориентированный звездный граф, состоящий из двух бесконечных дуг, одной дуги малой длины, одной внутренней вершины и одной граничной вершины, см. рис. 3.1.1. Бесконечные дуги обозначим через $e_\pm$, малая дуга – через e_ε, где ε – длина этой дуги, которая далее выступает в роли малого параметра. Внутреннюю вершину обозначим через M_0, граничную вершину, являющуюся концами дуги e_ε – через M_ε. На дугах $e_\pm$ введем переменные $x_\pm \in [0,+\infty)$, на дуге e_ε – переменную $x_\varepsilon \in [0,\varepsilon]$. Считаем, что значения $x_\pm = 0$, $x_\varepsilon = 0$ соответствуют вершине M_0, а значение $x_\varepsilon = \varepsilon$ – вершине M_ε.

В пространстве $L_2(\Im_\varepsilon) := L_2(e_-) \oplus L_2(e_+) \oplus L_2(e_\varepsilon)$ рассматривается оператор Шредингера с δ' – взаимодействием.

Дифференциальное выражение для этого оператора имеет вид:

$$-\frac{d^2}{dx^2} + V_\varepsilon(x),$$

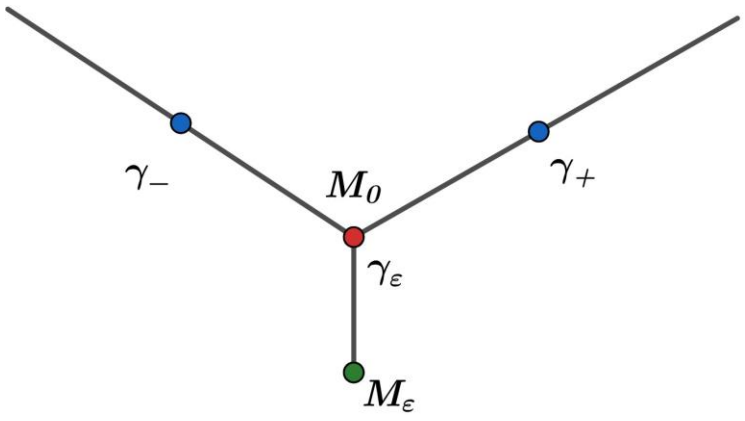


Рис. 3.1.1: Граф, с малой дугой. Синие точки на малых дугах соответствуют точкам смены значений кусочно – постоянных потенциалов $W_\pm$. Красный и зеленый цвета отражают граничные условия разных типов.

где производных берутся вдоль дуг, а потенциал V_ε имеет вид

$$V_\varepsilon(x) := \begin{cases} W_\pm(x_\pm) \text{ на } e_\pm, \\ \varepsilon^{-1} W_{-1}\left(\frac{x_\varepsilon}{\varepsilon}\right) + W_0\left(\frac{x_\varepsilon}{\varepsilon}\right) \text{ на } e_\varepsilon. \end{cases}$$

Здесь W_{-1}, W_0 – ограниченные вещественные измеримые функции на [0,1], а потенциалы

$$W_\pm(x_\pm) := \begin{cases} 1, & x_\pm > a_\pm, \\ 0, & 0 < x_\pm < a_\pm. \end{cases}$$

В вершине M_0 ставится граничное условие, описывающее δ' – взаимодействие:

$$y_-'(0) = y_+'(0) = y_\varepsilon'(0) =: y'(M_0),\ y_-(0) + y_+(0) + y_\varepsilon(0) = \alpha y'(M_0), \qquad (3.1.1)$$

где $y = (y_-, y_+, y_\varepsilon)$ – функция, заданная на графе $\Im_\varepsilon$, а $\alpha \in R$ – некоторая константа. На конце дуги e_ε, в вершине M_ε, ставится условие Дирихле:

$$y_\varepsilon(\varepsilon) = 0 \qquad (3.1.2)$$

или условие Неймана

$$y_\varepsilon'(\varepsilon) = 0. \qquad (3.1.3)$$

В случае условия Дирихле описанный оператор обозначаем через H_ε^D, в случае условия Неймана – через H_ε^R. Области определения этих операторов задаются равенствами:

$$D(\mathrm{H}_\varepsilon^D) := \{y = (y_-, y_+, y_\varepsilon) \in L_2(\mathfrak{I}_\varepsilon) : y_\pm \in W_2^2(e_\pm), y_\varepsilon \in W_2^2(e_\varepsilon),$$
выполнены условия (3.1.1),(3.1.2)$\}$,

$$D(\mathrm{H}_\varepsilon^R) := \{y = (y_-, y_+, y_\varepsilon) \in L_2(\mathfrak{I}_\varepsilon) : y_\pm \in W_2^2(e_\pm), y_\varepsilon \in W_2^2(e_\varepsilon),$$
выполнены условия (3.1.1),(3.1.3)$\}$.

Операторы H_ε^D и H_ε^R самосопряжены.

Существенные спектры операторов H_ε^D и H_ε^R не зависят от ε и даются равенством:

$$\sigma_{ess}(\mathrm{H}_\varepsilon^D) = \sigma_{ess}(\mathrm{H}_\varepsilon^R) = [1, +\infty).$$

Цель этого параграфа – выяснить условия существования у операторов H_ε^D и H_ε^R изолированных собственных значений в окрестности края существенного спектра и описать поведение таких собственных значений.

Наш первый результат описывает предельные операторы. Через $\mathfrak{I}_0$ обозначим предельный граф, состоящий из двух дуг e_- и e_+, соединенных вершинах M_0, см.рис.3.1.2. В пространстве $L_2(\mathfrak{I}_0) := L_2(e_-) \oplus L_2(e_+)$ введем оператор $\mathrm{H}_0^\beta, \beta \in R,$ с дифференциальным выражением

$$-\frac{d^2}{dx^2} + V_0, V_0 := W_\pm \text{ на } e_\pm \qquad (3.1.4)$$

и $\delta'-$взаимодействием в вершине M_0:

$$y_-'(0) = y_+'(0) =: y'(K_0),\ y_-(0) + y_+(0) =: \beta y'(K_0), \qquad (3.1.5)$$

Область определение оператора H_0^β вводится следующим образом:

$$D(\mathrm{H}_0^\beta) := \{y = (y_-, y_+) \in L_2(\mathfrak{I}_0) : y_\pm \in W_2^2(e_\pm),\ \text{выполнено условие (3.1.5)}\}.$$

Введем также оператор H_0^N в $L_2(\mathfrak{I}_0)$ с дифференциальным выражением (3.1.4) и условием Неймана в вершине M_0:

$$y_\pm'(0) = 0. \qquad (3.1.6)$$

Область определения оператора H_0^N дается равенством

$$D(\mathrm{H}_0^N) := \{y = (y_-, y_+) \in L_2(\mathfrak{I}_0) : y_\pm \in W_2^2(e_\pm),\ \text{выполнено условие (3.1.6)}\}.$$

Операторы H_0^β и H_0^N самосопряжены.

Возьмем произвольно $\lambda \in C$ с ненулевой мнимой частью и положим:

$$U_\pm(x_\pm, \lambda) := \begin{cases} \sqrt{\lambda} e^{-\sqrt{1-\lambda}(x_\pm - a_\pm)}, & x_\pm > a_\pm, \\ \sqrt{\lambda}\cos(\sqrt{\lambda}(x_\pm - a_\pm)) - \sqrt{1-\lambda}\sin(\sqrt{\lambda}(x_\pm - a_\pm)), & x_\pm < a_\pm, \end{cases}$$

где для каждого λ ветвь корня выбирается из условия $\mathrm{Re}\sqrt{1-\lambda} > 0$. Введенные функции являются решениями дифференциальных уравнений

$$-U_{\pm}^{''} + W_{\pm}U_{\pm} = \lambda U_{\pm},\ x_{\pm} > 0,$$

и экспоненциально убывают при $x_{\pm} \to +\infty$. Обозначим

$$\Psi(x,\lambda) := \begin{cases} \dfrac{U_{-}(x_{-},\lambda)}{U_{-}^{'}(0,\lambda)} & \text{на } e_{-}, \\ \dfrac{U_{+}(x_{+},\lambda)}{U_{+}^{'}(0,\lambda)} & \text{на } e_{+}. \end{cases}$$

Данное определение корректно, так как $U_{\pm}^{'}(0,\lambda) \neq 0$ при $\operatorname{Im}\lambda \neq 0$; в противном случае операторы Шредингера $-\dfrac{d^2}{dx^2} + W_{\pm}$ на дугах $e_{\pm}$ с краевыми условиями Неймана имели бы комплексные собственные значения.

Первый результат описывает равномерную резольвентную сходимость для оператора $\mathrm{H}_{\varepsilon}^{D}$.

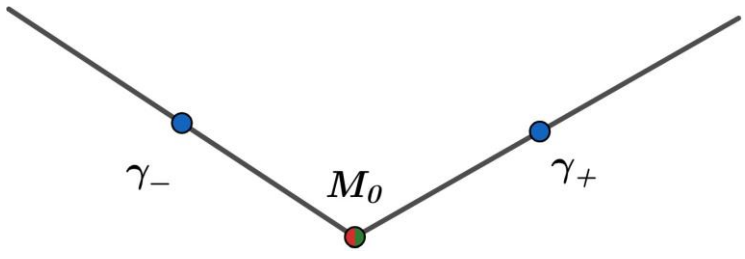


Рис 3.1.2: Предельный граф. Зелено – красная точка отражает факт наличия различных предельных краевых условий.

Теорема 3.1.1 При $\operatorname{Im}\lambda \neq 0$ для всех $f \in L_2(\mathfrak{I}_{\varepsilon})$ справедливы оценки:

$$\| (\mathrm{H}_\varepsilon^D - \lambda)^{-1} f - (\mathrm{H}_0^\alpha - \lambda)^{-1} f |_{\Im_0} - \varepsilon l^D(f|_{\Im_0})\Psi \|_{W_2^2(e_-)\oplus W_2^2(e_+)} \le c\left(\varepsilon^2 \| f \|_{L_2(\Im_0)} + \varepsilon^{\frac{3}{2}} \| f \|_{L_2(e_\varepsilon)} \right), \tag{3.1.7}$$

$$\| (\mathrm{H}_\varepsilon^D - \lambda)^{-1} f \|_{L_2(e_\varepsilon)} \le c\varepsilon^2 \| f \|_{L_2(\Im_\varepsilon)}, \tag{3.1.8}$$

где c – некоторая константа, не зависящая от f и ε, и

$$l^D(f|_{\Im_0}) := \frac{y_0'(0)}{\dfrac{U_-(0,\lambda)}{U'_-(0,\lambda)} + \dfrac{U_+(0,\lambda)}{U'_+(0,\lambda)} - \alpha}, \quad y_0 := (\mathrm{H}_0^\alpha - \lambda)^{-1} f|_{\Im_0}.$$

Обозначим:

$$\theta_0 := \int_0^1 W_{-1}(t)dt, \ \theta_1 := \int_0^1 tW_{-1}(t)dt,$$

$$\theta_2 := \int_0^1 tW_{-1}(t)dt + \frac{\theta_1^2}{2} - \int_0^1 t\left(\int_t^1 W_{-1}(\xi)d\xi \right)^2 dt,$$

Вторая теорема описывает равномерную резольвентную сходимость оператора H_ε^R в случае $\theta_0 \neq 0$. Обозначим: $\beta := \alpha + \theta_0^{-1}$.

Теорема 3.1.2. Пусть $\theta_0 \neq 0$. Тогда при $\mathrm{Im}\,\lambda \neq 0$ для всех $f \in L_2(\Im_\varepsilon)$ справедливы оценки:

$$\| (\mathrm{H}_\varepsilon^R - \lambda)^{-1} f - (\mathrm{H}_0^\beta - \lambda)^{-1} f |_{\Im_0} - \varepsilon l^R(f)\Psi \|_{W_2^2(e_-)\oplus W_2^2(e_+)} \le c\left(\varepsilon^2 \| f \|_{L_2(\Im_0)} + \varepsilon^{\frac{3}{2}} \| f \|_{L_2(e_\varepsilon)} \right),$$

$$\| (\mathrm{H}_\varepsilon^D - \lambda)^{-1} f \|_{L_2(e_\varepsilon)} \le c\left(\varepsilon \| f \|_{L_2(\Im_0)} + \varepsilon^{\frac{3}{2}} \| f \|_{L_2(e_\varepsilon)} \right),$$

где c – некоторая константа, не зависящая от f и ε,

$$l^R(f)=\frac{1}{\theta_0}\frac{(\theta_1+\theta_0^{-1}(\lambda+\theta_2))y_0'(0)-\int\limits_{e_\varepsilon} f(x_\varepsilon)dx_\varepsilon}{\frac{U_-(0,\lambda)}{U_-'(0,\lambda)}+\frac{U_+(0,\lambda)}{U_+'(0,\lambda)}-\beta},\quad y_0:=(\mathrm{H}_0^\beta-\lambda)^{-1}f|_{\Im_0}.$$

Равномерной резольвентной сходимости оператора H_ε^R в случае $\theta_0=0$ посвящена третья теорема.

Теорема 3.1.3. Пусть $\theta_0=0.$ Тогда при $\operatorname{Im}\lambda\neq 0$ для всех $f\in L_2(\Im_\varepsilon)$ справедливы оценки:

$$\|(\mathrm{H}_\varepsilon^R-\lambda)^{-1}f-(\mathrm{H}_0^N-\lambda)^{-1}f|_{\Im_0}-l^N(f)\Psi\|_{W_2^2(e_-)\oplus W_2^2(e_+)}\le c\left(\varepsilon^2\|f\|_{L_2(\Im_0)}+\varepsilon^{\frac{3}{2}}\|f\|_{L_2(e_\varepsilon)}\right),$$

$$\|(\mathrm{H}_\varepsilon^N-\lambda)^{-1}f\|_{L_2(e_\varepsilon)}\le c\left(\varepsilon^{\frac{1}{2}}\|f\|_{L_2(\Im_0)}+\varepsilon\|f\|_{L_2(e_\varepsilon)}\right),$$

где c – некоторая константа, не зависящая от f и ε,

$$l^N(f):=\int\limits_{e_\varepsilon} f(x_\varepsilon)dx_\varepsilon-\varepsilon(\lambda+\theta_2)(y_0^-(0)+y_0^+(0)),\ y_0=(y_0^-,y_0^+):=(\mathrm{H}_0^N-\lambda)^{-1}f|_{\Im_0}.$$

Следующие три теоремы описывают изолированные собственные значения операторов H_ε^D и H_ε^R, возникающие из края существенного спектра.

Теорема 3.1.4. Пусть 3.1.8

$$\sin(a_-+a_+)-\alpha\sin a_-\sin a_+\neq 0. \qquad (3.1.9)$$

Тогда оператор H_ε^D не имеет собственных значений, сходящихся к краю существенного спектра при $\varepsilon \to +0$.

Пусть

$$\sin(a_- + a_+) - \alpha \sin a_- \sin a_+ = 0. \tag{3.1.10}$$

Если

$$A_1 := \frac{\sin(a_- + a_+)}{\sin(a_- + a_+) - 2\cos(a_- + a_+)} \le 0,$$

то оператор H_ε^D не имеет собственных значений, сходящихся к краю существенного спектра при $\varepsilon \to +0$. Если же $A_1 > 0$, то оператор H_ε^D имеет единственное собственное значение, сходящееся к краю существенного спектра при $\varepsilon \to +0$. Данное собственное значение простое, голоморфно по ε и первые члены его ряда Тейлора имеют вид:

$$\lambda_\varepsilon = 1 - \frac{\varepsilon^2 A_1^2}{2} - \varepsilon^3 A_2 + O(\varepsilon^4) \tag{3.1.11}$$

$$A_2 := \frac{3+\alpha}{2} A_1^4 - \frac{A_1 \sin a_- \sin a_+}{\sin(a_- + a_+) - 2\cos(a_- + a_+)} \int_0^1 (t-\alpha)(t-1) W_{-1}(t) +$$

$$+ \frac{1}{4}\left(\frac{(a_- + a_+)\sin(a_- + a_+)}{\sin(a_- + a_+) - 2\cos(a_- + a_+)} - (a_- + a_+ + 2 + 2\alpha) \right) A_1^3.$$

Последняя теорема описывает возникающие собственные значения оператора H_ε^R. Вначале рассматривается случай $\theta_0 \ne 0$. Обозначим

$$\theta_3 := \frac{1}{\theta_0}\int_0^1\int_0^1\left(W_0(t)-\left(\int_t^1 W_{-1}(s)ds\right)^2\right)\min(\xi,t)dtd\xi+\frac{\theta_1^2}{2}+\int_0^1\frac{(t-1)^2}{2\theta_0}W_{-1}(t)dt-\frac{1}{2},$$

$$\theta_4 := 1-\theta_0\theta_1-\int_0^1\left(W_0(t)-\left(\int_t^1 W_{-1}(\xi)d\xi\right)^2\right)dt.$$

Теорема 3.1.5. Предположим, что $\theta_0 \neq 0$. Пусть

$$\sin(a_- + a_+) - \beta \sin a_- \sin a_+ \neq 0. \qquad (3.1.12)$$

Тогда оператор H_ε^R не имеет собственных значений, сходящихся к краю существенного спектра при $\varepsilon \to +0$.

Пусть

$$\sin(a_- + a_+) - \beta \sin a_- \sin a_+ = 0. \qquad (3.1.13)$$

Если

$$B_1 := \frac{\left(\theta_1 + \theta_0^{-1}\theta_4\right)\sin a_- \sin a_+}{\theta_0\left(\beta\sin(a_- + a_+) - 2\cos(a_- + a_+)\right)} < 0 \text{ или } \sin a_- = 0 \text{ или } \sin a_+ = 0, \quad (3.1.14)$$

то оператор H_ε^R не имеет собственных значений, сходящихся к краю существенного спектра при $\varepsilon \to +0$. Если же $B_1 > 0$, то оператор H_ε^R имеет единственное собственное значение, сходящееся к краю существенного спектра при $\varepsilon \to +0$. Данное собственное значение простое голоморфно по ε и первые члены ряда Тейлора имеют вид:

$$\lambda_\varepsilon = 1 - \frac{\varepsilon^2 B_1^2}{2} - \varepsilon^3 B_2 + O(\varepsilon^4) \qquad (3.1.15)$$

где обозначено

$$B_2 := \frac{(\beta_1 + 3)\sin(a_- + a_+) - \frac{\beta}{2}(a_- + a_+)\sin(a_- - a_+)}{2\beta\sin(a_- + a_+) - 4\cos(a_- + a_+)} - \frac{6\beta + a_- + a_+}{4})B_1^3 + \frac{\theta_4}{\theta_0}B_1^2 +$$
$$+ \frac{\theta_3 \sin a_- \sin a_+}{\theta_0(\beta\sin(a_- + a_+) - 2\cos(a_- + a_+))}B_1$$

Пусть $\sin a_\pm \neq 0$ и $\theta_1 + \theta_0^{-1}\theta_4 = 0.$ Тогда в случае

$$B_2^0 := \frac{\theta_3 \sin a_- \sin a_+}{\theta_0(\beta\sin(a_- + a_+) - 2\cos(a_- + a_+))} < 0$$

оператор H_ε^R не имеет собственных значений, сходящихся к нулю при $\varepsilon \to +0.$ В случае $B_2^0 > 0$ оператор H_ε^R имеет ровно одно собственное значение, сходящееся к нулю при $\varepsilon \to +0.$ Собственное значение простое и имеет асимптотику:

$$\lambda_\varepsilon = 1 - \frac{\varepsilon^4 (B_2^0)^2}{2} + O(\varepsilon^5). \qquad (3.1.16)$$

Положим

$$\theta_5 := \int_0^1 dt \left(\left(\int_t^1 W_{-1}(\xi) d\xi \right)^2 - W_0(t) \right) \left(2 \int_t^1 (\xi - t) W_{-1}(\xi) d\xi - \theta_1 \right) + \int_0^1 \frac{(t-1)^2}{2} W_{-1}(t) dt.$$

Теорема 3.1.6. Предположим, что $\theta_0 = 0$. Пусть

$$\sin a_- \sin a_+ \neq 0. \tag{3.1.17}$$

Тогда оператор H_ε^R не имеет собственных значений, сходящихся к краю существенного спектра при $\varepsilon \to +0$.

Пусть

$$\sin a_- \sin a_+ = 0. \tag{3.1.18}$$

Если

$$\theta_4 < 0 \text{ или } \theta_4 = 0,\ \theta_5 < 0, \tag{3.1.19}$$

то оператор H_ε^R не имеет собственных значений, сходящихся к краю существенного спектра при $\varepsilon \to +0$. Если

$$\theta_4 < 0 \text{ или } \theta_4 = 0,\ \theta_5 > 0, \tag{3.1.20}$$

то оператор H_ε^R имеет единственное собственное значение, сходящееся к краю существенного спектра при $\varepsilon \to +0$. Данное собственное значение простое, голоморфно по ε и первые челны его ряда Тейлора имеют вид:

$$\lambda_\varepsilon = 1 - \varepsilon^2 E_2 - \varepsilon^3 + O(\varepsilon^4) \text{ при } \theta_4 > 0, \tag{3.1.21}$$

$$\lambda_\varepsilon = 1 - \varepsilon^4 E_4 + O(\varepsilon^5) \text{ при } \theta_4 = 0,\ \theta_5 = 0, \text{ при } \theta_4 > 0, \tag{3.1.22}$$

где обозначено

$$E_2 := \frac{\theta_4^2}{2}, E_4 := \frac{\theta_5^2}{2},$$

$$E_3 := \left(\frac{a_+ \cos a_+ \sin a_- + a_- \cos a_- \sin a_+}{2} + 1 - \theta_1 - 3tg(a_- + a_+) \right) \theta_4^3 + \theta_5 \theta_4,$$

при $\sin(a_- + a_+) \neq 0$, и

$$E_2 := 2\theta_4^2,\ E_4 := 2\theta_5^2,\ E_3 := 4(4\alpha - 2\pi(n+m))\theta_4^3 - 4\theta_1\theta_4^2 + 4\theta_5\theta_4$$

при $\sin(a_- + a_+) = 0$.

Кратко об основных результатах этого параграфа. Первые три теоремы описывают предельный оператор, фактически – предельные краевое условие в вершине M_0. Согласно этим теоремам, предельное условие существенного зависит от типа краевого условия в граничной вершине малой дуги. В случае условия Дирихле в вершине M_ε, в пределе краевое условие в вершине M_0 сохраняется. Если в вершине M_ε задается условие Неймана, то в случае ненулевого среднего θ_0 потенциала W_{-1}, тип условия в вершине M_0 сохраняется, но меняется константа связи с α на $\alpha + \theta_0^{-1}$. Если же данное среднее равно нулю, то в пределе в вершине M_0 краевое условие заменяется на условие Неймана. Подчеркнем еще, что мимо определения вида предельного оператора теоремы 3.1.1, 3.1.2, 3.1.3 дают первые поправки в асимптотике резольвент операторов H_ε^D и H_ε^R и оценки остатков.

Вторая часть основных результатов посвящена эффекту возникновения изолированных собственных значений из края существенного спектра. Сразу

же отмечу, что выбор потенциалов $W_{\pm}$ обеспечивает край существенного спектра в точке 1, что отделяет его от нуля. И тогда даже в случае нулевых потенциалов W_{-1}, W_0 это обеспечивает возможность возникновения собственных значений из края существенного спектра. Если же все потенциалы выбрать нулевыми, то существенный спектр начнется в точке 0 и с учетом не отрицательности оператора у него не может быть изолированных собственных значений.

Как известно, подобные собственные значения возникают только в случае, если у предельного оператора на краю существенного спектра имеется виртуальный уровень, который затем при возмущении может превратиться в собственное значение. В нашем случае виртуальный уровень соответствует наличию нетривиального равномерно ограниченного решения у дифференциальных уравнений

$$-y_{\pm}^{''} + W_{\pm} y_{\pm} = y_{\pm} \text{ на } e_{\pm},$$

удовлетворяющего предельному краевому условию в вершине M_0. Условие ограниченности фактически означает существование вторых производных у решений и их постоянство при $x_{\pm} > a_{\pm}$. И как несложно проверить, критерием существования таких решений являются равенство (3.1.10) для оператора H_0^{α}, равенство (3.1.13) для оператора H_0^{β} и равенство (3.1.18) для оператора H_0^{N}. Поэтому соотношения (3.1.9), (3.1.12), (3.1.17) описывают случаи отсутствия виртуальных уровней и как следствие – отсутствие возможности для возникновения изолированных собственных значений из края существенного спектра.

Даже при наличии виртуального уровня на краю существенного спектра, он не всегда превращается в собственное значение при добавлении малой дуги. Теоремы 3.1.4, 3.1.5, 3.1.6 дают достаточные условия возникновения и отсутствия таких собственных значений. Все условия легко проверяемые – определённая константа должна иметь нужный знак или, в некоторых случаях, обращаться в нуль. Важной особенностью возникающих собственных значений является голоморфная зависимость от ε, несмотря на то, что возмущение малой дугой по сути является сингулярным возмущением и кроме того, потенциалы на этой дуге сингулярно зависят от ε. Ранее такой эффект для аналогичного графа с конечными дугами был обнаружен в [67] при исследовании собственных значений, остающихся в пределе изолированными. Как показывают результаты настоящей статьи, этот эффект сохраняется и в более тонких ситуациях качественное перестройки спектра, к которым

относится и возникновение собственных значений из краев существенного спектра. Еще отметим, что помимо голоморфной зависимости от ε, для возникающих собственных значений явно найдены первые члены их рядов Тейлора.

3.2 Асимтотика резольвенты оператора H_ε^D

В настоящем параграфе доказывается теорема 3.1.1. Пусть $f \in L_2(\Im_\varepsilon)$. Через f_0 обозначим сужение функции f на графе $\Im_0$, а через f_ε – сужение f на дугу e_ε. Положим $y_\varepsilon := \left(\mathrm{H}_\varepsilon^D - \lambda\right)^{-1} f$, $y_0 := \left(\mathrm{H}_0^D - \lambda\right)^{-1} f_0$.

Из определения функций $U_\pm$, Ψ и вида краевого условия (3.1.1) следует, что

$$y_\varepsilon = y_0 + C_\varepsilon \Psi \text{ на } \Im_0, \tag{3.2.1}$$

где C_ε – некоторая константа.

На дуге e_ε рассмотрим вспомогательную задачу Коши:

$$-U_D'' + (\varepsilon W_{-1}(\xi) + \varepsilon^2 W_{-1}(\xi) - \mu)U_D = 0,\ \xi \in (0,1),\ U_D|_{\xi=1} = 0,\ U_D'|_{\xi=1} = 1, \tag{3.2.2}$$

где μ – малый комплексный параметр. Эта задача однозначно разрешима и имеет решение $U_D = U_D(\xi, \varepsilon, \mu)$, голоморфно по ε и μ в норме $W_2^2(0,1)$. Непосредственными вычислениями проверяем, что

$$\begin{aligned} &U_D(\xi,\varepsilon,\mu) = \xi - 1 + \xi\varphi_1(\xi) + O(\varepsilon + |\mu|), \\ &\varphi_1(\xi) = -\int_\xi^1 (t-\xi)(t-1)W_{-1}(t)\,dt. \end{aligned} \tag{3.2.3}$$

Пусть $S_\varepsilon^D -$ оператор Шредингера в пространстве $L_2(0,1)$ с дифференциальным выражением

$$-\frac{d^2}{d\xi^2} + \varepsilon W_{-1}(\xi) + \varepsilon^2 W_0(\xi),$$

краевым условием Дирихле в точке $\xi = 1$ и с условием Неймана в точке $\xi = 0.$ Область определения этого оператора – это функции из $W_2^2(0,1)$, обращающиеся в нуль в точке $\xi = 1$ и имеющие нулевую производную в точке $\xi = 0$. Оператор $S_0^D -$ это вторая производная на интервале на интервале $(0,1)$ с указанными краевыми условиями. Ясно, что данный оператор имеет обратный, ограниченный как оператор из $L_2(0,1)$ в $W_2^2(0,1).$ Аналогичное очевидно верно и для оператора $S_\varepsilon^D - \varepsilon^2\lambda$: для достаточно малых ε обратный оператор $(S_\varepsilon^D - \varepsilon^2\lambda)^{-1}$ корректно определен, ограничен как оператор из $L_2(0,1)$ в $W_2^2(0,1)$ и более того, голоморфен по ε. Выполнено:

$$(S_\varepsilon^D - \varepsilon\lambda)^{-1} = (S_0^D)^{-1} + O(\varepsilon), \quad \left(\left(S_0^D\right)^{-1} g\right)(\xi) = -\int_0^1 \frac{|\xi - t| - 2 + \xi + t}{2} g(t)dt, \; g \in L_2(0,1)$$

Введенный оператор и равенство (3.2.1) позволяет определить функцию u_ε на дугах e_ε:

$$y_\varepsilon(x_\varepsilon) = \varepsilon^2 v_\varepsilon\left(\frac{x_\varepsilon}{\varepsilon}\right) + \varepsilon(C_\varepsilon + y_0'(0))\frac{U_D\left(\frac{x_\varepsilon}{\varepsilon}, \varepsilon, \varepsilon^2\lambda\right)}{U_D'\left(0, \varepsilon, \varepsilon^2\lambda\right)},$$

$$v_\varepsilon := (S_\varepsilon^D - \varepsilon^2\lambda)^{-1} f_\varepsilon(\varepsilon\,\cdot). \qquad (3.2.4)$$

Из второго условия в (3.1.1) с учетом определения функции Ψ теперь получаем:

$$C_\varepsilon\left(\frac{U_-(0,\lambda)}{U_-^{'}(0,\lambda)}+\frac{U_+(0,\lambda)}{U_+^{'}(0,\lambda)}-\alpha+\varepsilon\frac{U_D(0,\varepsilon,\varepsilon^2\lambda)}{U_D^{'}(0,\varepsilon,\varepsilon^2\lambda)}\right)+\varepsilon y_0^{'}(0)\frac{U_D(0,\varepsilon,\varepsilon^2\lambda)}{U_D^{'}(0,\varepsilon,\varepsilon^2\lambda)}+\varepsilon^2 v_\varepsilon(0)=0 \tag{3.2.5}$$

Согласно (3.2.3),

$$\frac{U_D(0,\varepsilon,\varepsilon^2\lambda)}{U_D^{'}(0,\varepsilon,\varepsilon^2\lambda)}=-1+O(\varepsilon). \tag{3.2.6}$$

Кроме того,

$$\frac{U_-(0,\lambda)}{U_-^{'}(0,\lambda)}+\frac{U_+(0,\lambda)}{U_+^{'}(0,\lambda)}-\alpha\neq 0,\quad \alpha\in R, \tag{3.2.7}$$

и функция Ψ оказывается собственной функцией оператора H_0^α, соответствующей комплексному собственному значению λ. Также верна оценка

$$|v_\varepsilon(0)|+\|v_\varepsilon\|_{L_2(0,1)}\le c\,\|f_\varepsilon(\varepsilon\cdot)\|=c\varepsilon^{-\frac{1}{2}}\|f_\varepsilon\|_{L_2(\gamma_\varepsilon)}, \tag{3.2.8}$$

где c – некоторая константа, не зависящая от f_ε и ε.

Соотношения (3.2.5), (3.2.6), (3.2.7), (3.2.8) позволяют определить константу C_ε по формуле

$$C_\varepsilon = -\frac{\varepsilon y_0^{'}(0)\dfrac{U_D(0,\varepsilon,\varepsilon^2\lambda)}{U_D^{'}(0,\varepsilon,\varepsilon^2\lambda)} + \varepsilon^2 v_\varepsilon(0)}{\dfrac{U_-(0,\lambda)}{U_-^{'}(0,\lambda)} + \dfrac{U_+(0,\lambda)}{U_+^{'}(0,\lambda)} - \alpha + \varepsilon\dfrac{U_D(0,\varepsilon,\varepsilon^2\lambda)}{U_D^{'}(0,\varepsilon,\varepsilon^2\lambda)}},$$

причем верны оценки

$$|C_\varepsilon| \le c\varepsilon(|y_0^{'}(0) + \varepsilon|v_\varepsilon(0)|) \le c\left(\varepsilon \| f_0 \|_{L_2(\mathfrak{I}_0)} + \varepsilon^{\frac{3}{2}} \| f_\varepsilon \|_{L_2(e_\varepsilon)}\right),$$

где константа c не зависит от f_0, f_ε и ε, и

$$\left| C_\varepsilon - \varepsilon\frac{y_0^{'}}{\dfrac{U_-(0,\lambda)}{U_-^{'}(0,\lambda)} + \dfrac{U_+(0,\lambda)}{U_+^{'}(0,\lambda)} - \alpha}\right| \le c\left(\varepsilon^2 \| f_0 \|_{L_2(\mathfrak{I}_0)} + \varepsilon^{\frac{3}{2}} \| f_0 \|_{L_2(e_\varepsilon)}\right).$$

Оценки (3.1.7), (3.1.8) теперь следуют из последнего неравенства, (3.2.9), (3.2.4), (3.2.1).

3.3 Асимтотика резольвенты оператора H_ε^R

Данный параграф посвящен доказательству теорем 3.1.2, 3.1.3. Как и в предыдущем параграфе, для заданной $f \in L_2(\mathfrak{I}_\varepsilon)$, через f_0 и f_ε обозначаем сужение этой функции на $\mathfrak{I}_0$ и e_ε и пусть $y_\varepsilon := (\mathrm{H}_\varepsilon^R - \lambda)^{-1} f$. Положим $y_0 := (\mathrm{H}_\varepsilon^\beta - \lambda)^{-1} f_0$ в случае $\theta_0 \neq 0$ и $y_0 := \left(\mathrm{H}_0^N - \lambda\right)^{-1} f_0$ в случае $\theta_0 = 0$.

Для функции u_ε вновь верно представление (3.2.1). Аналог вспомогательной задачи (3.2.2) здесь выглядит следующим образом:

$$-U_R^{''}+\left(\varepsilon W_{-1}(\xi)+\varepsilon^2 W_0(\xi)-\mu\right)U_R=0,\ \xi\in(0,1),\ U_R\,|_{\xi=1}=1,\ U_R^{'}\,|_{\xi=1}=0,$$

где $\mu-$малый комплексный параметр. Данная задача также однозначно разрешима и ее решение $U_R=U_R(\xi,\varepsilon,\mu)$ голоморфно по ε и μ в норме $W_2^2(0,1)$. Легко убедиться, что первые члены разложения функции U_R имеют вид:

$$U_R(\xi,\varepsilon,\mu)=1+\varepsilon\phi_1(\xi)+\varepsilon^2\phi_2(\xi)+\varepsilon^3\phi_3(\xi)-\mu\frac{(\xi-1)^2}{2}+\varepsilon\mu\phi_{1,1}(\xi)+O(\varepsilon^4+\varepsilon^2\,|\,\mu\,|+|\,\mu\,|^2), \tag{3.3.1}$$

$$\phi_1(\xi):=\int_\xi^1(t-\xi)W_{-1}(t)dt,$$

$$\phi_2(\xi):=\int_\xi^1(t-\xi)(W_0(t)+W_{-1}(t)\phi_1(t))dt,$$

$$\phi_3(\xi):=\int_\xi^1(t-\xi)(W_0(t)\phi_1(t)+W_{-1}(t)\phi_2(t))dt,$$

$$\phi_{1,1}(\xi):=-\frac{1}{2}\int_\xi^1(t-\xi)(t-1)^2W_{-1}(t)dt.$$

Отметим еще очевидные равенства

$$\phi_1^{'}(0)=-\theta,\phi_1(0)=\theta_1,\phi_{1,1}^{'}(0)=\int_0^1\frac{(t-1)^2}{2}W_{-1}(t)dt, \tag{3.3.2}$$

а также

$$\phi_2(0)=\int_0^1 tW_0(t)dt+\int_0^t t\phi_1(t)W_{-1}(t)dt,$$

$$\int_0^t t\phi_1(t)W_{-1}(t)dt=\int_0^1 t\phi_1(t)\phi_1''(t)dt=-\int_0^1(\phi_1(t)+t\phi_1(t))\phi_1'(t)dt=$$

$$=\frac{\phi_1^2(0)}{2}-\int_0^1 t\left(\phi_1'(t)\right)^2dt=\frac{1}{2}\left(\int_0^1 tW_{-1}(t)dt\right)^2-\int_0^1 t\left(\int_t^1 W_{-1}(\xi)d\xi\right)^2dt. \qquad (3.3.3)$$

Аналогично проверяем, что

$$\phi_2'(0)=-\int_0^1 W_0(t)dt-\theta_0\int_0^1 tW_{-1}(t)dt+\int_0^1\left(\int_t^1 W_{-1}d\xi\right)^2dt,$$

$$\phi_3'(0)=\int_0^1\left(\left(\int_t^1 W_{-1}(s)ds\right)^2-W_0(t)\right)\left(\theta_0 t-\theta_1-2\int_t^1(\xi-t)W_{-1}(\xi)d\xi\right)dt-\frac{\theta_0\theta_1^2}{2},$$

Поэтому

$$\theta_3=\frac{\phi_3'(0)+\phi_{1,1}'(0)}{\theta_0}+\phi_2(0)-\frac{1}{2},\ \theta_4=\phi_2'(0)+1.$$

Через S_ε^R обозначим оператор Шредингера

$$-\frac{d^2}{d\xi^2}+\varepsilon W_{-1}(\xi)+\varepsilon^2 W_0(\xi)$$

в пространстве $L_2(0,1)$ с краевым условием Дирихле в точке $\xi = 0$ и условием Неймана в точке $\xi = 1$. Как в предыдущем параграфе, оператор S_0^R имеет обратный, ограниченный как оператор из $L_2(0,1)$ в $W_2^2(0,1)$. Аналогично верно и для оператора $S_\varepsilon^R - \varepsilon^2\lambda$: для достаточно малых ε, обратный оператор $\left(S_\varepsilon^R - \varepsilon^2\lambda\right)^{-1}$ корректно определен, ограничен как оператор из $L_2(0,1)$ в $W_2^2(0,1)$ и голоморфен по ε. Верно равенство:

$$\left(S_\varepsilon^R - \varepsilon^2\lambda\right)^{-1} = \left(S_0^R\right)^{-1} + O(\varepsilon),\ \left(\left(S_0^R\right)^{-1} g\right)(\xi) = -\int_0^1 \frac{|\xi - t| - \xi - t}{2} g(t)\,dt \qquad (3.3.4)$$

для произвольной $g \in L_2(0,1)$.

В терминах оператора S_ε^R и функции U_R найдем функцию u_ε на дуге e_ε:

$$y_\varepsilon = \varepsilon^2 v_\varepsilon\left(\frac{x_\varepsilon}{\varepsilon}\right) + \left(C_\varepsilon + y_0'(0) - \varepsilon v_\varepsilon'(0)\right)\frac{\varepsilon U_R\left(\frac{x_\varepsilon}{\varepsilon}, \varepsilon, \varepsilon^2\lambda\right)}{U_R'\left(0, \varepsilon, \varepsilon^2\lambda\right)},\ v_\varepsilon := \left(S_\varepsilon^R - \varepsilon^2\lambda\right)^{-1} f_\varepsilon(\varepsilon\cdot). \qquad (3.3.5)$$

В силу для функции v_ε имеем:

$$v_\varepsilon'(0) = \int_0^1 f_\varepsilon(\varepsilon t)dt = \varepsilon^{-1}\int_{e_\varepsilon} f_\varepsilon(x_\varepsilon)dx_\varepsilon,\ \left\|v_\varepsilon\left(\frac{\cdot}{\varepsilon}\right)\right\|_{L_2(e_\varepsilon)} \le c\left\|f_\varepsilon\right\|_{L_2(e_\varepsilon)},$$

$$\left|\int_{e_\varepsilon} f_\varepsilon(x_\varepsilon)dx_\varepsilon\right| \le \varepsilon^{\frac{1}{2}}\left\|f_\varepsilon\right\|_{L_2(e_\varepsilon)},$$

где константа c не зависит от ε и f_ε. Отметим еще, что $U_R^{'}(0,\varepsilon,\varepsilon^2\lambda)$ не обращается в нуль при достаточно малых $\varepsilon \neq 0$. Действительно, в силу (3.3.1) выполнено:

$$U_R^{'}(0,\varepsilon,\varepsilon^2\lambda) = \varepsilon\phi_1^{'}(0) + \varepsilon^2(\phi_2^{'}(0) + \lambda) + O(\varepsilon^3), \tag{3.3.7}$$

и так как функции ϕ_1, ϕ_2 вещественные, а λ комплексное по предположению, то второй член в данном разложении не обращается в нуль.

Постановка (3.3.5) во второе условие в (3.1.1) дает следующее уравнение для C_ε:

$$C_\varepsilon\left(\frac{U_-(0,\lambda)}{U_-^{'}(0,\lambda)} + \frac{U_+(0,\lambda)}{U_+^{'}(0,\lambda)} - \alpha + \varepsilon\frac{U_R(0,\varepsilon,\varepsilon^2\lambda)}{U_-^{'}(0,\varepsilon,\varepsilon^2\lambda)}\right) =$$
$$= \varepsilon^2 v_\varepsilon^{'}(0)\frac{U_R(0,\varepsilon,\varepsilon^2\lambda)}{U_-^{'}(0,\varepsilon,\varepsilon^2\lambda)} - y_0^{'}(0)\left(\varepsilon\frac{U_R(0,\varepsilon,\varepsilon^2\lambda)}{U_-^{'}(0,\varepsilon,\varepsilon^2\lambda)} - \alpha\right) - y_+(0) - y_-(0).$$

Предположим теперь, что $\theta_0 \neq 0$. Тогда в силу краевого условия (3.1.5) для функций $y_\pm(0)$ правая часть (3.3.8) за исключением первого слагаемого переписываются к виду

$$-y_0^{'}(0)\left(\varepsilon\frac{U_R(0,\varepsilon,\varepsilon^2\lambda)}{U_R^{'}(0,\varepsilon,\varepsilon^2\lambda)} - \alpha\right) - y_+(0) - y_-(0) = -y_0^{'}(0)\left(\varepsilon\frac{U_R(0,\varepsilon,\varepsilon^2\lambda)}{U_R^{'}(0,\varepsilon,\varepsilon^2\lambda)} + \frac{1}{\theta_0}\right).$$

С учетом соотношений (3.3.2), определения β и асимптотики (3.3.1) получаем асимптотические равенства

$$\varepsilon\frac{U_R(0,\varepsilon,\varepsilon^2\lambda)}{U_R^{'}(0,\varepsilon,\varepsilon^2\lambda)} + \frac{1}{\theta_0} = -\frac{\varepsilon}{\theta_0}\left(\theta_1 + \frac{\theta_4 + \lambda}{\theta_0}\right) + O(\varepsilon^2),$$

$$\frac{U_-(0,\lambda)}{U_-^{'}(0,\lambda)}+\frac{U_+(0,\lambda)}{U_+^{'}(0,\lambda)}-\alpha+\varepsilon\frac{U_R(0,\varepsilon,\varepsilon^2\lambda)}{U_-^{'}(0,\varepsilon,\varepsilon^2\lambda)}=\frac{U_-(0,\lambda)}{U_-^{'}(0,\lambda)}+\frac{U_+(0,\lambda)}{U_+^{'}(0,\lambda)}-\beta+O(\varepsilon).$$

Выражая теперь константу C_ε из (3.3.8), немедленно заключаем, что

$$C_\varepsilon=\frac{\varepsilon^2 v_\varepsilon^{'}(0)\dfrac{U_R(0,\varepsilon,\varepsilon^2\lambda)}{U_R^{'}(0,\varepsilon,\varepsilon^2\lambda)}-y_0^{'}(0)\left(\varepsilon\dfrac{U_R(0,\varepsilon,\varepsilon^2\lambda)}{U_R^{'}(0,\varepsilon,\varepsilon^2\lambda)}+\theta_0^{-1}\right)}{\dfrac{U_-(0,\lambda)}{U_-^{'}(0,\lambda)}+\dfrac{U_+(0,\lambda)}{U_+^{'}(0,\lambda)}-\alpha+\varepsilon\dfrac{U_R(0,\varepsilon,\varepsilon^2\lambda)}{U_R^{'}(0,\varepsilon,\varepsilon^2\lambda)}}$$

и в силу (3.2.7), (3.3.2), (3.3.3), (3.3.6), (3.3.7), (3.3.9) выполнено:

$$\left|C_\varepsilon\right|\le c\left(\varepsilon^{\frac{1}{2}}\left\|f_\varepsilon\right\|_{L_2(e_\varepsilon)}+\varepsilon\left\|f_0\right\|_{L_2(\Im_0)}\right),$$

$$\left|C_\varepsilon-\varepsilon l^R(f_\varepsilon)\right|\le c\left(\varepsilon^{\frac{3}{2}}\left\|f_\varepsilon\right\|_{L_2(e_\varepsilon)}+\varepsilon^2\left\|f_0\right\|_{L_2(\Im_0)}\right),$$

Отсюда и из (3.2.1), (3.3.5), (3.3.6) вытекает утверждение теоремы 3.1.2.

Пусть теперь $\theta_0=0$. Тогда $y_0^{'}(0)=0$ и согласно (3.3.1), (3.3.2), (3.3.3), (3.3.7) выполнено:

$$Q(\lambda,\varepsilon):=\frac{U_R^{'}(0,\varepsilon,\varepsilon^2\lambda)}{\varepsilon^2 U_R(0,\varepsilon,\varepsilon^2\lambda)}=\phi_2^{'}(0)+\lambda+O(\varepsilon), \tag{3.3.10}$$

и мы можем решить уравнение (3.3.8) относительно C_ε:

$$C_\varepsilon = \frac{\varepsilon^2 v_\varepsilon^{'}(0)\dfrac{U_R(0,\varepsilon,\varepsilon^2\lambda)}{U_R^{'}(0,\varepsilon,\varepsilon^2\lambda)} - y_+(0) - y_-(0)}{\dfrac{U_-(0,\lambda)}{U_-^{'}(0,\lambda)} + \dfrac{U_+(0,\lambda)}{U_+^{'}(0,\lambda)} - \alpha + \varepsilon\dfrac{U_R(0,\varepsilon,\varepsilon^2\lambda)}{U_R^{'}(0,\varepsilon,\varepsilon^2\lambda)}} =$$

$$= \frac{\varepsilon v_\varepsilon^{'}(0) - \varepsilon Q(\lambda,\varepsilon)\big(y_-(0) + y_+(0)\big)}{1 + \varepsilon Q\big(\lambda,\varepsilon\big)\left(\dfrac{U_-(0,\lambda)}{U_-^{'}(0,\lambda)} + \dfrac{U_+(0,\lambda)}{U_+^{'}(0,\lambda)} - \alpha\right)}.$$

В силу (3.3.6), (3.3.7), (3.3.10) теперь получаем:

$$\left|C_\varepsilon - \varepsilon v_\varepsilon^{'}(0)\right| \le c\left(\varepsilon^{\frac{3}{2}}\left\|f_\varepsilon\right\|_{L_2(e_\varepsilon)} + \varepsilon\left\|f_0\right\|_{L_1(\Im_0)}\right),$$

$$\left|C_\varepsilon - l^N(f)\right| \le c\left(\varepsilon^{\frac{3}{2}}\left\|f_\varepsilon\right\|_{L_2(e_\varepsilon)} + \varepsilon^2\left\|f_0\right\|_{L_1(\Im_0)}\right),$$

где константа c не зависит от ε и f. В силу (3.2.1), (3.3.5), (3.3.6) приходим к утверждению теоремы 3.1.3.

3.4 Собственные значения оператора H_ε^D

В настоящем параграфе представлено доказательство теоремы 3.1.4. Для упрощения ряда технических вычислений, далее замену спектрального параметра $\lambda = \cos^2 k$, где k – новый параметр, который предполагается малым и комплексным.

Функции $U_\pm$ здесь принимают вид:

$$U_\pm\big(x_\pm\big) := \begin{cases} e^{-(x_\pm - a_\pm)\sin k}\cos k, \ x_\pm > a_\pm, \\ \cos\big(\big(x_\pm - a_\pm\big)\cos k + k\big), \ x_\pm < a_\pm, \end{cases} \qquad (3.4.1)$$

Причем теперь ветвь корня в их определении определяем по правилу $\sqrt{1-\lambda} = \sin\aleph$.

Собственные функции оператора H_ε^D, соответствующие собственным значениям $\lambda = \cos^2 k$ с некоторым малым k, строим в виде:

$$\psi(x) = \begin{cases} C_- U_-(x_-) \ \text{ на } e_-, \\ C_+ U_+(x_+) \ \text{ на } e_+, \\ \varepsilon C_\varepsilon U_D\left(\dfrac{x_\varepsilon}{\varepsilon}, \varepsilon, \varepsilon^2 \cos^2 k\right) \ \text{ на } e_\varepsilon, \end{cases} \tag{3.4.2}$$

где $C_\pm, C_\varepsilon$ – некоторые константы, подлежащие определению. Такая функция удовлетворяет требуемому уравнению на собственные значения на каждой дуге. Также для нее выполнено краевое условие Дирихле (3.1.2). На бесконечности вдоль дуг $e_\pm$ она экспоненциально убывает, если $\mathrm{Re}\sin k > 0$, и экспоненциально растет, если выполнено обратное неравенство $\mathrm{Re}\sin k < 0$. Поэтому данная функция будет собственной, а соответствующее число $\lambda = \cos^2 k$ – собственным значением, если для ψ будет выполнено условие (2.1) с некоторым k, удовлетворяющим неравенству $\mathrm{Re}\sin k > 0$. Если же окажется, что $\mathrm{Re}\sin k \le 0$, то функция ψ, определенная равенством (3.4.2), не попадает в область определения оператора $D\left(\mathrm{H}_\varepsilon^D\right)$ и потому данный оператор в этом случае не имеет собственного значения, сходящегося к краю существенного спектра.

Подстановка функции (3.4.2) в краевое условие (3.1.1) приводит к системе линейных уравнений относительно неизвестных констант C_-, C_+, C_ε:

$$\begin{aligned} & C_- U_-'(0) = C_+ U_+'(0), \\ & C_+ U_+'(0) = C_\varepsilon U_D'(0, \varepsilon, \varepsilon^2 \cos^2 k), \\ & C_- U_-(0) + C_+ U_+(0) + C_\varepsilon \varepsilon U_D(0, \varepsilon, \varepsilon^2 \cos^2 k) = \alpha C_- U_-'(0). \end{aligned}$$

Согласно теорема Крамера, данная система линейных уравнений имеет нетривиальное решение, если ее определитель равен нулю:

$$\det\begin{pmatrix} U_-'(0) & -U_+' & 0 \\ 0 & U_+' & -U_D'(0,\varepsilon,\varepsilon^2\cos^2 k) \\ U_-(0)-\alpha U_-'(0) & U_+(0) & \varepsilon U_D(0,\varepsilon,\varepsilon^2\cos^2 k) \end{pmatrix}=0.$$

Подставим сюда явные выражения для функций $U_\pm$ и вычислим данный определитель. Тогда получим следующее уравнение:

$$F_D(k,\varepsilon):=F_1(k)U_D'\left(0,\varepsilon,\varepsilon^2\cos^2 k\right)+\varepsilon F_0(k)U_D\left(0,\varepsilon,\varepsilon^2\cos^2 k\right)=0,$$
$$F_0(k):=\sin\left(a_-\cos k-k\right)\sin\left(a_+\cos k-k\right)\cos k,$$
$$F_1(k):=\sin\left(\left(a_-+a_+\right)\cos k-2k\right)-\alpha F_0(k).$$

Исследуем теперь разрешимость полученного уравнения. В силу (3.2.3), при $k=0,\varepsilon=0$ уравнение (3.4.3) превращается в $F_1(0)=0$, что приводит к равенству (3.1.10). Если $a_\pm$ не удовлетворяют данному равенству, то уравнение (3.4.3) не выполнено при $k=0,\ \varepsilon=0$ и потому оно не имеет решений, сходящихся к нулю при $\varepsilon\to+0$.

Пусть теперь $a_\pm$ удовлетворяют равенству (3.1.10). Тогда уравнение (3.4.3) выполнено при $k=0,\ \varepsilon=0$ и кроме того, в силу (3.2.3), (3.1.10) выполнено:

$$\frac{\partial F_D}{\partial k}(0,0)=F_1'(0)=-2\cos\left(a_-+a_+\right)+\alpha\sin a_+\cos a_-+\alpha\sin a_-\cos a_+= \qquad (3.4.4)$$
$$=\alpha\sin\left(a_-+a_+\right)-2\cos\left(a_-+a_+\right).$$

Покажем, что правая данного равенства не равна нулю. Действительно, предположим обратное. Обозначим $a := a_- + a_+$, тогда имеем

$$\alpha \sin a = 2 \cos a. \tag{3.4.5}$$

Это позволяет переписать левую часть уравнения (3.1.10) в виде

$$\begin{aligned} &\sin\left(a_- + a_+\right) - \alpha \sin a_- \sin a_+ = \sin a - \alpha \sin a_+ \sin\left(a - a_+\right) = \\ &= \sin a + \left(\alpha \sin^2 a_+ - \sin 2a_+\right)\cos a. \end{aligned} \tag{3.4.6}$$

Если $\alpha = 0$, то в силу (3.4.5) получаем $\cos a = 0, \sin a \neq 0$ и правая часть (3.4.6) превращается в $\cos a \neq 0$. Если $\alpha \neq 0$, то $\cos a \neq 0$, так как иначе в силу (3.4.5) одновременно получаем $\sin a = 0$. Теперь выразим $\sin a$ из (3.4.5) и подставим в (3.4.6):

$$\sin\left(a_- + a_+\right) - \alpha \sin a_- \sin a_+ = \left(\frac{2}{a} + \frac{a}{2} - \frac{a}{2}\cos 2a_+ - \sin 2a_+\right)\cos a,$$

$$\frac{2}{a} + \frac{a}{2} - \frac{a}{2}\cos 2a_+ - \sin 2a_+ \geq \frac{2}{a} + \frac{a}{2} - \sqrt{1 + \frac{a^2}{4}} > 0.$$

Таким образом, правая часть (3.4.4) не обращается в нуль и $\frac{\partial F_D}{\partial k}(0,0) \neq 0$. Применяя теперь о неявной функции, заключаем, что существует единственное решение $K(\varepsilon)$ уравнения (3.4.3), голоморфное по ε и сходящееся к нулю при $\varepsilon \to +0$. Следовательно, данное решение разлагается в ряд Тейлора, сходящийся при достаточно малых ε.

Вычислим первые члены ряда Тейлора для $K(\varepsilon)$. Для этого подставим разложение

$$K(\varepsilon) = K_1\varepsilon + K_2\varepsilon^2 + O(\varepsilon^3) \tag{3.4.7}$$

в уравнение (3.4.3), учтем соотношение (3.2.3), и разложим затем полученное равенство в асимптотический ряд по ε с точностью до $O(\varepsilon^3)$. Затем в полученном соотношении приравняем к нулю коэффициенты при ε и ε^2 и решим полученные уравнения относительно A_1 и A_2. Тогда немедленно получаем, что $K_1 = A_1$, а константа K_2 определяется формулой

$$\begin{aligned} K_2 := {} & \frac{3+\alpha}{2}A_1^3 - \frac{\sin a_- \sin a_+}{\sin(a_- + a_+) - 2\cos(a_- + a_+)}\left(\alpha\phi_1'(0) + \phi_1(0)\right) + \\ & + \left(\frac{(a_- + a_+)\cos(a_- + a_+) - a_+\cos a_+ \sin a_- - a_-\cos a_- \sin a_+}{2\sin(a_- + a_+) - 4\cos(a_- + a_+)} - \frac{1+\alpha}{2} \right) A_1^2 + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} = {} & \frac{3+\alpha}{2}A_1^3 - \frac{\sin a_- \sin a_+}{\sin(a_- + a_+) - 2\cos(a_- + a_+)} \int_0^1 (t-\alpha)(t-1)W_{-1}(t)\,dt + \\ & + \frac{1}{4}\left(\frac{(a_+ - a_-)\sin(a_+ - a_-)}{\sin(a_- + a_+) - 2\cos(a_- + a_+)} - (a_+ + a_- + 2 + 2\alpha) \right) A_1^2. \end{aligned}$$

(3.4.8)

Затем мы также воспользовались равенством

$$\alpha\varphi_1'(0) + \varphi_1(0) = \int_0^1 (t-\alpha)(t-1)W_{-1}(t)\,dt,$$

вытекающим из определения ϕ_1 в (3.2.3). Из (3.4.7) следует, что

$$\sin K(\varepsilon) = \varepsilon A_1 + O(\varepsilon^2). \tag{3.4.9}$$

Тогда условие $\operatorname{Re}\sin K(\varepsilon) > 0$ будет выполнено, если $A_1 > 0$. В этом случае H_ε^D имеет единственное простое собственное значение $\lambda_\varepsilon = \cos^2 K(\varepsilon)$, голоморфное по ε. Как легко убедиться, первые члены его ряда Тейлора определяются формулой (3.1.11). И наоборот, условие $\operatorname{Re}\sin K(\varepsilon) < 0$, гарантирующее отсутствие таких собственных значений, выполнено, если $A_1 < 0$.

Рассмотрим теперь случай $A_1 = 0$. Согласно определению (3.4.8) константы A_1 и уравнению (3.1.10), в этом случае необходимо имеем $a_- = \pi n, a_+ = \pi m$ для некоторых $n, m \in Z_+$. Несложно проверить, что тогда верны равенства $F_0(0) = F_1(0) = 0$ и потому $k = 0$ – корень уравнения (3.4.3) для всех значений $\varepsilon = 0$. В силу единственности корня заключаем, что $K(\varepsilon) \equiv 0$ и в этом случае оператор H_ε^D не имеет изолированных собственных значений, сходящихся к краю существенного спектра при $\varepsilon \to +0$. Теорема 3.1.4 полностью доказана.

3.5 Собственные значения оператора H_ε^R

Данный параграф посвящен доказательству теорем 3.1.5, 3.1.6. Схема доказательства в целом такая же, как и в доказательстве теоремы 3.1.4.

Собственные значения оператора H_ε^R вновь ищем в виде $\lambda = \cos^2 k, k$ – новый параметр, который предполагается малым и комплексным. Собственные функции строим в виде

$$\psi(x) = \begin{cases} C_- U_-(x_-) \ \text{ на } e_-, \\ C_+ U_+(x_+) \ \text{ на } e_+, \\ C_\varepsilon U_R\left(\dfrac{x_\varepsilon}{\varepsilon}, \varepsilon, \varepsilon^2 \cos^2 k\right) \ \text{ на } e_\varepsilon, \end{cases}$$

где $U_{\pm}$ задаются формулами (3.4.1), а $C_{\pm}, C_{\varepsilon}$ – некоторые константы, подлежащие определению. Такая функция вновь удовлетворяет требуемому уравнению и краевому условию в вершине M_{ε}, так что остается лишь проверить условие в вершине M_0:

$$
\begin{aligned}
&C_{-}U_{-}^{'}(0) = C_{+}U_{+}^{'}(0)\\
&C_{+}U_{+}^{'}(0) = \varepsilon^{-1}C_{\varepsilon}U_{R}^{'}(0,\varepsilon,\varepsilon^{2}\cos^{2}k),\\
&C_{-}U_{-}(0) + C_{+}U_{+}(0) + C_{\varepsilon}U_{R}(0,\varepsilon,\varepsilon^{2}\cos^{2}k) = \alpha C_{-}U_{-}^{'}(0).
\end{aligned}
$$

Применение теоремы Крамера вновь приводит к уравнению для параметра k, определяющему собственные значения оператора $\mathrm{H}_{\varepsilon}^{R}$:

$$F_R(k,\varepsilon) := F_1(k)\varepsilon^{-1}U_R^{'}\left(0,\varepsilon,\varepsilon^2\cos^2 k\right) + F_0(k)U_R\left(0,\varepsilon,\varepsilon^2\cos^2 k\right) = 0. \qquad (3.5.1)$$

В силу (3.3.1), (3.3.2), (3.3.7) при $\varepsilon = 0, k = 0$ получаем

$$F_R(0,0) := \theta_0 \sin\left(a_{-} + a_{+}\right) + F_0(k)U_R\left(0,\varepsilon,\varepsilon^2\cos^2 k\right) = 0. \qquad (3.5.2)$$

Тогда в случае выполнения неравенств (3.1.12) при $\theta_0 \neq 0$ и неравенства (3.1.17) при $\theta_0 = 0$, уравнение (3.5.1) не имеет корней сходящихся к нулю при $\varepsilon \to +0$, что означает отсутствие оператора у оператора $\mathrm{H}_{\varepsilon}^{R}$ собственных значений, сходящихся к краю существенного спектра при $\varepsilon \to +0$.

Предположим теперь, что выполнено равенство (3.1.13) при $\theta_0 \neq 0$ или равенство (3.1.18) при $\theta_0 \neq 0$. Вычислим производную по k функции F_R:

$$\frac{\partial F_R}{\partial k}(0,0) := -\theta_0 F_1^{'}(0) + F_0^{'}(0) = 2\theta_0 \cos\left(a_{-} + a_{+}\right) - \left(1 + \alpha\theta_0\right)\sin\left(a_{-} + a_{+}\right) \qquad (3.5.3)$$

данная формула верна как при $\theta_0 \neq 0$, так и при $\theta_0 = 0$.

Рассмотрим случай $\theta_0 \neq 0$. Покажем, что в этом случае права часть в (3.5.3) не обращается в нуль при $\theta_0 \neq 0$. Предположим обратное, тогда

$$\cos a = \frac{1+\alpha\theta_0}{2\theta_0}\sin a = \frac{\beta}{2}\sin a,\ \sin a \neq 0,\ a = a_- + a_+.$$

Это позволяет переписать правую часть (3.5.2) в виде

$$F_R(0,0) := \theta_0\left(\sin a - \beta \sin a_+ \sin(a - a_+)\right) = \theta_0 \sin a\left(1 + \frac{\beta^2}{4} - \frac{\beta}{2}\sin 2a_+ - \frac{\beta^2}{4}\cos 2a_+\right).$$

И так как

$$1 + \frac{\beta^2}{4} - \frac{\beta}{2}\sin 2a_+ - \frac{\beta^2}{4}\cos 2a_+ \geq 1 + \frac{\beta^2}{4} - \sqrt{\frac{\beta^2}{4} + \frac{\beta^2}{16}} > 0,$$

то получаем, что $F_R(0,0) \neq 0$ и это противоречит уравнению (3.1.13). Следовательно, производная в (3.5.3) не равна нулю и по теореме о неявной функции уравнение (3.5.1) имеет ровно один корень $K(\varepsilon)$, сходящийся к нулю при $\varepsilon \to +0$ и голоморфный по ε. Для этого корня вновь верно разложение (3.4.7) с некоторыми коэффициентами K_1, K_2. Для определения этих коэффициентов подставим разложение (3.4.7) и (3.3.1) в уравнение (3.5.2), разложим полученное равенство в ряд Тейлор и приравняем нулю коэффициенты при ε и ε^2. Полученные уравнения решим относительно K_1, K_2. Тогда получим, что $K_1 = B_1$ и

$$K_2 = \left(\frac{\left(\beta^2+3\right)\sin\left(a_- + a_+\right) - \frac{\beta}{2}\left(a_- + a_+\right)\sin\left(a_- + a_+\right)}{2\beta\sin\left(a_- + a_+\right) - 4\cos\left(a_- + a_+\right)} - \frac{6\beta + a_- + a_+}{4} \right) K_1^2 + \tag{3.5.4}$$

$$+ \frac{\theta_4}{\theta_0} K_1 + \frac{\theta_3 \sin a_- \sin a_+}{\theta_0\left(\beta\sin\left(a_- + a_+\right) - 2\cos\left(a_- + a_+\right)\right)}.$$

Как в доказательстве теоремы (3.1.4), условием существования собственного значения $\lambda_\varepsilon = \cos^2 K\left(\varepsilon\right)$ является неравенство $\sin K\left(\varepsilon\right) > 0$, а условием отсутствия – неравенства $\sin K\left(\varepsilon\right) \le 0$. В силу (3.4.9) вновь заключаем, что при $K_1 > 0$ оператор H_ε^R имеет единственное собственное значение, данное собственное значение голоморфно по ε и справедливо разложение (3.1.15). Если $K_1 < 0$, оператор H_ε^R не имеет собственных значений, сходящихся к краю существенного спектра.

Отдельно рассмотрим случай $K_1 = 0$. Согласно формуле (3.1.14), это невозможно, если $\sin a_- = 0$ или $\sin a_+ = 0$ или $\theta_1 + \theta_0^{-1}\theta_4 = 0$. Во первых двух случаях из одновременного выполнения равенства (3.1.13) сразу вытекает, что $a_+ = \pi n,\ a_- = \pi m$ для некоторых $m, n \in Z_+$. С учетом определения функций F_0, F_1 несложно проверить, что тогда $k = 0$ – корень уравнения (3.5.1) для всех ε и потому в этом случае оператор H_ε^R не имеет собственных значений в окрестности края существенного спектра.

Пусть теперь $\sin a_\pm \ne 0,\ \theta_1 + \theta_0^{-1}\theta_4 = 0$. Тогда из (3.4.7), (3.5.4) следует, что

$$K\left(\varepsilon\right) = B_2^0\varepsilon^2 + O\left(\varepsilon^3\right),\ \sin K\left(\varepsilon\right) = B_2^0\varepsilon^2 + O\left(\varepsilon^3\right).$$

Следовательно, $\sin K\left(\varepsilon\right) > 0$ при $B_2^0 > 0$ и $\sin K\left(\varepsilon\right) < 0$ при $B_2^0 < 0$. Таким образом, при $B_2^0 < 0$ оператор H_ε^R не имеет изолированных собственных значений в окрестности края существенного спектра, а при $B_2^0 > 0$ имеет ровно одно собственное значение, сходящееся к краю существенного спектра при $\varepsilon \to +0$. Это собственное значение простое, голоморфно по ε и справедливо разложение

$$\lambda_\varepsilon = \cos^2 K_\varepsilon = 1 - \frac{\varepsilon^4 \left(B_2^0\right)^2}{2} + O\left(\varepsilon^5\right).$$

Теорема 3.1.5 полностью доказана.

Завершим теперь доказательство теоремы 3.1.6. Далее считаем, что $\theta_0 = 0$ и выполнено равенство (3.1.18). Предположим вначале, что $\sin\left(a_- + a_+\right) \neq 0$. Тогда из (3.5.3) вытекает, что $\frac{\partial F_R}{\partial k}\left(0,0\right) \neq 0$ и уравнение (3.5.1) вновь имеет ровно один корень $K\left(\varepsilon\right)$, голоморфный по ε. Первые члены ряда Тейлора в формуле (3.4.7) находятся совершенно аналогично вычислениям, пройденным выше. Имеем: $K_1 = \theta_4$,

$$K_2 = \left(\frac{a_+ \cos a_+ \sin a_- + a_- \cos a_- \sin a_+}{2} + 1 - \theta_1 - 3tg\left(a_- + a_+\right) \right) \theta_4^2 + \theta_5,$$

$$\theta_5 = \phi_3^{'}(0) + \phi_{1,1}^{'}(0) \text{ при } \theta_0 = 0.$$

Как и выше, при $\theta_4 < 0$ оператор H_ε^R не имеет собственных значений, сходящихся к краю существенного спектра. При $\theta_4 > 0$ оператор H_ε^R имеет единственное собственное значение, сходящееся к краю существенного спектра, данное значение простое и верно (3.1.21). Если $\theta_4 = 0$, то $K_2 = \theta_5$. Тогда при $\theta_5 < 0$ оператор H_ε^R не имеет собственных значений, сходящихся к краю существенного спектра при $\varepsilon \to +0$, а при $\theta_5 > 0$ оператор H_ε^R имеет единственное собственное значение, сходящееся к краю существенного спектра при $\varepsilon \to +0$. Данное собственное значение простое, голоморфно по ε и первые члены ряда Тейлора даются формулой (3.1.22)

Предположим теперь, что $\sin\left(a_- + a_+\right) = 0$. Тогда с учетом равенства (3.1.18) сразу получаем, что $a_+ = \pi n, a_- = \pi m$ для некоторых $n, m \in Z_+$. В этом случае в силу (3.5.3) имеем $\frac{\partial F_R}{\partial k}\left(0,0\right) = 0$ и мы не можем воспользоваться теоремой о неявной функции. Вместе с тем, несложно проверить, что в этом случае верны представления

$$F_0(k) = k^2 G_0(k),\ F_1(k) = k^2 G_1(k),$$

где $G_0(k), G_1(k) -$ голоморфные по k функции, причем

$$G_0(0) = (-1)^{n+m},\ \ G_1(0) = 2(-1)^{n+m+1},\ \ G_1'(0) = (-1)^{n+m+1}\left(\frac{\pi(n+m)}{2} + \alpha\right). \qquad (3.5.5)$$

Тогда ясно, что уравнение (3.5.1) имеет корень $k = 0$, а также корни уравнения

$$G_R(k,\varepsilon) := G_1(k)\varepsilon^{-1}U_R'\left(0,\varepsilon,\varepsilon^2\cos^2 k\right) + kG_0(k)U_R\left(0,\varepsilon,\varepsilon^2\cos^2 k\right) = 0. \qquad (3.5.6)$$

Корень $k = 0$ не порождает собственных значений. Исследуем разрешимость уравнения (3.5.6).

В силу (3.5.5), (3.1.1) и продолжений $\theta_0 = 0$ немедленно заключаем, что

$$G_R(0,0) = 0,\ \frac{\partial G_R}{\partial k}(0,0) = G_0(0) \neq 0.$$

Следовательно, уравнение (3.5.6) имеет единственный корень $K(\varepsilon)$, сходящийся к нулю при $\varepsilon \to +0$. Данный корень голоморфен по ε и первые члены его разложения в ряд Тейлора считаются аналогично, тому как это делалось выше. А именно, для этого корня верна формула (3.4.7), где $K_1 = 2\theta_4$,

$$K_2 = \frac{2\alpha - \pi(n+m)}{4}\theta_4^2 - \theta_1\theta_4 + 2\theta_5.$$

Таким образом, оператор H_ε^R не имеет собственных значений в окрестности края существенного спектра, если выполнено условие (3.1.19). Если же выполнено условие (3.1.20), то оператор H_ε^R имеет единственное собственное

значение, сходящееся к краю существенного спектра при $\varepsilon \to +0$. Данное собственное значение простое, голоморфно по ε. Первые члены его ряда Тейлора даются формулой (3.1.21) при $\theta_4 > 0$ и формулой (3.1.22) при $\theta_4,\ \theta_5 > 0.$

3.6 Асимптотика резольвент и голоморфная зависимость спектра

Пусть $\Im_\varepsilon$ – ориентированный граф, состоящий из трех дуг конечной длины, одной внутренней вершины, соединяющей эти дуги и трех граничных вершин. Две дуги выберем фиксированной длины, а третью дугу будем считать малым, см. рис. 3.6.2. Дуги графа обозначим через e_-, e_+, e_ε с длинами соответственно a_-, a_+ и ε, где ε – малый положительный параметр. На дугах зададим соответственно переменные $x_\pm \in [0,\ a_\pm]$ и $x_\varepsilon \in [0,\ \varepsilon]$. Внутреннюю вершину обозначим через M_0 и считаем, что она соответствует значениям $x_\pm = 0,\ x_\varepsilon = 0$. Граничные вершины соответствуют значениям $x_\pm = a_\pm,\ x_\varepsilon = \varepsilon$ и обозначаются через $M_\pm$ и M_ε.

В пространстве $L_2(\Im_\varepsilon) := L_2(e_-) \oplus L_2(e_+) \oplus L_2(e_\varepsilon)$ определим оператор Шредингера:

$$-\frac{d^2}{dx^2} + V_\varepsilon(x) + \alpha\delta(x), \tag{3.6.1}$$

где производные берутся по переменным на дугах, а потенциал V_ε задается равенством

$$V_\varepsilon(x) := \begin{cases} W_-(x_-) & \text{на} \quad e_-, \\ \varepsilon^{-1} W_{-1}\left(\dfrac{x_\varepsilon}{\varepsilon}\right) + W_0\left(\dfrac{x_\varepsilon}{\varepsilon}\right) & \text{на } e_\varepsilon. \\ W_+(x_+) & \text{на} \quad e_+, \end{cases}$$

Здесь $W_\pm$ – вещественные ограниченные измеримые функции на $e_\pm$, W_{-1}, W_0 – вещественные ограниченные измеримые функции на [0,1]. Последнее слагаемое в (3.1.1) описывает δ – взаимодействие с константой связи $\alpha \in R$ и оно соответствует следующему граничному условию во внутренней вершине:

$$y_-(0) = y_+(0) = y_\varepsilon(0) =: y(M_0),$$
$$y_-'(0) + y_+'(0) + y_\varepsilon'(0) = \alpha y(M_0), \qquad (3.6.2)$$

где $y = (y_, y_+, y_\varepsilon)$ – функция, заданная на графе $\Im_\varepsilon$. На граничных вершинах $M_\pm$ выставляется краевое условие Дирихле:

$$y_\pm(M_\pm) = 0, \qquad (3.6.3)$$

а на вершине M_ε – краевое условие Дирихле

$$y_\varepsilon(\varepsilon) = 0, \qquad (3.6.4)$$

или краевое условие Неймана

$$y_\varepsilon'(\varepsilon) = 0, \qquad (3.6.5)$$

Описанный оператор обозначаем через H_ε^D в случае краевого условия (3.1.4) и через H_ε^R в случае краевого условия (3.1.5). В качестве областей определения операторов H_ε^D и H_ε^R берутся следующие плотные подмножества в $L_2(\Im_\varepsilon)$:

$D(H_\varepsilon^D) := \{y = (y_+, y_, y_\varepsilon) \in L_2(\Im_\varepsilon)$: $y_\pm \in W_2^2(e_\pm)$, $y_\varepsilon \in W_2^2(e_\varepsilon)$, выполнены условия (3.1.2), (3.1.3), (3.1.4)$\}$ (3.1.6)

$D(H_\varepsilon^R) := \{y = (y_+, y_, y_\varepsilon) \in L_2(\Im_\varepsilon)$: $y_\pm \in W_2^2(e_\pm)$, $y_\varepsilon \in W_2^2(e_\varepsilon)$, выполнены условия (3.1.2), (3.1.3), (3.1.5)$\}$ (3.6.7)

Операторы H_ε^D и H_ε^R самосопряжены.

Основная цель – исследовать поведение резольвент и спектров операторов H_ε^D и H_ε^R при малых ε.

Для формулировки основных результатов нам понадобятся вспомогательные обозначения. Через $\Im_0$ обозначим граф, полученный из $\Im_\varepsilon$ удалением дуги a_ε и вершины M_ε, то есть, граф $\Im_0$ состоит из двух дуг e_- и e_+, соединенных e_ε вершиной M_0 и двух граничных вершин $M_\pm$, см.рис.3.6.2.

В пространстве $L_2(\Im_0) := L_2(e_-) \oplus L_2(e_+)$ рассмотрим оператор с дифференциальным выражением

$$-\frac{d^2}{dx^2} + V_0,\ V_0 := W_\pm \text{ на } e_\pm, \tag{3.6.8}$$

с краевым условием Дирихле в граничных вершинах $M_\pm$:

$$y_\pm(M_\pm) = 0. \tag{3.6.9}$$

В вершине M_0 ставится либо условие Дирихле

$$y_\pm(0) = 0. \tag{3.6.10}$$

либо задается дельта – взаимодействие

$$\begin{aligned} &y_(0) = y_+(0) =: y(0), \\ &y_+'(0) + y_-'(0) = (\alpha + \beta) y(0), \\ &\beta := \int_0^1 W_{-1}(t)dt. \end{aligned} \tag{3.6.11}$$

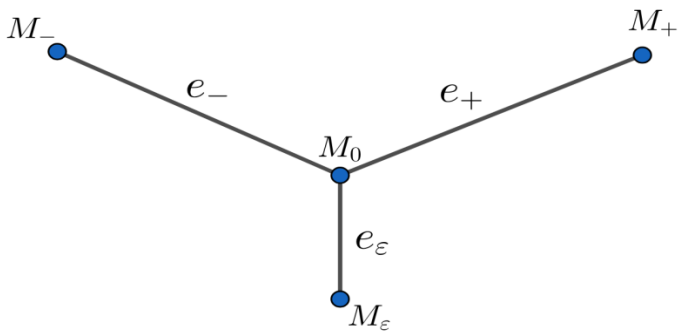


Рисунок 3.6.1 Граф $\Im_\varepsilon$ с малой дугой: длины дуг $e_\pm$ равны фиксированным числам $a_\pm$, длина дуги e_ε равна ε и является малым параметром

В случае условия (3.1.10) оператор обозначаем H_0^D, в случае условия (3.1.11) – через H_0^R. В качестве областей определения этих операторов берутся следующие плотные подмножества в $L_2(\Im_0)$:

$$D(H_0^D) := \{y = (y_, y_+) \in L_2(\Im_0) : y_\pm \in W_2^2(e_\pm),$$
выполнены условия (3.1.9), (3.1.10)$\}$

$$D(H_0^R) := \{y = (y_, y_+) \in L_2(\Im_0) : y_\pm \in W_2^2(e_\pm),$$
выполнены условия (3.1.9), (3.1.11)$\}$.

Операторы H_0^D и H_0^R самосопряжены.

Через $Y_\pm = Y_\pm(x,\lambda)$ обозначим решения задач Коши:

$$\begin{aligned} &-Y_\pm'' + (V_\pm - \lambda)Y_\pm = 0 \ \text{ в } \ (0, a), \\ &Y_\pm(a_\pm, \lambda) = 0, \ \ Y_\pm'(a, \lambda) = 1. \end{aligned} \tag{3.6.12}$$

Такие задачи однозначно разрешимы и решения голоморфны по $\lambda \in C$ в норме $W_2^2(0, a_\pm)$. Для $\operatorname{Im}\lambda \neq 0$ обозначим

$$\Psi(x) := \begin{cases} \dfrac{U_-(x_-,\lambda)}{U_-(0,\lambda)} \text{ на } e_-, \\ \dfrac{U_+(x_+,\lambda)}{U_+(0,\lambda)} \text{ на } e_+. \end{cases}$$

Данная функция определена корректно и $U_\pm(0,\lambda) \neq 0$ при $\operatorname{Im}\lambda \neq 0,$ так как иначе операторы Шредингера $-\dfrac{d^2}{dx^2} + W_\pm$ на дугах $e_\pm$ с краевыми условиями Дирихле имели бы комплексные собственные значения.

Первый результат описывает равномерную резольвентную сходимость операторов H_ε^D и H_ε^R к операторам H_0^D и H_0^R. Теорема о сходимости оператора H_ε^D выглядит следующим образом.

Теорема 3.6.1 При $\operatorname{Im}\neq 0$ для всех $f \in L_2(\Im_\varepsilon)$ верны оценки:

$$\left\| (H_\varepsilon^D - \lambda)^{-1} f - (H_0^D - \lambda)^{-1} f \Big|_{\Im_0} - l_e^D(f_\varepsilon)\Psi \right\|_{W_2^2(e_-)\oplus W_2^2(e_+)} \le c\varepsilon^{\frac{5}{2}} \| f \|_{L_2(e_\varepsilon)}, \quad (3.6.13)$$

$$\left\| (H_\varepsilon^D - \lambda)^{-1} f \right\|_{L_2(e_\varepsilon)} \le c\varepsilon \| f \|_{L_2(e_\varepsilon)}, \quad (3.6.14)$$

где c – некоторая константа, не зависящая от f и ε, и

$$l_\varepsilon^D(f_\varepsilon) := \int_0^\varepsilon x_\varepsilon f_\varepsilon(x_\varepsilon) dx_\varepsilon, \quad \left| l_\varepsilon^D(f_\varepsilon) \right| \le \frac{\varepsilon^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{3}} \| f_\varepsilon \|_{L_2(e_\varepsilon)}. \quad (3.6.15)$$

Результаты о сходимости резольвенты оператора H_ε^R приводятся в следующей теореме.

Теорема 3.6.2 При $\operatorname{Im}\lambda \neq 0$ для всех $f \in L_2(\Im_\varepsilon)$ верны оценки:

$$\left\|(H_\varepsilon^R-\lambda)^{-1}f-(H_0^R-\lambda)^{-1}f\big|_{\Im_0}-\varepsilon l_e^R(f)\Psi\right\|_{W_2^2(e_-)\oplus W_2^2(e_+)}\le c\varepsilon^{\frac{5}{2}}\|f\|_{L_2(e_\varepsilon)},\quad (3.6.16)$$

$$\left\|(H_\varepsilon^R-\lambda)^{-1}f\right\|_{L_2(e_\varepsilon)}\le c\varepsilon\|f\|_{L_2(e_\varepsilon)},\quad (3.6.17)$$

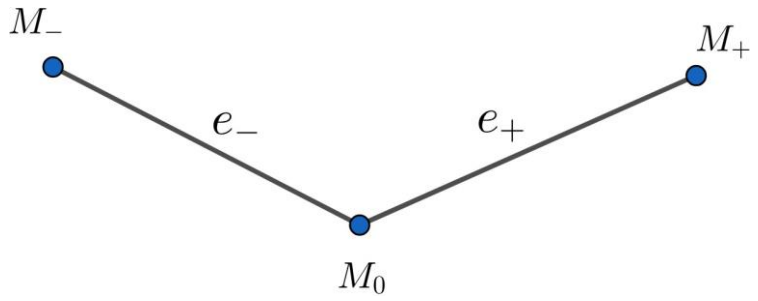


Рис. 3.6.2. Предельный граф $\Im_0$

где c – некоторая константа, не зависящая от f и ε, и

$$l_\varepsilon^R(f):=\frac{Y_-(0,\lambda)Y_+(0,\lambda)}{F(\lambda)-(\alpha+\beta)Y_-(0,\lambda)Y_+(0,\lambda)}\int_0^\varepsilon f(x_\varepsilon)dx_\varepsilon,\quad \left|l_\varepsilon^R(f)\right|\le c\varepsilon^{\frac{1}{2}}\|f\|_{L_2(e_\varepsilon)}.$$

Выражение $F(\lambda)-(\alpha+\beta)Y_-(0,\lambda)Y_+(0,\lambda)$ не обращается в нуль при $\operatorname{Im}\lambda\ne 0.$

Операторы $H_\varepsilon^D, H_\varepsilon^R, H_0^D,$ и H_0^R имеют компактную резольвенту и их спектры чисто дискретные. Через $\lambda_n^D(\varepsilon)$ и $\lambda_n^R(\varepsilon)$ обозначим собственные значения операторов H_ε^D и $H_\varepsilon^R,$ упорядоченные в порядке возрастания с учетом кратности. Второй результат описывает поведение этих собственных значений при $\varepsilon\to+0.$ Прежде, чем его сформулировать, надо описать спектр H_0^D и $H_0^R.$

Собственные значения оператора H_0^D совпадают с корнями уравнения

$$Y_-(0,\lambda)Y_+(0,\lambda)=0.\quad (3.6.17)$$

Эти корни обозначим через Λ_n^D, $n \in N$, и упорядочим по возрастанию с учетом кратности как собственных значений. Если некоторое $\Lambda_n^D = \Lambda_{n+1}^D$ согласно выбранному упорядочиванию.

Теорема 3.6.3. При достаточно малых ε собственные значения $\lambda_n^D(\varepsilon)$ голоморфны по ε и $\lambda_n^D(0) = \Lambda_n^D$. Если Λ_n^D – простое собственное значение, то собственное значение $\lambda_n^D(\varepsilon)$ также простое и

$$\frac{d\lambda_n^D}{d\varepsilon}(0) = -\frac{(Y_{\pm}^{'}(0,\Lambda_n^D))^2}{\left\|Y_{\pm}(\cdot,\Lambda_n^D)\right\|^2_{L_2(e_{\pm})}} \quad \text{при } Y_{\pm}(0,\Lambda_n^D) = 0,\ Y_{\mp}(0,\Lambda_n^D) = 0. \quad (3.1.19)$$

Если $\Lambda_n^D = L_{n+1}^D$ – двукратное собственное значение, то оператор H_ε^D имеет два собственных значения $\lambda_n^D(\varepsilon)$ и $\lambda_{n+1}^D(\varepsilon)$, сходящихся к Λ_n^D при $\varepsilon \to +0$.
Собственное значение $\lambda_n^D(\varepsilon)$ голоморфно по ε и верно равенство

$$\frac{d\lambda_n^D}{d\varepsilon}(0) = -\frac{(Y_{-}^{'}(0,\Lambda_n^D))^2}{\left\|Y_{-}(\cdot,\Lambda_n^-)\right\|^2_{L_2(e_-)}} - \frac{(Y_{+}^{'}(0,\Lambda_n^D))^2}{\left\|Y_{+}(\cdot,\Lambda_n^+)\right\|^2_{L_2(e_+)}}. \quad (3.6.18)$$

Собственное значение $\lambda_{n+1}^D(\varepsilon)$ не зависит от ε и совпадает с Λ_n^D.

Обозначим:

$$F(\lambda) := Y_{+}^{'}(0,\lambda)Y_{-}(0,\lambda) + Y_{-}^{'}(0,\lambda)Y_{+}(0,\lambda).$$

Собственные значения оператора H_0^R совпадают с корнями уравнениями

$$F(\lambda) - (\alpha+\beta)Y_{-}(0,\lambda)Y_{+}(0,\lambda) = 0. \quad (3.6.21)$$

Теорема 3.6.4 Все собственные значения Λ_n^R простые. Для каждого Λ_n^R числа $Y_-(0,\Lambda_n^R)$ и $Y_+(0,\Lambda_n^R)$ обращаются или не обращаются в нуль одновременно.

При достаточно малых ε собственные значения $\lambda_n^R(\varepsilon)$ голоморфны по ε и выполнены равенства $\lambda_n^R(0)=\Lambda_n^R.$ Если $Y_\pm(0,\Lambda_n^R)=0,$ то $\lambda_n^R(\varepsilon)$ не зависит от ε и совпадает с Λ_n^R. Если $Y_\pm(0,\Lambda_n^R)\neq 0,$ то верны равенства:

$$\frac{d\lambda_n^R}{d\varepsilon}(0)=\frac{Y_-(0,\Lambda_n^R)Y_+(0,\Lambda_n^R)\left(\int_0^1 W_0(t)dt-\int_0^1\left(\int_t^1 W_{-1}(s)ds\right)^2 dt+\Lambda_n^R\right)}{\left(Y_+(0,\Lambda_n^R)\right)^2\left\|Y_-(\cdot,\Lambda_n^-)\right\|^2_{L_2(e_-)}+\left(Y_-(0,\Lambda_n^R)\right)^2\left\|Y_+(\cdot,\Lambda_n^+)\right\|^2_{L_2(e_+)}}. \qquad (3.6.22)$$

Согласно теоремам 3.1.1, 3.1.2, при уменьшении длины дуги e_ε, резольвенты операторов H_ε^D и H_ε^R сходятся к резольвентам операторов H_0^D и H_0^R. Сходимость для оператора H_ε^D означает, что если на внешней вершине малой дуги ставится краевое условие Дирихле, то в пределе при $\varepsilon\to+0$ это краевое условие заменяет условие Кирхгофа во внутренней вершине M_0. Теорема 3.1.1 дает информацию о сходимости резольвенты. А именно, оценка (3.1.13) дана в более сильной норме ограниченных операторов из $L_2(\Im_\varepsilon)$ в $W_2^2(e_-)\oplus W_2^2(e_+)$. Кроме того, о оценке приведен также первый член разложения резольвенты, которым является слагаемое $l_\varepsilon^D(f_\varepsilon)\Psi$. Оно мало по норме в силу (3.1.15). Оценка (3.1.14) означает, что резольвента возмущенного оператора, суженная на малую дугу e_ε, мала в норме $L_2(e_\varepsilon)$. Обратим еще внимание на правые части оценок (3.1.13) и (3.1.14). В них фигурирует только норма правой части по малой дуге. Это означает, что если сужение правой части на малую дугу равно нулю, то действия резольвент операторов H_ε^D и H_0^D на такие функции f совпадают на $\Im_0$ и действие резольвенты оператора H_ε^D малой дуге равно нулю. Другими словами, разность резольвент фактически зависит лишь от правой части на малой дуге.

Аналогичная ситуация имеет место для операторов H_ε^R и H_0^R. Несмотря на то, что теперь на внешней вершине дуги e_ε ставится краевое условие Неймана, предельное краевое условие в вершине M_0 содержит дополнительный коэффициент β, см.(3.1.11). Данный коэффициент обусловлен наличие потенциала W_{-1} на дуге e_ε у возмущенного оператора.

Такой эффект согласуется с известными результатами об аппроксимации дельта – взаимодействий у одномерных операторов потенциалами вида $\varepsilon^{-1}V\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)$ для финитных функций V с ненулевым средним, см., например, [48].

Наличие равномерной резольвентной сходимости для операторов с сингулярными возмущениями – достаточно ожидаемый факт, если сравнить задачи на графах с задачами в многомерных областях. В качестве соответствующего примера упомянем задачи в областях с малыми отверстиями – классическую модель сингулярной теории возмущений. Наличие равномерной резольвентной сходимости для таких задач было показано в работах [49],[50]. С этой точки зрения сингулярно возмущенные операторы проявляют свойства, аналогичные регулярно возмущенным. Вместе с тем, в случае регулярных возмущений, резольвенты и собственные значения возмущенных операторов голоморфно зависят от параметра, описывающего возмущение. При этом данное утверждение, как правило, неверно для сингулярно возмущенных операторов. Например, в классической задаче в области с малыми отверстиями для собственных значений и резольвент можно строить полные асимптотические разложения по малому параметру [51],[52], но никаких утверждений о сходимости данных рядов и, тем более, о совпадении сумм рядов с возмущенными резольвентами и собственными значениями не доказано.

Ввиду сказанного выше, результаты теорем 3.1.3, 3.1.4 выглядит весьма неожиданным и интересным. Основное ключевое утверждение этих теорем – это голоморфная зависимость собственных значений от малого параметра. Другими словами, асимптотические ряды для собственных значений рассматриваемых операторов сходятся и суммы их совпадают с возмущенными собственными значениями. Дополнительно обнаруживается еще один эффект – неподвижные собственные значения. Для оператора H_ε^D такие собственные значения возникают в окрестности двукратных предельных собственных значений: каждое такое предельное собственное значение расщепляется на два возмущенных, одно из которых не зависит от ε и стоит неподвижно, а второе сдвигается влево. Для оператора H_ε^R схожая картина имеет место, если собственная функция, соответствующая предельному собственному значению, дополнительно обращается в нуль в вершине M_0. При этом предельное собственное значение уже простое, но при возмущении оно остается неподвижным.

Для подвижных собственных значений возмущенных операторов в теоремах в 3.1.3, 3.1.4 вычислены первые поправки в их разложениях, см. формулы (3.1.20), (3.1.22). Как следует из формулы (3.1.20), в случае Дирихле в вершине M_ε первые поправки отрицательны и здесь добавление малой дуги действует на спектр как неположительное возмущение. В случае условия

Неймана в вершине M_ε первая поправка оказывается более сложной и вопрос о ее знаке априорно легко не решается.

3.7 Доказательство теоремы 3.6.1

Для заданной $f \in L_2(\Im_\varepsilon)$ через f_0 обозначим сужение f на граф $\Im_0$, а через f_ε – сужение f на дуге e_ε. Положим: $y_\varepsilon := (H_\varepsilon^D - \lambda)^{-1} f$, $y_0 := (H_0^D - \lambda)^{-1} f_0$. С учетом краевого условия (3.1.2) и определения функций $Y_\pm$ ясно, что

$$y_\varepsilon = y_0 + C_\varepsilon \Psi \quad \text{на } \Im_0, \tag{3.7.1}$$

где C_ε – некоторая константа, которая будет определена позднее.

Для определения функции y_ε на дуге e_ε рассмотрим вспомогательную задачу Коши как было показано в параграфе 3.2.

С учетом первого из краевых условий в (3.6.2) и формулы (3.2.1) теперь легко видеть, что функция y_ε на дуге e_ε имеет вид:

$$y_\varepsilon(x_\varepsilon) = \varepsilon^2 v_\varepsilon\left(\frac{x_\varepsilon}{\varepsilon}\right) + C_\varepsilon \frac{U_D\left(\frac{x_\varepsilon}{\varepsilon}, \varepsilon, \varepsilon^2\lambda\right)}{U_D\left(0, \varepsilon, \varepsilon^2\lambda\right)},\ v_\varepsilon := (S_\varepsilon^D - \varepsilon^2\lambda)^{-1} f_\varepsilon(\varepsilon). \tag{3.7.2}$$

Константу C_ε определим из второго условия в (3.1.2) и равенств (3.2.1), (3.2.6):

$$C_\varepsilon\left(\frac{Y_-'(0,\lambda)}{Y_-(0,\lambda)} + \frac{Y_+'(0,\lambda)}{Y_+(0,\lambda)} - \alpha + \varepsilon^{-1}\frac{Y_D'(0,\varepsilon,\varepsilon^2\lambda)}{Y_D(0,\varepsilon,\varepsilon^2\lambda)}\right) + \varepsilon v_\varepsilon'(0) = 0. \tag{3.7.3}$$

Согласно равенствам (3.2.3), при малых ε выполнено соотношение

$$\frac{Y_D^{'}(0,\varepsilon,\varepsilon^2\lambda)}{Y_D(0,\varepsilon,\varepsilon^2\lambda)} = 1 + O(\varepsilon) \neq 0, \tag{3.7.4}$$

и потому из уравнения (3.2.3) мы можем определить константу C_ε следующим образом:

$$C_\varepsilon := -\frac{\varepsilon^2 v_\varepsilon^{'}(0)}{\frac{Y_D^{'}(0,\varepsilon,\varepsilon^2\lambda)}{Y_D(0,\varepsilon,\varepsilon^2\lambda)} + \varepsilon\left(\frac{Y_-^{'}(0,\lambda)}{Y_-(0,\lambda)} + \frac{Y_+^{'}(0,\lambda)}{Y_+(0,\lambda)} - \alpha\right)}. \tag{3.7.5}$$

Из соотношений (3.2.5) вытекает, что

$$\left| v_\varepsilon^{'}(0) - \varepsilon^{-1}\int_0^\varepsilon \left(1 - \frac{x_\varepsilon}{\varepsilon}\right) f_\varepsilon(x_\varepsilon)dx_\varepsilon \right| \leq c\varepsilon \left\| f_\varepsilon(\varepsilon)\right\|_{L_2(0,1)} = c\varepsilon^{\frac{1}{2}} \left\| f_\varepsilon \right\|_{L_2(e_\varepsilon)}. \tag{3.7.6}$$

Здесь и всюду далее символом c обозначаем различные несущественные константы, не зависящие от ε и f. Отметим еще, что в силу неравенства Коши – Буняковского верна оценка:

$$\left| \varepsilon^2 \int_0^\varepsilon f(x_\varepsilon)dx_\varepsilon \right| \leq \varepsilon^{\frac{5}{2}} \left\| f_\varepsilon \right\|_{L_2(\Im_\varepsilon)}, \quad \left| \int_0^\varepsilon x_\varepsilon f(x_\varepsilon)dx_\varepsilon \right| \leq \frac{\varepsilon^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{3}} \left\| f_\varepsilon \right\|_{L_2(\Im_\varepsilon).} \tag{3.7.7}$$

Подставляя полученную оценку (3.7.4), (3.7.6) в (3.7.5)

$$\left| C_\varepsilon - \int_0^\varepsilon x_\varepsilon f(x_\varepsilon)dx_e \right| \leq c\varepsilon^{\frac{5}{2}} \left\| f_\varepsilon \right\|_{L_2(e_\varepsilon)}. \tag{3.7.8}$$

Отсюда и из формулы (3.2.1) вытекает уже неравенство (3.6.13).

Докажем оценку (3.6.14). Вначале заметим, что из (3.7.8) и второго неравенства в (3.7.7) сразу следует

$$\left|C_\varepsilon\right| \le c\varepsilon^{\frac{3}{2}} \left\| f_\varepsilon \right\|_{L_2(e_\varepsilon)}. \tag{3.7.9}$$

Норму функции v_ε можно оценить исходя из перечисленных выше свойства оператора $(S_\varepsilon^D - \varepsilon^2\lambda)^{-1}$:

$$\left\| v_\varepsilon\left(\frac{\cdot}{\varepsilon}\right)\right\|_{L_2(e_\varepsilon)} = \varepsilon^{-\frac{1}{2}} \left\| v_\varepsilon \right\|_{L_2(0,1)} \le c\varepsilon^{-\frac{1}{2}} \left\| f_\varepsilon(\varepsilon\cdot)\right\|_{L_2(0,1)} = c\varepsilon^{-1} \left\| f_\varepsilon \right\|_{L_2(e_\varepsilon)}.$$

Отсюда уже получаем:

$$\left\| \varepsilon^2 v_\varepsilon\left(\frac{\cdot}{\varepsilon}\right)\right\|_{L_2(e_\varepsilon)} \le c\varepsilon \left\| f_\varepsilon \right\|_{L_2(e_\varepsilon)}. \tag{3.7.10}$$

Учитывая теперь очевидные соотношения

$$\left\| U_D\left(\frac{\cdot}{\varepsilon}, \varepsilon, \varepsilon^2\lambda\right)\right\|_{L_2(e_\varepsilon)} = \varepsilon^{\frac{1}{2}} \left\| U_D(\cdot, \varepsilon, \varepsilon^2\lambda)\right\|_{L_2(0,1)} \le c\varepsilon^{\frac{1}{2}}, \tag{3.7.11}$$

из (3.7.9) и (3.7.2) выводим оценку (3.6.14). Теорема доказана.

3.8 Доказательство теоремы 3.6.2

Как и в предыдущем параграфе, через f_0 обозначим сужение f на граф $\Im_0$, а через f_ε – сужение f на дуге e_ε и положим $y_\varepsilon := (H_\varepsilon^R - \lambda)^{-1} f$, $y_0 := \left(H_0^D - \lambda\right)^{-1} f_\varepsilon$. Для последних функций вновь верно равенство (3.7.1) с некоторой константой C_ε. Здесь рассматривается задача Коши как было показано в параграфе 3.2.

Отметим еще, что число β удовлетворяет равенству:

$$\beta = -\phi_1'(0). \tag{3.8.1}$$

Вместо оператора S_ε^D следует взять оператор Шредингера в $L_2(0,1)$ как было введено в параграфе 3.2.

Аналог равенства (3.7.6) здесь выглядит следующим образом:

$$y_\varepsilon(x) = \varepsilon^2 v_\varepsilon\left(\frac{x_\varepsilon}{\varepsilon}\right) + C_\varepsilon \frac{Y_R\left(\frac{x_\varepsilon}{\varepsilon}, \varepsilon, \varepsilon^2\lambda\right)}{Y_R\left(0, \varepsilon, \varepsilon^2\lambda\right)}, \quad v_\varepsilon := \left(S_\varepsilon^R - \varepsilon^2\lambda\right)^{-1} f_\varepsilon(\varepsilon\cdot), \tag{3.8.2}$$

что гарантирует выполнение первого условия в (3.6.2). Подстановка (3.7.1), (3.7.5) во второе условие дает уравнение для C_ε:

$$C_\varepsilon\left(\frac{Y_-'(0,\lambda)}{Y_-(0,\lambda)} + \frac{Y_+'(0,\lambda)}{Y_+(0,\lambda)} - \alpha + \varepsilon^{-1}\frac{Y_R'(0,\varepsilon,\varepsilon^2\lambda)}{Y_R(0,\varepsilon,\varepsilon^2\lambda)}\right) + \varepsilon v_\varepsilon'(0) = 0. \tag{3.8.3}$$

Согласно (3.2.2), (3.2.3), при малых ε справедливы равенства:

$$\varepsilon^{-1}\frac{Y_R'(0,\varepsilon,\varepsilon^2\lambda)}{Y_R(0,\varepsilon,\varepsilon^2\lambda)} = -\beta + O(\varepsilon). \tag{3.8.4}$$

Отметим еще, что

$$\frac{Y_-'(0,\lambda)}{Y_-(0,\lambda)}+\frac{Y_+'(0,\lambda)}{Y_+(0,\lambda)}-\alpha-\beta=\frac{F(\lambda)-(\alpha+\beta)Y_-(0,\lambda)Y_+(0,\lambda)}{Y_-(0,\lambda)Y_+(0,\lambda)}\neq 0, \tag{3.8.5}$$

так как иначе $\lambda-$это комплексное собственное значение оператора H_0^R с соответствующей собственное функцией, равной $\frac{Y_\pm(x_\pm,\lambda)}{Y_\pm(0,\lambda)}$ на $e_\pm$. Константа C_ε теперь находится по формуле

$$C_\varepsilon=-\frac{\varepsilon v_\varepsilon'(0)}{\frac{Y_-'(0,\lambda)}{Y_-(0,\lambda)}+\frac{Y_+'(0,\lambda)}{Y_+(0,\lambda)}-\alpha-\beta+\left(\varepsilon^{-1}\frac{Y_R'(0,\varepsilon,\varepsilon^2\lambda)}{Y_R(0,\varepsilon,\varepsilon^2\lambda)}+\beta\right)}, \tag{3.8.6}$$

причем второе слагаемое в знаменателе порядка $O(\varepsilon)$ в силу (3.8.4).

Выясним теперь поведение знаменателя в (3.8.6). Используя (3.3.4), непосредственными вычислениями проверяем, что

$$\left|v_\varepsilon'(0)-\int_0^1 f_\varepsilon(\varepsilon t)dt\right|\le c\varepsilon\|f_\varepsilon(\varepsilon\cdot)\|_{L_2(0,1)}=c\varepsilon^{\frac{1}{2}}\|f_\varepsilon\|_{L_2(e_\varepsilon)},\quad \int_0^1 f_\varepsilon(\varepsilon t)dt=\varepsilon^{-1}\int_0^\varepsilon f_\varepsilon(x_\varepsilon)dx_\varepsilon.$$

Подставляя полученные соотношения в (3.8.6) и учитывая (3.8.4), (3.8.5), получаем:

$$\left|C_\varepsilon+\frac{Y_-(0,\lambda)Y_+(0,\lambda)}{F(\lambda)-(\alpha+\beta)Y_-(0,\lambda)Y_+(0,\lambda)}\right|\le c\varepsilon^{\frac{5}{2}}\|f_\varepsilon\|_{L_2(e_\varepsilon)}. \tag{3.8.7}$$

Отсюда и из (3.7.1) уже вытекает оценка (3.6.16).

Из (3.8.7) также следует, что

$$\left|C_\varepsilon\right| \le c\varepsilon^{\frac{3}{2}} \left\| f_\varepsilon \right\|_{L_2(e_\varepsilon)}. \tag{3.8.8}$$

Для первого слагаемого (3.8.2) верна оценка, аналогичная (3.7.10), а для функции Y_R – оценка, аналогичная (3.7.11). Эти оценки и (3.8.8) доказывают (3.6.15).

3.9. Доказательство теоремы 3.6.3

Тот факт, что собственные значения оператора H_0^D определяются уравнением (3.6.18), немедленно следует из граничного условия (3.6.10), записанного для функций $Y_\pm$. Соответствующие собственные функции имеют вид:

$$\Psi_n^D(x) = \begin{cases} Y_-(x_-, \Lambda_n^D) & \text{на } e_-, \\ 0 & \text{на } e_+, \end{cases} \tag{3.9.1}$$

если Λ_n^D – нуль функции $Y_-(0,\lambda)$, и

$$\Psi_n^D(x) = \begin{cases} 0 & \text{на } e_-, \\ Y_+(x_+, \Lambda_n^D) & \text{на } e_+, \end{cases} \tag{3.9.2}$$

если Λ_n^D – нуль функции $Y_-(0,\lambda)$. В случае, если Λ_n^D – общий нуль функций $Y_\pm(0,\lambda)$, то такое собственное значение двукратно и ему соответствует пара собственных функций, определяемых равенствами (3.9.1), (3.9.2).

Далее нам понадобится следующая вспомогательная лемма.

Лемма 3.9.1. Справедливы соотношения:

$$\frac{dY_{\pm}}{d\lambda}\left(0,\Lambda_n^D\right)=-\frac{1}{Y_{\pm}^{'}(0,\Lambda_n^D)}\left\|Y_{\pm}(\cdot,\Lambda_n^D)\right\|^2_{L_2(e_{\pm})}\neq 0,\ \ Y_{\pm}^{'}(0,\Lambda_n^D)\neq 0.$$

Доказательство. Неравенство $Y_{\pm}^{'}(0,\Lambda_n^D)\neq 0$ очевидно, так как иначе оно немедленно приводит к равенству $Y_{\pm}(x,\Lambda_n)=0,$ что неверно.

Дифференцируя задачи (3.6.12) по λ, несложно проверить, что функции

$$v_{\pm}(x_{\pm}):=\frac{dY_{\pm}}{d\lambda}(x_{\pm},\Lambda_n)$$

являются решениями задач Коши

$$-v_{\pm}^{''}+(V_{\pm}-\Lambda_n^D)v_{\pm}=Y_{\pm}(\cdot,\Lambda_n)\quad\text{в}\quad(0,a_{\pm}),\ \ v_{\pm}(a_{\pm})=0,\ \ v_{\pm}^{'}(a_{\pm})=0.$$

Умножая уравнение в данной задаче на $Y_{\pm}(x_{\pm},\Lambda_n)$ и дважды интегрируя по частям по отрезку $\left(0,a_{\pm}\right),$ получаем требуемую формулу.

Найдем теперь спектр оператора H_{ε}^D. Собственные функции оператора H_{ε}^D строим в виде:

$$\Psi_{\varepsilon}^D(x):=\begin{cases}C_{-}Y_{-}\left(x_{-},\lambda\right)\ \ \text{на}\ \ e_{-},\\ C_{+}Y_{+}\left(x_{+},\lambda\right)\ \ \text{на}\ \ e_{+},\\ C_{\varepsilon}\varepsilon Y_D\left(\dfrac{x_{\varepsilon}}{\varepsilon},\varepsilon,\varepsilon^2\lambda\right)\ \ \text{на}\ \ e_{\varepsilon},\end{cases}\qquad(3.9.3)$$

где $C_{\pm}$, C_{ε} – некоторые константы. Ясно, что такая функция удовлетворяет требуемому дифференциальному уравнению и условиям (3.6.3). Поэтому остаётся проверить условие в вершине M_0:

$$\begin{cases} C_{-}Y_{-}(0,\lambda) - C_{+}Y_{+}(0,\lambda) = 0, \\ C_{-}Y_{-}(0,\lambda) - C_{\varepsilon}\varepsilon Y_{D}(0,\varepsilon,\varepsilon^{2}\mu) = 0, \\ C_{-}(Y_{-}^{'}(0,\lambda) + \alpha Y_{-}(0,\lambda)) + C_{+}Y_{+}^{'}(0,\lambda) + C_{+}Y_{+}^{'}(0,\varepsilon,\varepsilon^{2}\lambda) = 0. \end{cases} \tag{3.9.4}$$

Собственные значения оператора H_{ε}^{D} соответствует нетривиальным решениям $(C_{-}, C_{+}, C_{\varepsilon})$ данной системы линейных уравнений. Применение теоремы Крамера дает уравнение для собственных значений:

$$G^{D}(\lambda,\varepsilon) = 0, \tag{3.9.5}$$

где

$$G^{D}(\lambda,\varepsilon) := \varepsilon Y_{D}(0,\varepsilon,\varepsilon^{2})F(\lambda) + \left(Y_{D}^{'}(0,\varepsilon,\varepsilon^{2}\lambda) - \varepsilon\alpha Y_{D}(0,\varepsilon,\varepsilon^{2}\lambda)\right)Y_{-}(0,\lambda)Y_{+}(0,\lambda).$$

Функция G^{D} голоморфна по λ и ε. При $\varepsilon = 0, \Lambda = \Lambda_{n}^{D}$ уравнение (3.9.5) очевидно выполнено. В силу голоморфности функции G^{D} по λ и ε сразу получаем, что корни уравнения (3.9.5) сходятся к Λ_{n}^{D} при $\varepsilon \to +0$.

Чтобы точнее описать поведение корней уравнения (3.9.5) при малых ε, нам понадобится подробнее выяснить структуру функции G^{D} при λ, близких к Λ_{n}^{D}.

Предположим вначале, что Λ_{n}^{D} – простое собственное значение. Для определенности считаем, что выбранное Λ_{n}^{D} есть нуль функции $Y_{-}(0,\lambda)$ и $Y_{+}(0,\lambda) \neq 0$. Тогда прямыми вычислениями с использованием леммы 3.9.1 и равенств (3.7.3) проверяем, что

$$\frac{dG^{D}}{d\lambda}\left(\Lambda_{n}^{D},0\right) = Y_{+}(0,\Lambda_{n}^{D})\frac{dY_{-}}{d\lambda}(0,\Lambda_{n}^{D}) = -\frac{Y_{+}(0,\Lambda_{n}^{D})}{Y_{-}^{'}(0,\Lambda_{n}^{D})}\left\|Y_{-}(\cdot,\Lambda_{n}^{D})\right\|_{L_{2}(e_{-})}^{2} \neq 0. \tag{3.9.6}$$

Следовательно, по теореме о неявной функции, существует единственный корень $\lambda_n(\varepsilon)$ уравнения (3.9.5), сходящийся к Λ_n^D и этот корень голоморфен по ε. И так как в силу равенства (3.7.3) выполнено

$$\frac{dG^D}{d\varepsilon}(\Lambda_n^D,0) = -Y_-'(0,\Lambda_n^D)Y_+(0,\Lambda_n^D),$$

то отсюда, из (3.9.6) и формулы

$$\frac{d\lambda_n^D}{d\varepsilon}(0) = -\frac{\frac{dG^D}{d\varepsilon}(\Lambda_n^D,0)}{\frac{dG^D}{d\lambda}(\Lambda_n^D,0)} \tag{3.9.7}$$

сразу получаем равенство (3.6.19).

Пусть теперь Λ_n^D – двукратное собственное значение, то есть, Λ_n^D – общий нуль функций $Y_-(0,\lambda)$ и $Y_+(0,\lambda)$. Тогда из определения функции F и леммы 3.9.1 следует, что

$$\begin{aligned} &F(\lambda) = \left(\lambda - \Lambda_n^D\right)F_*(\lambda), \\ &Y_+(0,\lambda)Y_-(0,\lambda) = \left(\lambda - \Lambda_n^D\right)^2 Q(\lambda), \end{aligned} \tag{3.9.8}$$

где $F_*(\lambda)$, $Q(\lambda)$ – голоморфные функции и

$$\begin{aligned} &F_*(\Lambda_n^D) = -\frac{Y_+'(0,\Lambda_n^D)}{Y_-'(0,\Lambda_n^D)}\left\|Y_-\left(\cdot,\Lambda_n^D\right)\right\|_{L_2(e_-)}^2 - \frac{Y_-'(0,\Lambda_n^D)}{Y_+'(0,\Lambda_n^D)}\left\|Y_+(\cdot,\Lambda_n^D)\right\|_{L_2(e_+)}^2, \\ &Q(\Lambda_n^D) = \frac{1}{Y_-'(0,\Lambda_n^D)Y_+'(0,\Lambda_n^D)}\left\|Y_-(\cdot,\Lambda_n^D)\right\|_{L_2(e_-)}^2\left\|Y_+(\cdot,\Lambda_n^D)\right\|_{L_2(e_+)}^2 \neq 0. \end{aligned} \tag{3.9.9}$$

Подставляя соотношения (3.9.8), (3.9.9) в уравнение (3.9.5), видим, что оно имеет два корня, сходящихся к Λ_n^D. Первый корень не зависит от ε и совпадает с Λ_n^D. Второй корень определяется уравнением

$$\varepsilon Y_D(0,\varepsilon,\varepsilon^2\lambda)F_*(\lambda)+\left(Y_D^{'}(0,\varepsilon,\varepsilon^2\lambda)-\varepsilon\alpha Y\left(0,\varepsilon,\varepsilon^2\lambda\right)\right)\left(\lambda-\Lambda_n^D\right)Q(\lambda)=0.$$

Применим к этому уравнению теорему о неявной функции так, как это было сделано выше. Это немедленно приводит нас к заключению, что последнее уравнение имеет ровно одно решение, сходящееся к Λ_n^D при $\varepsilon\to+0$, это решение голоморфно по ε и выполнено равенство (3.6.20). Так как левая часть этого равенства отрицательна, то ясно, что при малых положительных ε корень уравнения, удовлетворяющий (3.6.20), меньше Λ_n^D. Теорема полностью доказана.

3.10 Доказательство теоремы 3.6.4

Поясним происхождение уравнения (3.6.21). Собственные функции оператора H_0^R следует искать в виде

$$\Psi^R(x):=\begin{cases}C_-Y_-(x_-,\lambda) & \text{на } e_-,\\ C_+Y_+(x_+,\lambda) & \text{на } e_+,\end{cases} \qquad (3.10.1)$$

где $C_\pm$ – некоторые константы. Условие (3.6.11) приводит к системе линейных уравнений на эти константы и применение теоремы Крамера позволяет определить случаи, когда данная система имеет нетривиальное решение. Равенство нулю соответствующего определителя и дает уравнение (3.6.21).

Каждое собственное значение Λ_n^R простое, так как обратное предположение немедленно приводит к существованию соответствующей собственной функции, задаваемой формулой (3.10.1) с $C_1=0$. Отсюда в силу краевых условий (3.6.11) получаем, что тогда необходимо $C_2=0$, что противоречит определению собственной функции.

Предположим теперь, что $Y_{-}(0,\Lambda_n^R)=0.$ Тогда необходимо $Y_{-}^{'}(0,\Lambda_n^R)\neq 0$ и из уравнения (3.6.21) тогда вытекает $Y_{+}(0,\Lambda_n^R)=0.$ Аналогично проверяется, что из равенства $Y_{+}(0,\Lambda_n^R)=0$ вытекает $Y_{-}(0,\Lambda_n^R)=0.$ Поэтому числа $Y_{-}0(0,\Lambda_n^R)$ и $Y_{+}0(0,\Lambda_n^R)$ обращаются или не обращаются в нуль одновременно.

Далее нам понадобится аналог вспомогательной леммы 3.9.1.

Лемма 3.10.1 Пусть $Y_{\pm}\left(0,\Lambda_n^R\right)=0.$ Тогда

$$\frac{dF}{d\lambda}\left(\Lambda_n^R\right)=-\frac{Y_{+}^{'}\left(0,\Lambda_n^R\right)}{Y_{-}^{'}(0,\Lambda_n^R)}\left\|Y_{-}(\cdot,\Lambda_n^R)\right\|_{L_2(e_{-})}^2-\frac{Y_{-}^{'}\left(0,\Lambda_n^R\right)}{Y_{+}^{'}(0,\Lambda_n^R)}\left\|Y_{+}(\cdot,\Lambda_n^R)\right\|_{L_2(e_{+})}^2\neq 0. \qquad (3.10.2)$$

Пусть $Y_{\pm}(0,\Lambda_n^R)\neq 0.$ Тогда

$$\frac{d(F-(\alpha+\beta)Y_{-}(0,\cdot)Y_{+}(0,\cdot))}{d\lambda}\left(\Lambda_n^R\right)=\frac{Y_{+}(0,\Lambda_n^R)}{Y_{-}(0,\Lambda_n^R)}\left\|Y_{-}(\cdot,\Lambda_n^R)\right\|_{L_2(e_{-})}^2+\frac{Y_{-}(0,\Lambda_n^R)}{Y_{+}(0,\Lambda_n^R)}\left\|Y_{+}(\cdot,\Lambda_n^R)\right\|_{L_2(e_{+})}^2\neq 0 \qquad (3.10.3)$$

Доказательство. Аналогично доказательству леммы 3.10.1 несложно проверить равенства:

$$Y_{\pm}(0,\Lambda_n^R)\frac{dY_{\pm}^{'}}{d\lambda}(0,\Lambda_n^R)-Y_{\pm}^{'}(0,\Lambda_n^R)\frac{dY_{\pm}}{d\lambda}(0,\Lambda_n^R)=\left\|Y_{\pm}(\cdot,\Lambda_n^R)\right\|_{L_2(e_{\pm})}^2>0. \qquad (3.10.4)$$

Предположим теперь, что $Y_{\pm}(0,\Lambda_n^R)=0.$ Тогда из (66) сразу следует, что $Y_{\pm}^{'}(0,\Lambda_n^R)\neq 0.$ Ясно, что

$$\frac{dF}{d\lambda}(\Lambda_n^R)=Y_{+}^{'}(0,\Lambda_n^R)\frac{dY_{-}}{d\lambda}\left(0,\Lambda_n^R\right)+Y_{-}^{'}(0,\Lambda_n^R)\frac{dY_{+}}{d\lambda}(0,\Lambda_n^R).$$

Из полученных равенств вытекает формула (3.10.2) для производной функции $F(\lambda)$. Кроме того, отношения $\frac{Y_+^{'}(0,\Lambda_n^R)}{Y_-^{'}(0,\Lambda_n^R)}$ и $\frac{Y_-^{'}(0,\Lambda_n^R}{Y_+^{'}(0,\Lambda_n^R}$ одного знака и потому производная функции F в точке Λ_n^R не равна нулю.

Рассмотрим теперь случай $Y_{\pm}(0,\Lambda_n^R)\neq 0$. Тогда из уравнения (3.6.21) следует, что

$$Y_{\pm}^{'}(0,\Lambda_n^R)=(\alpha+\beta)Y_{\pm}(0,\Lambda_n^R)-Y_{\mp}^{'}(0,\Lambda_n^R)\frac{Y_{\pm}(0,\Lambda_n^R)}{Y_{\mp}(0,\Lambda_n^R)}.$$

Используя эти равенства, непосредственными вычислениями проверяем, что

$$\frac{d(F-(\alpha+\beta)Y_-(0,\cdot)Y_+(0,\cdot))}{d\lambda}(\Lambda_n^R)=Y_+^{'}(0,\Lambda_n^R)\frac{dY_-}{d\lambda}(0,\Lambda_n^R)+Y_-^{'}(0,\Lambda_n^R)\frac{dY_+}{d\lambda}(0,\Lambda_n^R)+$$

$$+Y_-(0,\Lambda_n^R)\frac{dY_+^{'}}{d\lambda}(0,\Lambda_n^R)+Y_+(0,\Lambda_n^R)\frac{dY_-^{'}}{d\lambda}(0,\Lambda_n^R)-$$

$$-(\alpha+\beta)Y_-(0,\Lambda_n^R)\frac{dY_+}{d\lambda}(0,\Lambda_n^R)-(\alpha+\beta)Y_+(0,\Lambda_n^R)\frac{dY_-}{d\lambda}(0,\Lambda_n^R)=$$

$$=-\frac{Y_+(0,\Lambda_n^R)}{Y_-(0,\Lambda_n^R)}\left(Y_-(0,\Lambda_n^R)\frac{dY_-^{'}}{d\lambda}(0,\Lambda_n^R)+Y_-^{'}(0,\Lambda_n^R)\frac{dY_-}{d\lambda}(0,\Lambda_n^R)\right)+$$

$$+\frac{Y_-(0,\Lambda_n^R)}{Y_+(0,\Lambda_n^R)}\left(Y_+(0,\Lambda_n^R)\frac{dY_+^{'}}{d\lambda}(0,\Lambda_n^R)-Y_+^{'}(0,\Lambda_n^R)\frac{dY_+}{d\lambda}(0,\Lambda_n^R)\right).$$

Отсюда в силу формул (3.10.4) вытекает равенство (3.10.3). Здесь уже отношения $\frac{Y_+(0,\Lambda_n^R)}{Y_-(0,\Lambda_n^R)}$ и $\frac{Y_-(0,\Lambda_n^R)}{Y_+(0,\Lambda_n^R)}$ одного знака и потому правая часть равенств (3.10.3) не обращается в нуль. Лемма доказана.

Найдем спектр оператора H_ε^R. Собственные функции оператора H_ε^R ищем в виде:

$$\Psi_\varepsilon^R(x) := \begin{cases} C_- Y_-(x_-, \lambda) & \text{на } e_-, \\ C_+ Y_+(x_+, \lambda) & \text{на } e_+, \\ C_\varepsilon Y_R(\frac{x_\varepsilon}{\varepsilon}, \varepsilon, \varepsilon^2 \lambda) & \text{на } e_\varepsilon, \end{cases} \tag{3.10.5}$$

где $C_\pm, C_\varepsilon$ – некоторые константы. Для таких функций вновь достаточно проверить условие в точке M_0, что приводит к системе линейных уравнений:

$$\begin{cases} C_- Y_-(0,\lambda) - C_+ Y_+(0,\lambda) = 0 \\ C_- Y_-(0,\lambda) - C_\varepsilon Y_R(0,\varepsilon,\varepsilon^2\mu) = 0, \\ C_-(Y_-'(0,\lambda) + \alpha Y_-(0,\lambda)) + C_+ Y_+'(0,\lambda) + C_\varepsilon \varepsilon^{-1} Y_R'(0,\varepsilon,\varepsilon^2\lambda) = 0. \end{cases} \tag{3.10.6}$$

Приравнивая определитель данной системы к нулю, приходим к уравнению для собственных значений оператора H_ε^R:

$$G^R(\lambda, \varepsilon) = 0, \tag{3.10.7}$$

где

$$G^R(\lambda,\varepsilon) := Y_R(0,\varepsilon,\varepsilon^2\lambda)\big(F(\lambda) - \alpha Y_-(0,\lambda)Y_+(0,\lambda)\big) + \varepsilon^{-1} Y_R'(0,\varepsilon,\varepsilon^2\lambda) Y_-(0,\lambda) Y_+(0,\lambda) =$$
$$= \big(F(\lambda) - (\alpha+\beta) Y_-(0,\lambda) Y_+(0,\lambda)\big) + A(\lambda,\varepsilon) Y_-(0,\lambda) Y_+(0,\lambda),$$
$$A(\lambda,\varepsilon) := \varepsilon^{-1} Y_R'(0,\varepsilon,\varepsilon^2\lambda) + \beta Y_R(0,\varepsilon,\varepsilon^2\lambda).$$

В силу соотношений (3.8.2), (3.8.3) функция A голоморфна по λ и ε и справедливы равенства:

$$A(\Lambda_n^R, 0) = 0, \quad \frac{dA}{d\varepsilon}(\Lambda_n^R, 0) = \beta\phi_1(0) + \phi_2'(0) + \Lambda_n^R \phi_3'(0). \tag{3.10.8}$$

Поэтому функция G^R голоморфна по λ и ε. Ясно, что уравнение (3.10.7) выполнено при $\Lambda = \Lambda_n^R, \varepsilon = 0$. Отсюда сразу следует, что корни уравнения (3.10.7) сходятся к Λ_n^R при $\varepsilon \to +0$.

Выясним структуру функции G^R в окрестности точек $\lambda = \Lambda_n^R$. Вначале рассмотрим случай $Y_{\pm}(\Lambda_n^R) = 0$. В этом случае в силу (3.10.2) и соотношений (3.8.2) выполнено

$$\frac{dG^R}{d\lambda}(\Lambda_n^R, 0) = \frac{dF}{d\lambda}(\Lambda_n^R) \neq 0$$

по теореме о неявной функции уравнение (3.10.7) имеет единственное решение. Непосредственной подстановкой легко убедиться, что $\lambda = \Lambda_n^R$ – решение уравнения (3.10.7) для всех рассматриваемых значений ε. Это доказывает теорему в случае $Y_{\pm}(\Lambda_n^R) = 0$.

Пусть теперь $Y_{\pm}(\Lambda_n^R) \neq 0$. В этом случае в силу (3.10.3), (3.10.8) имеем:

$$\frac{dG^R}{d\lambda}\left(\Lambda_n^R, 0\right) = \frac{d(F - (\alpha + \beta)Y_-(0,\cdot)Y_+(0,\cdot))}{d\lambda}(\Lambda_n^R) \neq 0 \qquad (3.10.9)$$

и по теореме о неявной функции существует единственное решение $\lambda_n^R(\varepsilon)$ уравнения (3.10.7), голоморфное по ε и сходящееся к Λ_n^R при $\varepsilon \to +0$. Производная этого решения выражается формулой, аналогичной (3.9.7):

$$\frac{d\lambda_n^R}{d\varepsilon}(0) = -\frac{-\frac{dG^R}{d\varepsilon}(\Lambda_n^R, 0)}{\frac{dG^R}{d\lambda}(\Lambda_n^R, 0)} = -\frac{\frac{dA}{d\varepsilon}(\Lambda_n^R, 0)}{\frac{d(F - (\alpha + \beta)Y_-(0,\cdot)Y_+(0,\cdot))}{d\lambda}(\Lambda_n^R)}, \qquad (3.10.10)$$

где мы также воспользовались формулой (3.10.9). Вычислим знаменатель в данной формуле. Имеем:

$$\phi_2'(0) = -\int_0^1 W_0(t)dt - \int_0^1 W_{-1}(t)dt,$$

$$-\int_0^1 W_{-1}(t)\phi_1(t)dt = -\int_0^1 \phi_1''(t)\phi_1(t)dt = \phi_1(0)\phi_1'(0) + \int_0^1 (\phi_1'(t))^2 dt$$

$$= -\beta\phi_1(0) + \int_0^1 \left(\int_t^1 W_{-1}(s)ds \right)^2 dt.$$

Подставляя полученные равенства и (3.10.3), (3.10.8) в (3.10.10), приходим к формуле (3.6.22). Теорема доказана.

Материалы данного раздела соотвествуют работе автора [57], [58].

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В диссертационной работе исследованы дифференциальные операторы на связных графах без петель на предмет описания:

- самосопряженных сужений максимального оператора;
- корректных сужений максимального оператора.

В пункте 1.4 диссертационной работы дано полное описание всех самосопряженных сужений максимального оператора на связных графах без петель (Теорема 1.4.1, стр 23).

В параграфе 1.11 описаны корректные сужения максимального оператора на граф-дереве (Теорема 1.11.1, стр 43). Показано, что разность резольвент двух разных корректных сужений максимального оператора на граф-дереве представляет конечномерный оператор.

Затем сначала приводятся представления резольвент для некоторых специальных краевых задач на произвольных графах, далее формулы резольвент уточняются для отдельных классов графов:

- граф-дерево
- граф-звезда

В пункте 1.11 (Лемма 1.11.1, стр 43) показано представление резольвент краевых задач на граф-дереве. В пункте 1.10 (стр 41) приведена формула резольвенты для граф-звезды. В параграфах 2.4, 2.5 (Теорема 2.4.2, стр 53, теорема 2.5.4, стр 60) установлены представления резольвент для дифференциальных операторов определенных на граф-звезде. В параграфах 3.1, 3.6 (Теоремы 3.1.1, 3.1.2, 3.1.3, 3.6.1, 3.6.1 стр 81, 82, 83, 117, 118) описаны резольвенты оператора Шредингера определенного на граф-звезде в зависимости от ее длин дуг.

В случае дифференциального оператора на граф-звезде удается записать главные части разложений Лорана соответствующих резольвент. Оказывается, что эти разложения можно интерпретировать двумя различными способами. В теореме 2.8.2, стр 72 доказывается вычетное разложение в ряд Фурье функции Грина задачи Дирихле. А в теореме 2.9.3, стр 76 показано спектральное разложение в ряд Фурье функции Грина задачи Дирихле.

В заключительной части диссератции исследованы дифференциальные операторы на некомпактных графах, то есть граф может иметь дуги бесконечной длины. В этом случае представляет интерес влияния длин коротких дуг на спектральные свойства оператора. В диссертационной работе выписан предельный дифференциальный оператор, если одна дуга начинает «исчезать».

Список использованных источников

1 А.Т.Диаб, Б.К.Калдыбекова, О.М.Пенкин, “О кратности собственных значений в задаче Штурма–Лиувилля на графах”, *Матем. заметки*, **99**:4 (2016), С.489–501

2 Н.С. Даирбеков, О.М. Пенкин, Л.О. Сарыбекова, “Аналог неравенства Соболева на стратифицированном множестве”, *Алгебра и анализ*, **30**:5 (2018), С.149–158

3 Н.С. Даирбеков, О.М. Пенкин, Л.О. Сарыбекова, “Неравенство Пуанкаре и p-связность стратифицированного множества”, *Сиб. матем. журн.*, **59**:6 (2018), С.1291–1302

4 А.Т. Диаб, П.А. Кулешов, О.М. Пенкин, “Оценка первого собственного значения лапласиана на графе”, *Матем. заметки*, **96**:6 (2014), С.885–895

5 С.Н.Ощепкова, О.М. Пенкин, Д.В. Савастеев, “Сильный принцип максимума для эллиптического оператора на стратифицированном множестве”, *Матем. заметки*, **92**:2 (2012), С.276–290

6 С.Н. Ощепкова, О.М. Пенкин, “Теорема о среднем для эллиптического оператора на стратифицированном множестве”, *Матем. заметки*, **81**:3 (2007), С.417–426

7 Е.М. Богатов, О.М. Пенкин, “Метод Фурье в задаче Коши для уравнения четвертого порядка на стратифицированных множествах”, *Изв. вузов. Матем.*, 2003, 8, С.67–71

8 Герасименко Н.И., Павлов Б.С. Задача рассеяния на некомпактных графах. ТМФ, 74:3 (1988), 345–359; *Theoret. and Math. Phys.*, 74:3. 1988. – С.230–240

9 Юрко В.А. О восстановлении операторов Штурма – Лиувилля на графах. Мат. заметки. 2006. Т.79, №4. С.619 – 630

10 Завгородный М.Г. Сопряженные и самосопряженные краевые задачи на геометрическом графе. *Дифференциальные уравнения.* 2014. – Т.50, № 4. – С. 446 – 456.

11Афанасьева Н.А. Булот Л.П. Электротехника и электроника. Учебное пособие. – СПб.: СПбГУН и П.Т. – 2010. – С.181.

12 Наймарк М.А. Линейные дифференциальные операторы //М: Наука. – 1969. – С. 255 – 270.

13 Harary F. Graph theory. Addison – Wesley Publishing Company. 1969. – P.274.

14 Olaf Post. Spectral Analysis on Graph-like Spaces. Springer-Verlag Berlin Heidelberg. 2012. P.431.

15 Astudillo M., Kurasov P., Usman M., RT – symmetric laplace operators on star graphs: Real spectrum and selfadjointness // Adv.Math.Phys. – 2015.

16 Hobson E.W. On a general convergence theorem, and the theory of the representation of a function by a series of normal functions // Proc. London Math. Soc. 2.1908. – V. 8. –P.349395.

17 Haar A.T. Theorie des ortogonalen Funktionen systeme // Math. Ann. 1910. V.69. – P.331 – 371; 1911. – V.71. – P.38 – 53.

18 Birkgoff G.D. On asymptotic charaster of the solutions of certain linear

differential equations containing a parameter // Trans.Am.Math.Soc.1908. – 9 – P.373 – 395.
19 Birkgoff G.D. Boundary value and axpansion problems of ordinary linear differential equations // Trans. Am. Math. Soc. 1908. – 9.P.219 – 231.
20 Тамаркин Я.Д. О некоторых общих задачах теории обыкновенных линейных дифференицальных уравнений. Петроград, 1917.
21 Stone M.H. A comparison of the series of Fourier and Birkhoff // Trans. Amer. Math. Soc. 1926. – V.28, № 4. – P.695761.
22 Ильин В.А. О равномерной равносходимости разложений по собственным и присоединенным функциям несамосопряженного дифференциального оператора и в тригонометрический ряд Фурье // Докл. АН СССР. 1975. – Т.223, № 3. – С. 548 – 551.
23 Ильин В.А. Необходимые и достаточные условия базисности и равносходимости с тригонометрическим рядом спектральных разложений.1. // Дифференциальные уравнения. 1980.Т.16, № 5. – С.771 – 794.
24 Ильин В.А. Необходимые и достаточные условия базисности и равносходимости с тригонометрическим рядом спектральных разложений.1. // Дифференциальные уравнения. 1980. – Т.16, № 6. – С.980 – 1009.
25 Седлецкий А.М. Классы аналитических преобразований Фурье и экс – поненциальной апроксимации / А.М. Седлецкий. М.: Физматлит, 2005. – 504 с.
26 Хромов А.П. Интегральные операторы с ядрами, разрывными на ломанных линиях / А.П. Хромов // Мат. сборник. 2006. – Т. 197, № 11. – С. 115 – 142.
27 Хромов А.П. Теоремы равносходимости для интегро – дифференциальных и интегральных операторов / А.П. Хромов // Мат. сб. 1981. – Т. 114(156). – № 3. – С. 378 – 404.
28 Хромов А.П. Разложение по собственным функциям обыкновенных линейных дифференциальных операторов на конечном интервале / А.П. Хромов // Докл. АН СССР. Т. 146, № 6. 1962. – С. 1294 – 1297.
29 Шкаликов А.А. Краевые задачи для обыкновенных дифференциальных уравнений с параметром в граничных условиях. // Тр. Семинара им. И.Г. Петровского. 1983. –Т.9. – С. 190 – 229.
30 Покорный Ю.В., Пенкин О.М. Теоремы Штурма для уравнений на графах/Ю.В. Покорный, О.М. Пенкин // ДАН СССР. 1989.–Т.309, №6. – С.1306 – 1308.
31 Ильин В.А. Волновое уравнение с граничным управлением на одном конце при закрепленном втором конце / В.А Ильин // Диф. уравнения. 1999. – Т. 35, № 12. – С. 1640 – 1659.
32 Покорный Ю.В. Волновое уравнение на пространственной сети / Ю.В. Покорный, В.Л. Прядиев, А.В. Боровских // Докл. РАН. 2003. – Т. 388, № 1. – С. 16 – 18.
33 Прядиев Ю.В. О непериодических колебаниях упругих сеток / В.Л. Прядиев // Современные методы в теории краевых задач: "Понтрягинские чтения XI": материалы Воронеж, весен, мат. шк. – Воронеж, 2000. – С. 158.
34 Прядиев В.Л. Свойства фундаментального решения смешанной задачи

для волнового уравнения на графе // Современные методы теории функций и смежные проблемы : тез.докл. Воронеж, зимн. мат. шк. Воронеж, 2003. – С. 202 – 203.
35 Копытин А.В. Об одном представлении решения волнового уравнения на сети / А.В. Копытин, В.Л. Прядиев // Современные методы теории функций и смежные проблемы: тез.докл. Воронеж, зимн. мат. шк., (дополнит, вып.). Воронеж, 2001. – С. 307.
36 Pokorny Yu.V. Differential equations on networks (geometric graph) / Yu.V. Pokorny, A.V. Borovskikh // J. Mathematical sciences. 2004. – V.ll, № 6. – P. 691 – 718.
37 Pryadiev V.L. On the laplacian spectrum on a graph with commensurable edges V.L. Pryadiev, A.V. Kopytin // Spectral and Evolutional problems: Proc. of the Eleventh Crimean Autumn Mathematical School – Symposium. Simferopol, 2001. – V. 11. – P. 167172.
38 Репников В.Д. О стабилизации решения задачи Коши для уравнения теплопроводности в плоскости Больаи – Лобачевского // Дифференциальные уравенения. 2002. – Т. 38, №2. – С. 262 – 270.
39 Albeverio S., Gesztesy F., Hoegh – Krohn, Holden H. Solvable models in quantum mechanics. AMS Chelsea Publ., Amer. Math.Soc., Providence, Rhole Island (2000).
40 Борисов Д.И. О PT – симметричном волноводе с парой малых отверстий // Труды Института математики и механики УрО РАН. 18:2, 2012– С. 22 – 37.
41 Борисов Д.И., Мухаметрахимова А.И. О равномерной резольвентной сходимости для эллиптических операторов в многомерных областях с малыми отверстиями // Пробл.матем.анал. 92, 2018, – С. 69 – 81.
42 Ильин А.М. Согласование асимптотических разложений решений краевых задач. Наука, Москва (1989).
43 Мазья В.Г., Назаров С.А., Пламеневский Б.С. Асимптотические разложения собственных чисел краевых задач для оператора Лапласа в областях с малыми отверстиями // Изв. АН СССР. Сер.матем. 48:2, 1984– С. 347 – 371.
44 Покорный Ю.В. Волновое уравнение на пространственной сети /Ю.В. Покорный, В.Л. Прядиев, А.В. Боровских // Докл. РАН. – 2003. Т. 388, № 1. – С. 16 – 18.
45 Гаврилов А. А. Аналог леммы о нормальной производной для эллиптического уравнения на стратифицированном множестве / А.А. Гаврилов, О.М. Пенкин // Диф. уравнения. 2000. – Т. 36, № 2. – С. 226 – 232.
46 Пенкин О.М. О слабом принципе максимума для эллиптическогоуравнения на двумерном клеточном комплексе /О.М. Пенкин / / Диф. уравнения. 1997. – Т. 33, № 10. – С. 1404 – 1409.
47 Покорный Ю.В., Пенкин О.М. Теоремы Штурма для уравнений на графах/Ю.В. Покорный, О.М. Пенкин//ДАН СССР. 1989. –309, №6. – С.1306 – 1308.
48 Прядиев В.Л. К вопросу о периодичности колебаний упругих сеток / t В.Л. Прядиев, А.В. Копытин, А.В. Боровских // Современные методы в

теории краевых задач: "Понтрягинские чтения X": материалы Воронеж, весен, мат шк. – Воронеж, 1999. – С. 198.
49 Pryadiev V.L. On the laplacian spectrum on a graph with commensurable edges / V.L. Pryadiev, A.V. Kopytin // Spectral and Evolutional problems: Proc. of the Eleventh Crimean Autumn Mathematical School – Symposium. Simferopol, 2001. – V. 11. – P. 167172.
50 Соболев С.Л. Уравнения математической физики / С.Л. Соболев. – М.; Л.: Гос. изд – во технико – теоретич. лит., 1950. – С.424.
51 Копытин А.В. Об одном представлении решения волнового уравнения на сети / А.В. Копытин, В.Л. Прядиев // Современные методы теории функций и смежные проблемы: тез. докл. Воронеж, зимн. мат. шк., (дополнит, вып.). Воронеж, 2001. – С. 307.
52 Кошляков Н.С. Основные дифференциальные уравнения математической физики / Н.С. Кошляков, Э.Б. Глинер, М.М. Смирнов. М. : Гос. изд – во физ. – мат. лит. 1962. – С.768.
53 Тихомиров В.В. Волновое уравнение с граничным управлением при упругом закреплении. II / В.В. Тихомиров // Диф. уравнения. 2002. – Т. 38, № 4. – С. 529 – 537.
54 Kanguzhin B.E., Konyrkulzhayeva M.N. Green's function of the Dirichlet problem for the differential operator on a star-shaped graph. // International conference on mathematics: «An Istanbul Meeting for World Mathematicians» Istanbul, Turkey, P.195-204, 2018.
55 Коныркулжаева М.Н. Функция Грина задачи Дирихле для оператора Штурма-Лиувилля. // Конференция"XIV Международная научная конференция студентов,магистрантов и молодых ученых «ЛОМОНОСОВ –2018»",Казахстан, 21 апреля,-2018.
56 Жапсарбаева Л.К., Кангужин Б.Е., Коныркулжаева М.Н., Самосопряженные сужения максимального оператора на графе, Уфимск. Матем. Журнал., 2017, –Т.9(4), –С. 36 – 44.
57 Borisov D.I., Konyrkulzhayeva M.N., Perturbation of threshold of the essential spectrum of the Schrodinger operator on the simplest graph with a small edge // Journal of Mathematical Sciences, 2019 – V.329, № 239 (3), P.248 – 268.
58 Борисов Д.И., Коныркулжаева М.Н. Простейшие графы с малыми ребрами: асимптотики резольвент и голоморфная зависимость спектра. // Уфимск.матем.журн., 2019, Т.11(2), С.56 – 71.
59 Жанузакова Д.Т., Коныркулжаева М.Н., Таирова А.Б., Тулеухасым С.Т. Представление резольвенты дифференциального оператора на геометрическом графе // Вестник КазНПУ им. Абая. № 1(61). С. 61 – 67.
60 Аймал Раса Г.Х., Аузерхан Г.С., Коныркулжаева М.Н., Функция Грина задачи Дирихле дифференциального оператора на графе – звезде при m. // Вестник КазНУ им. аль – Фараби, 2019, № 1(101), С.14 – 28.
61 Жаруллаев Д.Б., Кангужин Б.Е., Коныркулжаева М.Н., Функция Грина дифференциального оператора на графе – звезде с общими граничными условиями// Вестник КазНУ им.аль – Фараби, 2019, № 1(101), С.14 – 28.

62 Жапсарбаева Л.К., Кангужин Б.Е., Коныркулжаева М.Н., Сверточное представление резольвент дифференциального оператора на графе // Академия Наук Республики Башкортостан, Башкирский Государственный Университет, ГАНУ Институт Стратегических Исследований РБ. – Уфа, БашГУ. 21 – 23 мая, – 2017.
63 Кангужин Б.Е., Коныркулжаева М.Н., Оператор, резольвенты которых имеют сверточное представление, и их спектральный анализ // Международную конференцию по теории функций, посвященный 100 – летию А.Ф.Леонтьева. – Уфа, Институт математики с вычислительным центром УНЦ РАН, Башкирский государственный университет и Академия наук РБ. 15 – мая, – 2019.
64 Kanguzhin B.E., Konyrkulzhayeva M.N., Zhapsarbayeva L.K.. Representation of the resolvent of second order differencial operator on a graph. // The International Scientific Conference «Weghted estimates of differential and integral operators and their applications». – Astana. 3 – 5 мая,– 2017.
65 Жанай А.Ж., Кангужин Б.Е., Коныркулжаева М.Н. Об одной задаче на собственные значения дифференциального уравнения третьего порядка // VII Международная молодежная научно – практическая конференция «Математическое моделирование процессов и систем». – Уфа. – 2017.
66 Жанузакова Д.Т., Коныркулжаева М.Н., Представление резольвенты дифференциального оператора на компактных графах.// Конференция" «Современные проблемы математики, механики и информатики», посвященной 25 – летию Независимости Республики Казахстан", Казахстан, – г. Караганда. – 2016.
67 Коныркулжаева М.Н. Функция Грина задачи Дирихле для оператора Штурма – Лиувилля. // Конференция"XIV Международная научная конференция студентов,магистрантов и молодых ученых «ЛОМОНОСОВ –2018»", Казахстан, 21 апреля, – 2018.
68 B.Kanguzhin, L.Zhapsarbaeva, Zh.Madibaiuly. Lagrange formula for differential operators and self – adjoint restrictions of the maximal operator on a tree, // Eurasian Math. J., **10**:1 (2019), С.16–29.
69 М.С.Агранович. О рядах по корневым векторам операторов, определяемых формами с самосопряженной главной часть, Функ.анализ и его прил., 1994, Т 28, выпуск 3, С.1 – 21.
70 Б.М.Левитан, И.С.Саргсян. Введение в спектральную теорию. Самосопряженные обыкновенные дифференциальные уравнения. М.Наука, 1970. 671с.
71 Б.К.Кокебаев, М. Отелбаев, А.Н.Шыныбеков. К вопросам расширения и сужения операторов. // Докл. АН СССР, 1983, – Т 271, № 6, – С. 1307-1310.
72 М.Отелбаев, А.Н. Шыныбеков. О корретных задачах типа. Бицадзе-Самарского. // Доклады АН СССР, 1982, – Т. 265, № 4, – С. 815-819.