әл-Фараби атындағы Қазақ ұлттық университеті

ӘОЖ 004.45:330 Қолжазба құқығында

ТУСУПОВА КАМШАТ БАКЫТЖАНОВНА

Кластерлі экономикалық жүйелерді басқару әдістерін өңдеу

6D070300 – Ақпараттық жүйелер

Философия докторы (PhD)
дәрежесін алу үшін дайындалған диссертация

Ғылыми кеңесшілер:
т.ғ.д., профессор Мурзабеков З. Н.,
PhD (Eng) Марек Милош

Қазақстан Республикасы
Алматы, 2019

МАЗМҰНЫ

АНЫҚТАМАЛАР.....4
БЕЛГІЛЕУЛЕР МЕН ҚЫСҚЫРТУЛАР.....6
КІРІСПЕ.....7
1 КЛАСТЕРДІҢ ҮШ СЕКТОРЛЫ ЭКОНОМИКАЛЫҚ МОДЕЛІ.....12
1.1 Секторлы экономика түсінігі.....12
1.2 КҮСЭМ-нің математикалық және құрылымдық модельдері.....14
1.3 КҮСЭМ-нің тұрақты тепе-теңдік күйін анықтау алгоритмі.....19
1.4 Сызықты емес жүйелермен берілген КҮСЭМ үшін ТБЕ-не квазисызықтандыру әдісін қолдану.....24
1 – бөлім бойынша тұжырымдар.....27
2 КЛАСТЕРДІҢ ҮШ СЕКТОРЛЫ ЭКОНОМИКАЛЫҚ МОДЕЛІ ҮШІН СИНТЕЗДЕУШІ БАСҚАРУЛАРДЫ ТҰРҒЫЗУ АЛГОРИТМДЕРІН ӨҢДЕУ.....28
2.1 Ақырлы уақыт интервалында, басқару парамерлері шектеулерсіз берілген КҮСЭМ сызықты моделі үшін синтездеуші басқаруды іздеу алгоритмі.....28
2.2 Ақырлы уақыт интервалында, басқару парамерлері шектеулермен берілген КҮСЭМ сызықты моделі үшін синтездеуші басқаруды іздеу алгоритмі.....32
2.3 Ақырлы уақыт интервалында, басқару парамерлері шектеулермен берілген КҮСЭМ-нің сызықты емес моделі үшін синтездеуші басқаруды іздеу алгоритмі.....36
2.4 Шексіз уақыт интервалында, басқару парамерлері шектеулермен берілген кластердің үш секторлы экономикалық моделінің сызықты емес моделі үшін тиімді тұрақтылықты іздеу алгоритмі.....41
2–бөлім бойынша тұжырымдар.....45
3 ЭКОНОМИКА САЛАЛАРЫН БАСҚАРУДЫҢ АҚПАРАТТЫҚ ЖҮЙЕСІ ҮШІН СЕКТОРЛАР АРАСЫНДА ЕҢБЕК ЖӘНЕ ИНВЕСТИЦИЯ РЕСУРСТАРЫН ТИІМДІ ҮЛЕСТІРУДІ МОДЕЛЬДЕУ ЖӘНЕ ЖОСПАРЛАУ МОДУЛІН ӨҢДЕУ.....46
3.1 Басқарудың ақпараттық жүйесі түсінігі, қысқаша тарихы және қазіргі жағдайы.....46
3.2 Экономика салаларын БАЖ үшін «Секторлар арасында еңбек және инвестиция ресурстарын тиімді үлестіруді модельдеу және жоспарлау» модулін өңдеу.....48
3 – бөлім бойынша тұжырымдар.....64
4 ЭКСПЕРИМЕНТТІК ЕСЕПТЕУЛЕР.....65
4.1.1 Ақырлы уақыт интервалында, басқару парамерлері шектеулерсіз берілген КҮСЭМ-нің сызықты моделі үшін синтездеуші басқаруды тұрғызудың сандық есептеулері.....66
4.1.2 Сызықты жүйелермен берілген КҮСЭМ тиімді басқару есебін Понтрягиннің максимум қағидасы әдісімен шешу.....70
4.2 Ақырлы уақыт интервалында, басқару парамерлері шектеулермен берілген КҮСЭМ-нің сызықты моделі үшін синтездеуші басқаруды тұрғызудың сандық есептеулері.....74

4.3 Ақырлы уақыт интервалында, басқару парамерлері шектеулермен берілген КҮСЭМ-нің сызықты емес моделі үшін синтездеуші басқаруды тұрғызудың сандық есептеулері 78
4.4 Шексіз уақыт интервалында, басқару парамерлері шектеулермен берілген КҮСЭМ сызықты емес моделі үшін тиімді тұрақтылықты іздеудің сандық есептеулері 81
4.5 Басқару параметрлері шектеулермен берілген экономиканың сызықты емес жүйесі үшін тиімді тұрақтылық есебін шешу 84
4.6 Еңбек және инвестиция ресурстарының үзіліссіз өзгерісіндегі тиімді басқару есебін шешу алгоритмі 93
4-ші бөлім бойынша тұжырымдар 104
ҚОРЫТЫНДЫ 105
ПАЙДАЛАНҒАН ӘДИБЕТТЕР ТІЗІМІ 107
ҚОСЫМШАЛАР 112

АНЫҚТАМАЛАР

Диссертациялық жұмыста келесідей анықтамалармен берілген терминдік сөздер қолданылады.

Аймақтық кластер–бұл кластердің мүшелері бір-біріне географиялық жағынан жақын орналасқан өндірістік кластер.

Басқарушы параметрлер – деп секторлар арасында еңбек және инвестиция ресурстарын θ_0, θ_1, θ_2, s_0, s_1, s_2 бөлгендегі олардың үлестерін айтамыз.

Кластер – бір–бірімен байланыстағы ұйымдар (оқу орындары, мемлекеттік басқару органдары, инфрақұрылымдық компаниялар) және географиялық белгілері бойынша бір жерде шоғырланып бір–бірімен белгілі бір салада әрекеттесіп, байланысқан копманиялардың (жабдықтаушылар, өндірушілер және т.б.) тобы.

Қормен жарақтану (фондовооруженность) – бір жұмысшыға келетін негізгі өндірістік қорлардың құнын сипаттайтын шама.

Негізгі қор – ұзақ жылдар бойы өндіріс саласында жұмыс істейтін, материалдық игіліктерді өндіруге қатысып, өзінің заттай түрін сақтайтын, бірте - бірте тозатын және өзінің құнын өндірілетін жаңа өнімге тозу мөлшеріне қарай амортизациялық жарна түрінде аударатын өндіріс құралдарын айтамыз.

Негізгі өндірістік қорлар – материалдық өндіріс саласында жұмыс істейтін негізгі қорлар, оларға ғимараттар, құрылыс жұмысшы машиналар мен құрал-жабдықтар және т.б. жатады.

Сызықтық-квадраттық есептер (LQ-есептер) деп – аутоматтық басқару жүйелері модельдеріндегі сызықтық басқару объектісі мен квадраттық мақсаттық функциясы бар есептерді айтамыз.

Синтездеуші басқару деп – мақсатты функцияналыдың ең аз шамасын беретін және қойылған шектеулерді қанағаттандырып берілген жүйені бастапқы күйіден соңғы күйге, белгіленген уақыт интервалында жеткізетін басқаруды айтамыз.

Тиімді басқару – бұл жүйелік сапа критерилері жиынтығының максималды немесе минималды деңгейін қамтамасыз ететін басқару объектісін немесе басқару заңдылығының үрдістерін қарастыратын жүйелерді жоспарлау есебі.

Тиімді теңдестірілген өсім – еңбек, инвестиция және материалдық ресурстары теңдестірілген және «дисконтталған мешікті тұтынудың максимумы» критериі бойынша тиімді болатын, барлық секторлардың қормен жарақтануларының өсімін айтамыз.

Технологиялық құрылым – ғылыми-техникалық жетістіктер деңгейінде және ағымдағы басқару жүйесінде қол жеткізуге болатын өндіріс аппаратының жай-күйі, сонымен қатар, өндірісті ұйымдастыру және басқару.

Экономикалық жүйе – бұл өндірістік–технологиялық және ұйымдастырушылық-экономикалық байланыстармен біріктірілген ұлттық экономикалық бірліктердің жиынтығы.

Экономикалық сектор дегеніміз теориялық немесе практикалық мақсаттарына байланысты экономиканың басқа саласынан бөліп қарауға мүмкіндік беретін жалпы сипаттамалары ұқсас, экономикалық мақсаттары мен функциялары бір экономиканың үлкен бір бөлігі.

Экономикалық процесс – экономикалық жүйе күйінің қандайда бір параметрге (параметрлерге) немесе уақытқа байланысты өзгеруі.

Экономиканың үш секторлы моделі – осы теорияға сәйкес экономика қызметі үш секторға бөлінеді: шикізатты табу (бірінші сектор), өндіру (екінші сектор) және қызметтер көрсету аясы (үшінші сектор).

Экономиканың теңдестірілген өсімі – деп, экономиканың өрлеу траекториясында еңбек, инвестиция және материалдық баланстардың орындалуын айтамыз.

Экономиканың теңдестірілген өсімінің траекториясы – деп, t кез-келген уақыт моментінде барлық баланстар орындалатын және барлық меншікті өнімдер $(x_0(t), x_1(t), x_2(t))$ өсетін траекторяларды айтамыз.

БЕЛГІЛЕУЛЕР МЕН ҚЫСҚЫРТУЛАР

Диссертециялық жұмыста төмендегідей қысқартылған сөздер қолданылады:

АЖ – ақпараттық жүйе

БАЖ – басқарудың ақпараттық жүйесі

КҮСЭМ – кластердің үш секторлы экономикалық моделі

ТБЕ – тиімді басқару есебі

ЭЕМ – электронды есептеу машинасы (компьютер)

КІРІСПЕ

Зерттеу тақырыбының өзектілігі. Іс жүзінде, экономикада кездесетін – әлемдік нарықта бәсекеге қабілеттілікті арттыру, экономикалық процестерді жаһандандыру, оның әр салаларын тиімді диверсификациялау мен модернизациялау сынды көптеген қолданбалы және маңызды есептерді шешудің қолданыстағы әдістері өте күрделі және қосымша зерттеулерді қажет етеді. Осы типтегі есептердің шешімін іздеу экономика саласында математикалық модельдеудегі экономикалық теориялар, шешімдер қабылдау, операцияларды зерттеу, жүйелі талдау, тиімді басқару және т.б. әдістер мен теорияларды зерттеуге негіз болды. Осындай әдістердің ішінен кең ауқымды мәселелерді қамтитын ТБЕ ерекше атап өткен жөн. Мысалы, ТБЕ экономикаға байланысты: жоспарланған уақытта экономикалық дамудың анықталған деңгейіне жету, өндірушілер мен тұтынушылар арасында тепе-теңдікті орнату, өндіріс үдерісінде еңбек күші мен қаржыландыруды тиімді үлестіру мен оны арттыруды тиімді жоспарлау т.с.с. сынды есептерді қарастырса, ғарыш саласына байланысты: Жердің жасанды жерсеріктерінің ұшуы, ғарыштық кемелердің пилот арқылы басқарылуы, Айға жайлы қону, Күн жүйесінің басқа планеталарына ұшуы т.с.с. күрделі проблемаларды қарастырады. XX ғасырдың 60-шы жылдарында пайда болған бұл бағыттың басында Л.С.Понтрягин, Р.Беллман, В.Ф. Кротов сынды ұлы математиктердің тұрғанын айта кеткен жөн.

Дегенмен қазіргі уақытты, экономика саласында тиімді басқару теориясын қолдану арқылы шешім қабылдау әдістері – теория және тәжірибе жүзінде әлі де болса көш артта қалып, өз деңгейінде дамымай отыр. Бұны басқару жайлы көптеген мақалалар жарияланғанымен, олардың ішінде нақты экономикадағы ТБЕ үшін, әлі де болса жаңа тиімді әдістердің ұсынылмай жатқандығынан көруге болады. Оның да өзіндік себептері бар. Мысалы, тәжірибеде көп жағдайларда ТБЕ сандық мәндерін аналитикалық жолмен шешу мүмкін бола бермейді, осындай жағдайларда оларды ЭЕМ-де шығару әдістері қажеттілігі туындайды. Ал бұл, өз кезегінде ТБЕ әр есебі үшін жекеленген есептеу алгоритмдерін жасау, осы алгоритм негізінде бағдарламалық жасақтама жүйелері мен мәліметтер қорын құру, тиімді шешім қабылдау және басқару мәселелерін шешудегі осы үрдістерді іске асыруда бағдарламалық кешендерді құру технологиясын әзірлеу және ұсыну, оны ары қарай жетілдіру сынды көптеген мәселелерді етене зерттеулерді талап етеді. Сондықтан осындай класс есептерін шешу қажеттілігі жаңа есептеу және ақпараттық жүйелерді құруды талап етеді, ал өз кезегінде мұндай жүйелерді зерттеу және өңдеу қазіргі таңда өзекті болып табылады.

Осы мәселелердің негізінде диссертациялық жұмыстың өзектілігін төмендегі пунктермен көрсетіп өтуге болады:

1. Экономикада тиімді шешім қабылдау үшін ақпараттық технологияларды қолданатын икемді ақпаратты басқару жүйесін немесе оның модульдерін құру;
2. Экономикадағы ТБЕ үшін сандық нәтижелер беретін алгоритмдерді құру;

3. Экономикалық жүйені қандайда бір бастапқы $x(t_0) = x_0$ күйден соңғы қалаулы $x(T) = x_T$ немесе $x(T) = 0$ күйге көшіреу есебін шешу алгоритмін құру;

Зерттеу жұмысының мақсаты: Экономика салаларын БАЖ үшін секторлы экономикада теңдестірілген өсімді қаматамасыз ететін және еңбек пен инвестиция ресурстарын тиімді үлестіруді модельдеу мен жоспарлауды жүзеге асыратын модульді құру. Сондай-ақ, аталмыш модуль үшін синтездеуші басқаруды тұрғызу алгоритмін ЭЕМ жүзеге асыруды ұсыну.

Зерттеу есептері. Қойылған мақсатқа байланысты диссертацияда келесідей есептер қарастырылады:

1. БАЖ зерттеу және заманауи технологияларға талдау жасау;
2. Экономика салаларын БАЖ үшін «Секторлар арасында еңбек және инвестиция ресурстарын тиімді үлестіруді модельдеу және жоспарлау» модулін өңдеу;
3. Аталмыш модульде КҮСЭМ үшін синтездеуші басқаруды тұрғызу алгоритмдерін өңдеу, яғни:
   - КҮСЭМ тұрақты тепе-теңдік күйін анықтау алгоритмін өңдеу;
   - Ақырлы уақыт интервалында, сызықты теңдеулер жүйесімен және басқару параметрлері шектеулерсіз берілген КҮСЭМ үшін синтездеуші басқаруды іздеу алгоритмін өңдеу;
   - Ақырлы уақыт интервалында, сызықты теңдеулер жүйесімен және басқару параметрлері шектеулермен берілген КҮСЭМ үшін синтездеуші басқаруды іздеу алгоритмін өңдеу;
   - Ақырлы уақыт интервалында, сызықты емес теңдеулер жүйесімен және басқару параметрлері шектеулермен берілген КҮСЭМ үшін синтездеуші басқаруды іздеу алгоритмін өңдеу;
   - Шексіз уақыт интервалында, сызықты емес теңдеулер жүйесімен және басқару мәндері шектеулермен берілген КҮСЭМ үшін тиімді тұрақтандыруды іздеу алгоритмін өңдеу;
4. Аталмыш алгоритмдерді және модульдің жұмыс жасауын жүзеге асыратын программалық құралдарды құру;
5. Ұсынылып отырған модульдің жұмыс жасау қабілеттілігін эксперименттік есептеулер арқылы тексеру.

Зерттеу объектісі дифференциалдық және сызықты емес алгебралық теңдеулер жүйесімен берілген КҮСЭМ математикалық моделі.

Зерттеу пәні. Траектория ұштары бекітілген динамикалық жүйелер үшін кері байланыс принципі бойынша синтездеуші басқаруларды тұрғызу алгоритмі мен оны жүзеге асыратын модульді өңдеу.

Зерттеу әдістері. Диссертацияны орындау барысында тиімділіктің жеткілікті шарты, арнайы түрдегі Лагранж көбейткіштері мен тиімді басқару теориясының әдістері, бағдарламалау тілдері қолданылды.

Ғылыми жаңалылығы.

1. Экономика салаларын БАЖ үшін «Секторлар арасында еңбек және инвестиция ресурстарын тиімді үлестіруді модельдеу және жоспарлау» модулі ұсынылып отыр;

2. Аталмыш модульде КҮСЭМ үшін синтездеуші басқаруды іздеу алгоритмдерін өңдеу. Яғни:

– КҮСЭМ тұрақты тепе-теңдік күйін анықтау алгоритмі;

– Ақырлы уақыт интервалында, сызықты теңдеулер жүйесімен және басқару параметрлері шектеулерсіз берілген КҮСЭМ үшін синтездеуші басқаруды іздеу алгоритмі;

– Ақырлы уақыт интервалында, сызықты теңдеулер жүйесімен және басқару параметрлері шектеулермен берілген КҮСЭМ үшін синтездеуші басқаруды іздеу алгоритмі;

– Ақырлы уақыт интервалында, сызықты емес теңдеулер жүйесімен және басқару параметрлері шектеулермен берілген КҮСЭМ үшін синтездеуші басқаруды іздеу алгоритмі;

– Шексіз уақыт интервалында, сызықты емес теңдеулер жүйесімен және басқару мәндері шектеулермен берілген КҮСЭМ үшін тиімді тұрақтандыруды іздеу алгоритмі.

Зерттеу жұмысының құрылымы мен көлемі. Диссертациялық жұмыс кіріспеден, төрт бөлімнен, қорытындыдан, пайдаланған әдебиеттер тізімінен және 4 қосымшадан тұрады. 122 беттік машинамен жазылған мәтінді құрайды, оның ішіне 7 кесте, 55 сурет кіреді.

Кіріспеде диссертациялық жұмыс тақырыбының өзектілігі көрсетіліп, ғылыми-зерттеу жұмысының мақсаты, объектісі, пәні, әдісі, зерттеу есептері, ғылыми жаңалылығы және тәжірибелік маңыздылығы тұжырымдалған. Сондай-ақ, жұмысты зерттеу барысында жарық көрген мақалалар тізімі келтірілген.

Бірінші бөлімде секторлы экономикаға әдеби шолу жасалынып, қарапайым дифференциалдық және алгебралық теңдеулерімен берілген КҮСЭМ – нің математикалық және құрылымдық модельдері қарастырылады және КҮСЭМ тұрақты тепе – теңдік күйін анықтау алгоритмі анықталады.

Екінші бөлімде басқарылатын қозғалыстар теориясының негізгі мәселесі болып табылатын әр-түрлі шектеулермен берілген, басқаруды синтездеу есебінің шешу жолдары қарастырылған. Сонымен қатар, КҮСЭМ үшін ТБЕ-нің қойылымы, басқару параметрлері шектеулерін ескеріп, кері байланыс қағидасына негізделген сызықты және сызықты емес басқарылатын жүйелер үшін синтездеуші басқаруларды тұрғызудың конструктивті әдістері мен алгоритмдері ұсынылған және бұл алгоритм арнайы түрдегі Лагранж көбейткіштер әдісімен жүзеге асырылады.

Үшінші бөлімде БАЖ түсінігіне анықтамасы беріліп, оның қалыптасу тарихы мен қазіргі кездегі даму бағыттарына және күйлеріне аналитикалық шолу жасалынып, сеторлы экономикада шешім қабылдау процесінде тиімді басқару теориясын қолданатын автоматтандырылған жүйені құрудың проблемалары көрсетіледі. Сондай – ақ, экономика салаларын БАЖ үшін «Секторлар арасында еңбек және инвестиция ресурстарын тиімді үлестіруді модельдеу және жоспарлау» модулі өңделіп, оның базасында КҮСЭМ-нің ТБЕ үшін синтездеуші басқарулар тұрғызу алгоритмдері өңделді.

Төртінші бөлімде екінші бөлімде сипатталған алгоритмдер бойынша экономика салаларын БАЖ үшін «Секторлар арасында еңбек және инвестиция ресурстарын тиімді үлестіруді модельдеу және жоспарлау» модулінде КҮСЭМ үшін ТБЕ сандық есептеулерінің нәтижелері келтірілген.

Қорытынды бөлімде диссертациялық жұмыстың негізгі нәтижелері мен тұжырымдары бекітілген.

Зерттеудің теориялық және тәжірибелік маңыздылығы. Баланстық арақатынастармен берілген КҮСЭМ математикалық моделіне арнайы түрдегі Лагранж көбейткіштері әдісін қолдану, кластерлік экономиканы жоспарлау мен ұйымдастыруға, экономикалық саясаттың өзгеруінен болатын өтпелі кезеңдерді зерттеуге мүмкіндік бересе, тиімді шешім қабылдауға мүмкіндік беретін диссертациялық жұмыста ұсынылып отырған модуль, қолда бар ақпаратты қолданып интекактивті түрде шешім қабылдауға мүмкіндік береді.

Жұмыста ҚР мемлекеттік статистика қызыметі мәліметтерінің негізінде секторлар арасында ресурстарды тиімді тарату траекторияларын анықтауға мүмкіндік беретін сандық есептеулер жүргізілді.

Диссертациялық жұмыс 2015–2017 жылдар аралығында (мемлекеттік тіркелу номері № 0115РК00763) МҚ4 «Кластердің үш секторлы экономикалық моделінің теңдестірілген өсімі үшін ресурстарды тиімді үлестірудің математикалық әдістері мен алгоритмдерін өңдеу» тақырыбындағы грантпен қаржыландырылған ғылыми жобадан бастау алады.

Ғылыми жұмыс пен мақалалардың апробациясы. Жұмыстың ғылыми нәтижелері келесідей халықаралық ғылыми конференцияларда баяндалып, талқыланды: «Күрделі жүйелерді оңтайландыру мәселелері» атты IX халықаралық Азиялық мектеп-семинары, Алматы, 2013 ж. (ф.-м.ғ. д., профессор, В.К. Попков, Ресей); «Science, technology and innovative technologies in the prosperous epoch of the powerful state» атты халықаралық ғылыми конференция, Түркменстан, Ашхабат, 2015 ж.; «Computational and Informational Technologies in Science, Engineering and Education» атты халықаралық ғылыми конференция, Алматы, 2015 ж.; «Information Systems Architecture and Technology» атты 36-шы халықаралық конференцияда, Польша, Карпач, 2015 ж.; «Ғылым мен өндірістегі заманауи инновациялар, білім сапасын арыттыру» атты халықаралық ғылыми конференциясы, Қ. Сәтпаев атындағы Екібастұз инженерлік-техникалық институты, Екібастұз, 2014, 2017 жж.; студенттер мен жас ғалымдардың «Фараби әлемі» атты халықаралық ғылыми конференциясы, Алматы, 2015, 2018 жж.; «Ғылым мен өндірістегі заманауи үрдістер мен инновациялар» атты 4-ші халықаралық ғылыми-тәжірибелік конференциясы, РФ, Кемеров, Междуреченск, 2015 ж.; «Research and applications in the field of intelligent information and database systems» 10-шы халықаралық ғылыми конференциясы, Ветнам, Донг Ной, 2018 ж.; III халықаралық «Информатика және қолданбалы математика» ғылыми конференциясы, Казахстан, Алматы, 26-29 қыркүйек, 2018.

Диссертациялық жұмыс әл-Фараби атындағы Қазақ ұлттық университетінің «Ақпараттық жүйелер» кафедрасында, сонымен қатар,

«Ақпараттық технологиялар» факультетінің ғылыми семинарларында талқыланды.

Ғылыми жұмысты орындау барысында 20 ғылыми жұмыстар жазылды, оның ішінде 3 мақала Қазақстан Республикасы білім және ғылым министрлігінің білім және ғылым саласындағы бақылау комитетінің ұсынған журналдарында, 4 ғылыми мақала Scopus және Thomson Reuters базаларында индекстелінетін «Intelligent Information and Database Systems», «Advances in Intelligent Systems and Computing», «Actual Problems of Economics» және «Journal of Information Technology and Control» журналдарында, 13 халықаралық ғылыми–тәжірибелік конференциялар жинақтарында жарық көрді.

Қорғауға шығарылатын негізгі жағдайлар.

Экономикалық жүйеде жоспарлау және ұйымдастыру, сондай-ақ, экономикалық саясаттың өзгеру салдарынан болатын өтпелі процестерді зерттеу мақсатында экономика салаларын БАЖ үшін «Секторлар арасында еңбек және инвестиция ресурстарын тиімді үлестіруді модельдеу және жоспарлау» модулі өңделді және ондағы ақпаратты өңдеу процесінің объектісі ретінде экономиканың үш секторлы моделі қарастырылды. Яғни қорғауға келесі жағдайлар шығарылады:

1. Экономика салаларын БАЖ үшін «Секторлар арасында еңбек және инвестиция ресурстарын тиімді үлестіруді модельдеу және жоспарлау» модулін өңдеу;

2. Аталмыш модульде КҮСЭМ үшін синтездеуші басқаруды іздеу алгоритмдерін өңдеу. КҮСЭМ үшін ұсынылып отырған модульде келесі класс есепетерінің алгоритмдерін өңдеу:

- **Ақырлы уақыт** интервалында, **сызықты теңдеулер** жүйесімен және басқару параметрлері **шектеулерсіз** берілген КҮСЭМ үшін синтездеуші басқаруды іздеу алгоритмін өңдеу;
- **Ақырлы уақыт** интервалында, **сызықты теңдеулер** жүйесімен және басқару параметрлері **шектеулермен** берілген КҮСЭМ үшін синтездеуші басқаруды іздеу алгоритмін өңдеу;
- **Ақырлы уақыт** интервалында, **сызықты емес теңдеулер** жүйесімен және басқару параметрлері **шектеулермен** берілген КҮСЭМ үшін синтездеуші басқаруды іздеу алгоритмін өңдеу;
- **Шексіз уақыт** интервалында, **сызықты емес теңдеулер** жүйесімен және басқару мәндері **шектеулермен** берілген КҮСЭМ үшін тиімді тұрақтандыруды іздеу алгоритмін өңдеу.

1 КЛАСТЕРДІҢ ҮШ СЕКТОРЛЫ ЭКОНОМИКАЛЫҚ МОДЕЛІ

Бұл бөлімде секторлы экономикаға әдеби шолу жасалынып, қарапайым дифференциалдық және алгебралық теңдеулерімен берілген КҮСЭМ математикалық және құрылымдық модельдері қарастырылады және КҮСЭМ тұрақты тепе – теңдік күйін анықтау алгоритмі анықталады.

1.1 Секторлы экономика түсінігі

Жалпы алғанда экономиканың тұрақты, әрі теңдестірілген өсімін қаматамасыз етуде, оны секторларға бөліп қарастыру өте тиімді. Өндіріс үрдісіндегі барлық үдірістерді дәлме–дәл нақты сипаттайтын үлгі, ол – біріктірілген үш өнімі бар, секторларға бөлінген экономиканың үш секторлы моделі. Аталмыш модельдің базалық негізі ретінде Солоудың бір секторлы моделін айтуға болады. Солоу моделінде [1] экономикалық жүйе – қолдануға да, қаржылануға да болатын әмбебап бір өнімді өндіретін толық қанды бір жүйе түрінде қарастырылады. Бұл үлгі қолданушы мен жинақталған қордың арсындағы арақатынасты талдауға мүмкіндік береді. Келесі кезектегі экономиканың екі секторлы моделі К. Маркстың «Капитал» атты еңбегінде зерттелініп, тұжырымдалған. Бұл үлгі, біріктірілген екі (өндісі құрал–жабдықтары және тұтыну заттары) өнім мен екі сектордан тұрады. Бірінші бөлім – өндіріске қажетті құрал-жабдықтарды өндірсе, екінші бөлім – тұтыну заттарын өндіреді.

Үш секторлы модель – ұдайы өндірістегі экономиканың процесін нақты көрсетеді. Бұнда әр сектор өз өнімін: материалдық сектор ($i=0$) – еңбек заттарын өндіреді; еңбек жабдықтарымен қамтамасыз ететуші ($i=1$) – қор құрушы сектор; тұтынушы сектор ($i=2$) – тұтыну өнімдерін өндіреді. Үш секторлы үлгіде екі секторлы үлгінің бірінші секторы екіге бөліп қарастырылады, себебі, еңбек заттары бір өндірістік циклде қолданылса, еңбек жабдықтары бірнеше циклдерде қолданыста болады. Сонымен қатар, үш секторлы экономиканы зерттеуде аралық өнімді өндіру үдерісіндегі сектордың жұмыс істеруіне әсер ету мүмкіндктері пайда болады. Жалпы экономиканың үш секторлы моделі үшін тиімді тұратылық күйді анықтау есебін зерттеумен үш секторлы экономиканың ғылыми мектебінің негізін қалаушы, экономика ғылымдарының докторы, профессор В.А. Колемаев айналысады. Өз еңбектерінде Владимир Алексеевич экономиканың үш секторлы моделін экономиканың салаларына пайдаланады және зерттеп отырған жүйенің тұрақты күйін анықтауда еңбек ресурстарының үлестерін есептеуге мүмкіндік беретін Лагранж көбейткіштерінің классикалық әдісін қолданады[2, 3]. Сонымен қатар Sh. Zhou, M.Xue, A.A. Джусупова, М.Н. Калимолдаев, З.Н. Мурзабеков, Е.В. Малишевский, J.Sh. Zhang, O.Dumitru, D.Loretti, N.Mihaela, P.Sen, S. De [4-9] сынды авторлардың жұмыстарында экономикалық жүйенің тұрақты күйі анықталған және стохастикалық үш секторлы динамикалық моделдерді қолдана отырып экономикалық өсімнің әр түрлі аспектілеріне талдаулар жасалынған.

Отандық экономиканы дамытудағы ел басымыз Н.Ә. Назарбаев ұсынған «Қазақстан-2050» даму стратегиясын жүзеге асырудың басты құралы кластер

болатындығы айтылған. Сонымен қатар Қазақстан Республикасын индустриялық-инновациялық дамытудың 2015 – 2019 жылдарға арналған мемлекеттік бағдарламасы [10] аясында экономиканың тұрақты түде дамуын қамтамасыз ету және өңдеуші сектор кәсіпорындарының бәсекеге қабілеттілігін арттыру мақсатында да кластерлік әдіске ерекше көңіл бөлініп отыр. Мемлекет пен ұлттық экономикалық дамудың жаңа тәсілі болған «кластер» – ғылымда да, жете зерттеліну үстіндегі маңызды тақырыптардың біріне айналған. Бәсекеге қабілеттілікті арттырудың тиімді құралы саналатын кластерге деген қызығушылық XX ғасырда пайда болғанымен, кластерлік тәсіл бойынша жұмыс жүргізу XIX ғасырда жүгрізілген. Бұған дәйектеме ретінде неміс экономисті И.Тюненнің 1826 жылы жарық көрген «Ауыл шаруашылығына және ұлттық экономикаға байланысты оқшауланған мемлекет» атты мақаласын алуға болады [11]. Ол өндіріс технологиялары мен тасмалдау әдістері және өнімге деген сұранс көлемі мен номенклатурасын арттыруда өндірістің орналасқан орны маңызды рөл атқарады деген қорытындыға келген. Одан кейін, кластер идеясы 1890 жылы экономика ғылымындағы неоклассикалық бағыттың негізін қалаушылардың бірі, ағылшын экономисті Альфред Маршаллдың [12] еңбегінде жарық көрді. Ол ұлттық экономиканың табысын бірнеше мамандандырылған ұйымдардың концентрациясының дамуымен байланыстырды.

Негізінде кластерлік теорияның дамуына ең көп үлес қосқан М.Э.Портер [13] болды. 1990 жылы экономикалық әдебиетке «кластер» түсінігін енгізген ол, кластер терминіне келесідей анықтама береді: кластер – бұл, бір–бірімен байланыстағы ұйымдар (оқу орындары, мемлекеттік басқару органдары, инфрақұрылымдық компаниялар) және географиялық белгілері бойынша бір жерде шоғырланып бір–бірімен белгілі бір салада әрекеттесіп, байланысқан копманиялардың (жабдықтаушылар, өндірушілер және т.б.) тобы. Майклдың пікіріне сүйенсек, кластер идеясы, ұлттық және мемлекеттік экономикасын дамытудың жаңа әдісін ұсынады, сонымен қатар, бәсекелестік қабілетін арттыруға ұмтылған ұйымдармен, компаниялармен және үкіметтің өзара байланыстарындағы жаңа рольдерін анықтайды.

Аймақтық кластерлердің концепциясы негізінде өндірушінің бәсекеге қабілеттілігін арттыруды жете зерттеп жазған M.J. Enright алғашқылардың бірі болып «аймақтық кластер» түсінігін енгізді [14]. M. Fujita, P. Krugman A.Venables [15] географиялық концентрацияның өндірістке жағымды әсер ету фактісін математикалық дәлелдеді. Оның теориясына сәйкес, кәсіпкерлер өндірісті өтім нарығының жанынан және негізгі жеткізушілердің жанында орналастыруға тырысады. Бұл өндірістің шоғырлануына әкеледі. Шоғырлану, өз кезегінде, жаңа өндірушілерді тартады. Сондай-ақ, жоғарыда атап өткендей, экономикалық кластерлердің құрылымын, олардың құрылу ерекшеліктері мен дамуын зерттеу және талдау жасаған шетелдік ғалымдардың қатарына ауылшаруашылығы секторларындағы шаруашылық субъектілерін басқарудың инновациялық және өндірістік тәсілі жайлы жазған S.N Butorin және A.V. Bogoviz [16] қосуға болады. Өз еңбектерінде олар, аграрлық сектордың

шаруашылық субъектілерін ауылшаруашылық кластерін қалыптастыру шеңберінде инновациялық және өндірістік басқаруды ұйымдастырудың моделын ұсынып, басқару жүйесінің тиімділігін бағалау әдістемесін әзірлеген. Р.Т. Сиразетдинов және басқалары [17, 18] жұмыстарында процестік тәсіл негізінде экономикалық немесе басқа да кластерлерді анықтауға және зерттеуге мүмкіндік беретін кластерлік экономиканың әмбебап құрылымдық моделі құрылып, осындай моделіді тұрғызудың алгортимі ұсынылады. Кластер мүшелерінің географиялық орналасу қашықтықтарының өнім нәтижесіне беретін әсерін зерттеп, тиімді өнім алу мақсатында олардың ара-қашықтығы периметрін анықтауға бағытталған және біртекті мәліметтерді кластерлеудің тиімді алгоритмін құрған J.M. Mulvey, H.P. Crowder [19] зерттеулерінде төменгі шекараларды анықтаудың субградиентальды әдісі мен жоғарғы шекараларды анықтаудың қарапайым іздеу тәртібін ұсынады.

Экономикалық кластерлердің құрылымын, олардың құрылу ерекшеліктері мен дамуын зерттеу және талдау жасауда шетелдік ғалымдардың еңбектерінде көптеп кездеседі. Атап айтсақ кластерлік экономиканың қалыптасуының талдау моделі L.Chincarini мен N.Asherie [20] мақалаларында зерттелінсе, аймақтағы слалық кластерлерді дамыту T.F. Slaper, K.M. Harmon, B.M. Rubin [21] мен инновациалық кластерлерді құру және оның ерекшеліктері жайлы E.A. Rodionova және басқалары [22] қарастырған. IT секторында кластерлік саясатты қалыптастыру жене оның ерекшеліктері жайлы N.V. Golikova және басқалары [23] жазған.

Еліміздегі әртүрлі саладағы кластерлердің құрылымы мен дамуы G. Azhimetova [24], H.C. Eitzen [25], IT саласындағы кластер A.A. Kireyeva, D.S Mussabalina, B.S. Tolysbaev [26] мен туристік кластерлер A.Niyazbayeva, S.Baizakov, A.Maydirova [27], экономикалық кластер [28] еңбектерінде жазылған. Өз еңбектерінде А.А. Ашимов және басқалары [29] экономиканы параметрлік басқарудың теориясын зерттеп, оны өндірістік кластерлерді ынталандыруда қолдануды ұсынады.

Тиімді басқару теориясының экономикалық жүйелер үшін қолданылуы [30-32] жұмыстарда қарстырылған. Соның ішінде, экономикалық өсуде әртүрлі секторлы модельдерді қарастырған А.В. Федосеев және С.М. Асеев. А.В. Федосеев [33] Понтрягиннің максимум қағидасын қолданып, жұмыспен толық қамтылудағы фон-Нейманның теңдестірілген өсімін беретін соңғы күйге жылдам жету мақсатында экономиканың үш секторлы моделіндегі ТБЕ қарастырған. Ал, С.М. Асеев және басқалары [34] еңбегі қорларды тиімді үлестірудің динамикалық модельдерін зерттеуде шексіз уақыт аралығындағы экономикада кездесетін есептің бір класы үшін тиімді басқару теориясына арналған. Есеп ретінде бағаның кездейсоқ ауытқуымен берілген тиімді экономикалық өсудің екі секторлы моделі қарастырылып, қойылған есепті шешуде Понтрягиннің максимум қағидасын қолданған.

1.2 КҮСЭМ-нің математикалық және құрылымдық модельдері

Экономикалық құбылыстарды зерттеуде және шешімдер қабылдауда математикалық модельдеудің алатын орны ерекше. Математикалық модель –

теория тұрғысынан ұсынылған ғылыми гипотезаларды немесе ұсынылған экономиканың даму бағытын тексерудің құралы болып табылады. Сондықтан ұзақ уақыттық бағдарламалар мен өсу факторларын зерттеуде, макроэкономикалық шешімдер нұсқаларының салдарларын бағалауда сызықты емес секторлы модельдер қарастырылады. Бұндай модельдерде экономиканың құрылымы өзінің агрегатталған өнімін өндіретін секторларға бөлініп қарастырылады. Өндіріс үрдісіндегі барлық үдірістерді дәлме–дәл нақты сипаттайтын үлгі, ол – біріктірілген үш өнімі бар, секторларға бөлінген экономиканың үш секторлы моделі.

Аталмыш модель – ұдайы өндірістегі экономиканың процесін нақты көрсетеді. Бұнда әр сектор өз өнімін: материалдық сектор ($i=0$)–еңбек заттарын өндіреді (яғни, өндіруші өнеркәсіп, электроэнергетика, металлургия, химия және мұнай-химия өнеркәсібі, ауылшаруашылық және теңіз өнімдерін өндіру, орман және құрлыс заттары өнеркәсібтері, қызметтік байланыс, өндіріс құрал-жабдығымен жасалатын көтерме сауда, жүк көліктері); еңбек жабдықтарымен қамтамасыз ететуші ($i=1$)–қор құрушы сектор (яғни, металл өңдеу және машина жасау, өнеркәсіптік құрлыс); тұтынушы сектор ($i=2$)–тұтыну өнімдерін өндіреді (яғни, жеңіл және тамақ өнеркәсібі, ағаш өңдеу, тұрмыстық химия, азаматтық құрлыс, жолаушылар тасымалы, азаматтық байланыс, тұтыну заттарының саудасы, қару-жарақ өндірісі). Тағы бір айта кетерлік жайт, секторлар кез-келген көлемдегі өнімді шығармайды, тек өзге секторлар мен қолданушыларға қажетті өнімді, қолда бар ресурстар жеткенше ғана көлемде өндіреді.

Үш секторлы экономиканың ғылыми мектебінің негізін қалаушы, экономика ғылымдарының докторы, профессор В.А. Колемаевты айтуға болады. Ол экономиканың үш секторлы моделі үшін тиімді тұратылық күйді анықтау есебін зерттеумен айналысады. Өз еңбектерінде [3, 15 б.] Владимир Алексеевич экономиканың үш секторлы моделін экономиканың салаларына пайдаланады және зерттеп отырған жүйенің тұрақты күйін анықтауда еңбек ресурстарының үлестерін есептеуге мүмкіндік беретін Лагранж көбейткіштерінің классикалық әдісін қолданады.

В.А. Колемаев еңбегінде “Экономиканы дәл «үш» секторға бөліп қарастыру өте тиімді, себебі, экономикалық құбылыстар өзара тәуелділік байланыста болғандықтан, көп жағдайда бұндай модельдер сызықты емес түрде беріледі, яғни осындай сызықты емес модельдерде секторлар саны ұлғайған сайын, оны аналитикалық шешудің күрделілігі геометриялық прогрессия түрінде өсіп отырады, бұл өз кезегінде тек шешу жолын күрделендіреді, ал алынған нәтижеде айтарлықтай өзгерістер болмайды” – деп пікір білдірген [2, 4 б.]. Яғни, экономиканың ұзақ уақыттық үдерістері мен факторларының өсуін зерттеуде, сонымен қатар макроэкономикалық шешімдердің бірнеше нұсқаларының салдарын бағалауда сызықты емес үш секторлы моделді қолдану тиімді. Сектор санының аздығы, олардағы өнімдердің ресурстардан сызықты емес тәуелділікте болған жағдайда экономиканың дамуын аналитикалық түрде көрсетуге мүмкіндік береді.

Жалпы үш секторлы үлгіде екі секторлы үлгінің бірінші секторы екіге бөліп қарастырылады, себебі, еңбек заттары бір өндірістік циклде қолданылса, еңбек жабдықтары бірнеше циклдерде қолданыста болады. Сонымен қатар, үш секторлы экономиканы зерттеуде аралық өнімді өндіру үдерісіндегі сектордың жұмыс істеруіне әсер ету мүмкіндктері пайда болады.

Экономиканың үш секторлы моделінің математикалық моделін қарастырмас бұрын төмендегі жағдайларды ескеріп өткен жөн:

1. Модельде күрделі жұмсалымның кешіктірілуі қарастырылмайды;

2. Уақыт t – үздіксіз өзгеріп отырады;

3. Экономиканы тұйықталған деп қарастырамыз, яғни сыртқы орта әсері ескерілмейді.

Аталмыш модельдің математикалық моделіне келетін болсақ, ол абсолютті көрсеткіштермен беріледі және келесі түрде болады.

Әрбір i – ші сектордың өнімді шығаруы Кобб – Дугластың өндірістік функциясымен сипатталады [35-37]:

$$X_i = F_i(K_i, L_i) = A_i K_i^{\alpha_i} L_i^{1-\alpha_i}, \quad (i = 0, 1, 2), \tag{1.2.1}$$

бұндағы

X_i – шығарылған өнімнің көлемі;

K_i – негізгі өндірістік қор көлемі;

L_i – еңбек ресурстарының көлемі;

A_i – ғылыми–техникалық прогрестің бейтараптық коэффициенті;

α_i – қорлардың икемділік коэфициенті (егер қор 1% өсетін болса, өнімнің қанша пайыз өсетінін көрсетеді);

$(1-\alpha_i)$ –еңбек ресурсының икемділік коэфициенті (егер еңбек ресурсы 1% өсетін болса, өнімнің қанша пайыз өсетінін көрсетеді).

$F_i(K_i, L_i)$ функциясын (1.2.1) түрінде таңдау өндірістік функцияның біртекті сызықтық қасиетінің орындалуын камтамасыз етеді: $F_i(\lambda K_i, \lambda L_i) = \lambda F_i(K_i, L_i)$, $\forall \lambda > 0$, яғни өндіру масштабының λ шамаға өзгеруі шығарылатын өнімнің де λ шамаға пропорционалды өзгеруіне әкеледі.

Әр сектордың өзіндік негізгі өндірістік қорының барын ескерсек, i – ші сектордағы негізгі өндірістік қордың Δt аралығында өзгеруі инвестицияның (I_i) қаржылық салымына байланысты өсуі мен тозуынан $(-\mu_i K_i)$ тұрады, яғни:

$$K_i(t+\Delta t) - K_i(t) = \left[-\mu_i K_i(t) + I_i(t)\right]\Delta t, \quad i = 0, 1, 2, \tag{1.2.2}$$

$\Delta t \to 0$ жағдайда секторлардың негізгі өндірістік қоры үшін келесі түрдегі дифференциалдық теңдеулерді аламыз, яғни секторлар бойынша қорлар динамикасы:

$$\frac{dK_i}{dt} = -\mu_i K_i + I_i, \; K_i(0) = K_i^0, \quad i = 0, 1, 2. \tag{1.2.3}$$

μ_i – амортизация коэффициенті, яғни 1 жылда өндіріс процесінен шығып қалған негізгі өндірістік қордың үлестерін көретететін тұрақты коэффициент.

Баланыстық қатынастардың төмендегідей жазуы орынды:

$$X_1 = I_0 + I_1 + I_2, \tag{1.2.4}$$

$$L = L_0 + L_1 + L_2, \tag{1.2.5}$$

$$X_0 = \beta_0 X_0 + \beta_1 X_1 + \beta_2 X_2, \tag{1.2.6}$$

Бұнда:

$L = L^0 e^{\nu t}$ – еңбек ресурстарының жалпы саны (L^0 –бастапқы уақыттағы $t = 0$ еңбек ресурстары; ν – еңбек ресурстарының жыл сайынғы өсу қарқыны);

$\beta_i - i$-ші сектордағы $(i = 0, 1, 2)$ өнім бірлігін шығаруға жұмсалған тікелей материалдық шығындар және ол тұрақты коэффициент.

- (1.2.4) қатынас қор құрушы сектордың $(i = 1)$ өнімдерін экономиканың секторларына инвестиция түрінде үлестіруін көрсетеді;
- (1.2.5) қатынас экономика секторларына еңбек ресурстарының жалпы саны L-дың үлестіруін көрсетеді;
- (1.2.6) қатынас экономика секторларындағы еңбек заттарының қолданысын көрсетеді.

Сипатталған ұйғарымдарға қарап, абсолютті көрсеткіштермен берілген экономиканың үш секторлы моделін сызба түрінде келесідей көрсетуге болады (1.2.1–сурет). Бұл модельде басқару секторлар арасында еңбек және инвестиция ресурстарын үлестіру арқылы жүзеге асырылады.

Есептеу барысында параметрлерді анықтау үшін оларды салыстырмалы көрсеткіштермен сипаттаған ыңғайлы. Сол себепті қарастырып отырған модельге келесідей белгілеулер енгіземіз:

$\theta_i = L_i / L$ – еңбек ресурстарын бөлгендегі секторлардың үлестері;

$s_i = I_i / X_1$ – инвестициялық ресурстарды бөлгендегі секторлардың үлестері;

$k_i = K_i / L_i$ – секторлардың қормен жарақтандырылуы;

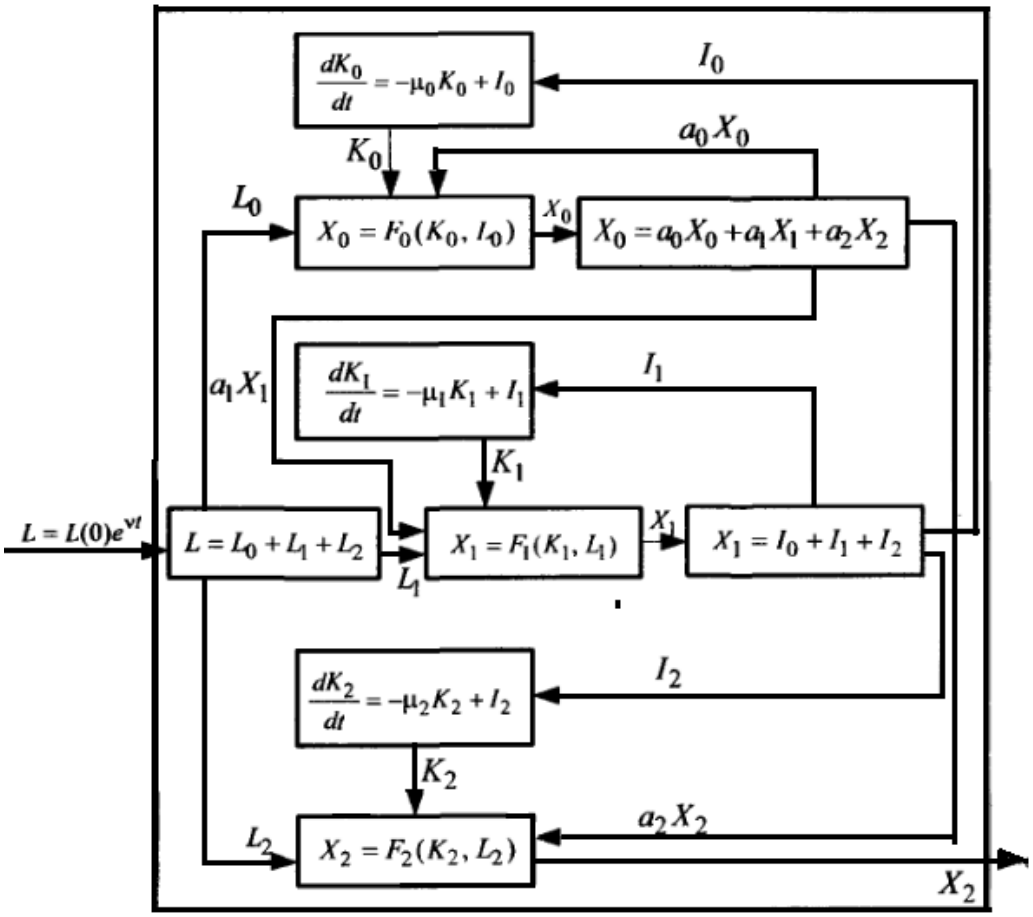
$f_i(k_i) = X_i / L_i = A_i k_i^{\alpha_i} - i$ –ші сектордағы еңбек өнімділігі;

$x_i = \theta_i f_i(k_i)$ – секторлардың меншікті өнімдері;

$\lambda_i = \mu_i + \nu -$ i – ші сектордың қормен жарақтандырылуының тозу коэффициеті;

μ_i – бір жылда шығып қалған негізгі өндірістік қордың үлесі;

ν – жұмыспен қамтылғандар санының жылдық өсу қарқыны.



1.2.1–Сурет. Үш секторлы экономиканың құрылымдық моделі

Осы белгілеулерді қолданып КҮСЭМ үшін салыстырмалы көрсеткіштермен берілген дифференциалдық және алгебралық теңдеулерден тұратын жүйені құруға болады:

$$\dot{k}_i(t) = -\lambda_i k_i(t) + (s_i(t)/\theta_i(t))x_1, \quad k_i(0) = k_i^0, \quad \lambda_i > 0, \quad (i = 0, 1, 2), \tag{1.2.7}$$

$$x_i = \theta_i(t) A_i \left(k_i(t)\right)^{\alpha_i}, \quad A_i > 0, \quad 0 < \alpha_i < 1, \quad (i = 0, 1, 2), \tag{1.2.8}$$

және үш баланыстық ара-қатынасты құруға болады:

инвестициялық баланс: $s_0(t) + s_1(t) + s_2(t) = 1, \quad s_0(t) \geq 0, \quad s_1(t) \geq 0, \quad s_2(t) \geq 0,$ (1.2.9)

еңбек балансы: $\theta_0(t) + \theta_1(t) + \theta_2(t) = 1, \quad \theta_0(t) \geq 0, \quad \theta_1(t) \geq 0, \quad \theta_2(t) \geq 0,$ (1.2.10)

материалдық баланс: $(1 - \beta_0)x_0 = \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2, \quad 0 < \beta_i < 1, \quad i = 0, 1, 2.$ (1.2.11)

Жүйенің күйі (k_0, k_1, k_2) векторларымен сипатталады, ал $(s_0, s_1, s_2, \theta_0, \theta_1, \theta_2)$ – басқару векторлары.

Жүйенің бастапқы күйі (k_0^0, k_1^0, k_2^0) тең, бұндағы $k_i^0 = k_i(0)$ бастапқы уақыттағы $(t = 0)$ i-ші сектордың қормен жарақтандырылуы. Қандайда бір уақыт моментіне дейінгі құрылымдық саясаттың нәтижесі. Яғни, жаңа құрылымдық

саясатты таңдау, диссертациялық жұмыстың зерттеу пәніне сай, экономикалық жүйелерде өтпелі кезеңдердің қалыптасуына әкеледі.

Диссертациялық жұмыстың келесі бөлімдерінде, осы, яғни, салыстырмалы көрсеткіштермен берілген (1.2.7) – (1.2.11) теңдеулерімен сипатталған КҮСЭМ қарастырылады.

1.3 КҮСЭМ-нің тұрақты тепе-теңдік күйін анықтау алгоритмі

Қарастырылып отырған КҮСЭМ математикалық моделі экономикалық саясаттың өтпелі процестерінің соңында тұрақтылық күйге келеді. Теориялық тұрғыдан қарағанда экономикалық саясаттағы өтпелі кезеңдер шексіз жалғаса береді, бірақ практика тұрғысынан қарағанда салыстырмалы аз уақыт аралығында экономикалық жүйе жүргізіліп отырған саясаттың анықтаған тұрақтылық күйінің маңында болады.

КҮСЭМ тұрақтылық күйін анықтау барысында секторлардың қормен жарақтандырылуы уақыт бойынша өзгермейді. Яғни, (1.2.7) теңдеумен берілген секторларды қормен жарақтандырылуының өзгеру жылдамдығы нөлге тең. Олай болса, (1.2.7) теңдеумен берілген жүйеден, келесі түрдегі сызықты емес жүйені аламыз:

$$-\lambda_0 k_0 + \frac{s_0}{\theta_0}\theta_1 A_1 k_1^{\alpha_1} = 0, \tag{1.3.1}$$

$$-\lambda_1 k_1 + s_1 A_1 k_1^{\alpha_1} = 0, \tag{1.3.2}$$

$$-\lambda_2 k_2 + \frac{s_2}{\theta_2}\theta_1 A_1 k_1^{\alpha_1} = 0. \tag{1.3.3}$$

(1.3.1) – (1.3.3) теңдеулер жүйесінен стационарлық нүктелер келесідей түрде табылады:

$$k_1^s = \left(\frac{s_1 A_1}{\lambda_1}\right)^{\frac{1}{1-\alpha_1}}, \quad k_0^s = \frac{s_0\theta_1}{\lambda_0\theta_0} A_1 \left(k_1^s\right)^{\alpha_1}, \quad k_2^s = \frac{s_2\theta_1}{\lambda_2\theta_2} A_1 \left(k_1^s\right)^{\alpha_1}. \tag{1.3.4}$$

Ары қарай КҮСЭМ тиімді тұрақты тепе–теңдік күйін іздеу алгоритмін қарастырайық. Есептің қойылымы бойынша $k^s = \left(k_0^s,\, k_1^s,\, k_2^s\right)$ тепе-теңдік жағдайында тұтыну затының меншікті өнімінің $\left(x_2 = \theta_2 A_2 k_2^{\alpha_2}\right)$ максимум мәнін беретін s_i мен θ_i $\left(i = 0,1,2\right)$ басқарушы параметрлерінің мәндерін табу керек.

Әр сектордың өзіне бекітілген негізгі өндіріс қорлары бар және еңбек пен инвестиция ресурстары секторлар арасында еркін ауысып жүреді.

Технологиялық құрылым тұрақты және ол өндіріс нәтижесінің ресурстар шығынынан тәуелділігін көрсететін неоклассикалық біртекті-сызықты (2.2.1) Кобб-Дугластың өндірістік функция түрінде берілген [35-37].

Яғни тұтыну затының меншікті өнімін максимумдайтын сызықты емес бағдарламалау есебін қарастырамыз:

$$x_2(\theta,\ s) \to \max \tag{1.3.5}$$

Бұл функция үш баланыстық ара-қатынастарды қанағаттандыруы керек:

инвестициялық баланс: $s_0 + s_1 + s_2 = 1, \quad s_0 \geq 0, \quad s_1 \geq 0, \quad s_2 \geq 0,$ (1.3.6)

еңбек балансы: $\theta_0 + \theta_1 + \theta_2 = 1, \quad \theta_0 \geq 0, \quad \theta_1 \geq 0, \quad \theta_2 \geq 0,$ (1.3.7)

материалдық баланс: $(1-\beta_0)x_0 = \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2, \quad \beta_0 \geq 0, \quad \beta_1 \geq 0, \quad \beta_2 \geq 0.$ (1.3.8)

және (2.2.7) тепе-теңдік күйі үшін (1.3.1)-(1.3.3) қатнастардың орындалуын қамтамасыз ету керек.

Қойылған есепті шешу үшін арнайы түрдегі Лагранж көбейткіштерін қолданып, келесі түрдегі Лагранж функциясын аламыз [38]:

$$\begin{aligned} L(\theta_i, s_i, k_i, c_j) = -\theta_2 A_2 k_2^{\alpha_2} + c_1(\theta_0 + \theta_1 + \theta_2 - 1) + c_2(s_0 + s_1 + s_2 - 1) + \\ + c_3((1-\beta_0)\theta_0 A_0 k_0^{\alpha_0} - \beta_1 \theta_1 A_1 k_1^{\alpha_1} - \beta_2 \theta_2 A_2 k_2^{\alpha_2}) + \\ + c_4 k_0(-\lambda_0 k_0 + \frac{s_0}{\theta_0}\theta_1 A_1 k_1^{\alpha_1}) + c_5 k_1(-\lambda_1 k_1 + s_1 A_1 k_1^{\alpha_1}) + c_6 k_2(-\lambda_2 k_2 + \frac{s_2}{\theta_2}\theta_1 A_1 k_1^{\alpha_1}), \end{aligned} \tag{1.3.9}$$

бұндағы c_j $(j = \overline{1, 6})$ –Лагранж көбейткіштері.

$L(\theta_i, s_i, k_i, c_j)$ функциясын экстремумға зерттеу үшін экстремумнің бірінші ретті қажетті шартын қолданамыз:

$$\frac{\partial L(\theta_i, s_i, k_i, c_j)}{\partial \theta_0} = c_1 + c_3(1-\beta_0)A_0 k_0^{\alpha_0} - c_4 \frac{s_0 \theta_1}{\theta_0^{\ 2}} A_1 k_1^{\alpha_1} k_0 = 0; \tag{1.3.10}$$

$$\frac{\partial L(\theta_i, s_i, k_i, c_j)}{\partial \theta_1} = c_1 - c_3 \beta_1 A_1 k_1^{\alpha_1} + c_4 \frac{s_0}{\theta_0} A_1 k_1^{\alpha_1} k_0 + c_6 \frac{s_2}{\theta_2} A_1 k_1^{\alpha_1} k_2 = 0; \tag{1.3.11}$$

$$\frac{\partial L(\theta_i, s_i, k_i, c_j)}{\partial \theta_2} = c_1 - c_3 \beta_2 A_2 k_2^{\alpha_2} - c_6 \frac{s_2 \theta_1}{\theta_2^{\ 2}} A_1 k_1^{\alpha_1} k_2 - A_2 k_2^{\alpha_2} = 0; \tag{1.3.12}$$

$$\frac{\partial L(\theta_i, s_i, k_i, c_j)}{\partial s_0} = c_2 + c_4 \frac{\theta_1}{\theta_0} A_1 k_1^{\alpha_1} k_0 = 0; \tag{1.3.13}$$

$$\frac{\partial L(\theta_i, s_i, k_i, c_j)}{\partial s_1} = c_2 + c_5 A_1 k_1^{\alpha_1 + 1} = 0; \tag{1.3.14}$$

$$\frac{\partial L(\theta_i, s_i, k_i, c_j)}{\partial s_2} = c_2 + c_6 \frac{\theta_1}{\theta_2} A_1 k_1^{\alpha_1} k_2 = 0; \tag{1.3.15}$$

$$\frac{\partial L(\theta_i, s_i, k_i, c_j)}{\partial k_0} = c_3 \alpha_0 (1-\beta_0)\theta_0 A_0 k_0^{\alpha_0 - 1} + c_4 \left(-\lambda_0 k_0 + \frac{s_0}{\theta_0}\theta_1 A_1 k_1^{\alpha_1} \right) - c_4 \lambda_0 k_0 = 0; \tag{1.3.16}$$

$$\frac{\partial L(\theta_i, s_i, k_i, c_j)}{\partial k_1} = -c_3\beta_1\theta_1 A_1 k_1^{\alpha_1-1} + c_4\frac{s_0\theta_1}{\theta_0}A_1 k_1^{\alpha_1-1}k_0 + \frac{c_5}{\alpha_1}\left(-\lambda_1 k_1 + s_1 A_1 k_1^{\alpha_1}\right) + \\ + \frac{c_5}{\alpha_1}k_1\left(-\lambda_1 + \alpha_1 s_1 A_1 k_1^{\alpha_1-1}\right) + c_6\frac{s_2\theta_1}{\theta_2}A_1 k_1^{\alpha_1-1}k_2 = 0; \quad (1.3.17)$$

$$\frac{\partial L(\theta_i, s_i, k_i, c_j)}{\partial k_2} = -\theta_2 A_2 k_2^{\alpha_2-1} - c_3\beta_2\theta_2 A_2 k_2^{\alpha_2-1} + \frac{c_6}{\alpha_2}\left(-\lambda_2 k_2 + \frac{s_2\theta_1}{\theta_2}A_1 k_1^{\alpha_1}\right) - \frac{c_6}{\alpha_2}\lambda_2 k_2 = 0. \quad (1.3.18)$$

Нәтижесінде он бес белгісіз параметрмен берілген, он бес теңдеулерден тұратын сызықты емес жүйені алдық: оның үшеуі (1.3.6)-(1.3.8) баланстық ара-қатынастар теңдеуі, тағы үшеуі тепе-теңдік күйінің теңдеулері (1.3.1)-(1.3.3) және қалған тоғызы Лагранж функциясы үшін қажеттілік шартынан алынған теңдеулер (1.3.10)-(1.3.18).

Осы жүйеден алгебралық түрлендірулер жасау арқылы $\theta_i, s_i\ (i=0,1,2)$ басқару параметрлерінің тұрақты күйінің мәндерін, $k_i, i=0,1,2$ меншікті өнімнің мәндерін және $c_j \neq 0, j=\overline{1,6}$ Лагранж көбейткіштерінің мәндерін табамыз.

Есептің шешімін жеңілдету үшін (1.3.10)–(1.3.12) теңдеулеріндегі $c_3(1-\beta_0)\theta_0 A_0 k_0^{\alpha_0}$, $c_3\beta_1\theta_1 A_1 k_1^{\alpha_1}$ және $c_3\beta_2\theta_2 A_2 k_2^{\alpha_2}$ орнына тепе-теңдік күйінің теңдеулері (1.3.1)-(1.3.3) пен (1.3.16)–(1.3.18) теңдеулерінен түрлендіру арқылы алынған $\frac{c_4}{\alpha_0}\lambda_0 k_0$, $c_4\lambda_0 k_0 - \left(\frac{1-\alpha_1}{\alpha_1}\right)c_5\lambda_1 k_1 + c_6\lambda_2 k_2$ және $-\theta_2 A_2 k_2^{\alpha_2} - \frac{c_6}{\alpha_2}\lambda_2 k_2$ мәндерін сайкесінше қоямыз. Ары қарай, осы белгілеулерді қолдана отырып (1.3.10)-(1.3.12) теңдеулерін θ_i еңбек ресурстарына байланысты, ал (1.3.13)-(1.3.15) теңдеулерді s_i инвестициялық ресурстарға байланысты шешеміз, нәтижесінде.

$$\theta_i = -\left(\frac{1-\alpha_i}{\alpha_i}\right)\left(\frac{c_{i+4}}{c_1}\right)\lambda_i k_i^2, \quad i=0,1,2, \quad (1.3.19)$$

$$s_i = -\left(\frac{c_{i+4}}{c_2}\right)\lambda_i k_i^2, \quad i=0,1,2. \quad (1.3.20)$$

Тиімді даму барысында басқарушы параметрлер θ_i, s_i арасында теңдік ара-қатынасы орындалуын ескерсек, яғни алынған $\theta_i, s_i\ (i=0,1,2)$ басқару параметрлерінің өрнектерін $\frac{s_0\theta_1}{\theta_0 s_1}$ және $\frac{s_2\theta_1}{\theta_2 s_1}$ ара-қатынастарына қойсақ:

$$\frac{1-\alpha_0}{\alpha_0}\frac{s_0}{\theta_0} = \frac{1-\alpha_1}{\alpha_1}\frac{s_1}{\theta_1} = \frac{1-\alpha_2}{\alpha_2}\frac{s_2}{\theta_2}. \quad (1.3.21)$$

Есепті шешудің В.А. Колемаев ұсынған әдісіне сәйкес, секторлар арасындағы ресурстардың үлестірімі арасында теңдік ара-қатынасы орындалуы керек [3, 34 б.]:

$$\frac{s_0\theta_1}{s_1\theta_0}=\frac{\alpha_0(1-\alpha_1)}{\alpha_1(1-\alpha_0)}; \tag{1.3.22}$$

$$\frac{s_0\theta_2}{s_2\theta_0}=\frac{\alpha_0(1-\alpha_2)}{\alpha_2(1-\alpha_0)}; \tag{1.3.23}$$

$$\frac{s_2\theta_1}{s_1\theta_2}=\frac{\alpha_2(1-\alpha_1)}{\alpha_1(1-\alpha_2)}. \tag{1.3.24}$$

Кластердің тиімді тұрақтылық күйін табу алгоритімі төмендегі (1.3.25) теңдеуден s_1 басқарушы параметрінің мәнін табудан басталады:

$$\varphi(s_1)=s_1\left((1-\alpha_0)(1-\beta_0)A_0{\gamma_0}^{\alpha_0}+(1-\alpha_1)\beta_1A_1{\gamma_1}^{\alpha_1}s_1^{\frac{\alpha_1-\alpha_0}{1-\alpha_1}}\right)-\alpha_1(1-\alpha_0)(1-\beta_0)A_0{\gamma_0}^{\alpha_0}=0, \tag{1.3.25}$$

бұндағы s_1 айнымалысының мәні 0 мен 1 аралығында болады ($\phi(s_1)$ функциясының графигі 1.3.1-суретте көрсетілген), ал γ_i $(i=0,1,2)$ келесі мәндерді береді:

$$\gamma_0=\frac{\alpha_0(1-\alpha_1)}{\alpha_1(1-\alpha_0)}\frac{A_1^{\frac{1}{1-\alpha_1}}}{\lambda_0\lambda_1^{\frac{\alpha_1}{1-\alpha_1}}},\quad \gamma_1=\left(\frac{A_1}{\lambda_1}\right)^{\frac{1}{1-\alpha_1}},\quad \gamma_2=\frac{\alpha_2(1-\alpha_1)}{\alpha_1(1-\alpha_2)}\frac{A_1^{\frac{1}{1-\alpha_1}}}{\lambda_1^{\frac{\alpha_1}{1-\alpha_1}}\lambda_2}. \tag{1.3.26}$$

(1.3.25) теңдеуінен алынған s_1 параметрінің мәнін қолданып белгісіз айнымалыларды табамыз [39]:

$$k_0=\left(\frac{s_0\theta_1}{s_1\theta_0}\right)\frac{A_1^{\frac{1}{1-\alpha_1}}}{\lambda_0\lambda_1^{\frac{\alpha_1}{1-\alpha_1}}}s_1^{\frac{1}{1-\alpha_1}}; \tag{1.3.27}$$

$$k_1=\left(\frac{A_1}{\lambda_1}\right)^{\frac{1}{1-\alpha_1}}s_1^{\frac{1}{1-\alpha_1}}; \tag{1.3.28}$$

$$k_2=\left(\frac{s_2\theta_1}{s_1\theta_2}\right)\frac{A_1^{\frac{1}{1-\alpha_1}}}{\lambda_1^{\frac{\alpha_1}{1-\alpha_1}}\lambda_2}s_1^{\frac{1}{1-\alpha_1}}; \tag{1.3.29}$$

$$c_3=-\frac{(1-\alpha_2)A_2{k_2}^{\alpha_2}}{(1-\alpha_0)(1-\beta_0)A_0{k_0}^{\alpha_0}+(1-\alpha_2)\beta_2A_2{k_2}^{\alpha_2}}; \tag{1.3.30}$$

$$c_1=(1-\alpha_2)(1+\beta_2c_3)A_2k_2^{\alpha_2}; \tag{1.3.31}$$

$$c_2=\frac{c_1((\alpha_2-\alpha_0)\beta_2c_3+\alpha_2)(c_1-(1-\alpha_1)\beta_1A_1k_1^{\alpha_1}c_3)}{(1-\alpha_1)\left(c_1-(1-\alpha_0)\beta_1A_1k_1^{\alpha_1}c_3\right)}; \tag{1.3.32}$$

$$c_4=\frac{\alpha_0c_1c_3\left(\beta_2c_1-\beta_1A_1k_1^{\alpha_1}\left((1-\alpha_2)\beta_2c_3-\alpha_2\right)\right)}{\lambda_0{k_0}^2\left(c_1-(1-\alpha_0)\beta_1A_1k_1^{\alpha_1}c_3\right)}; \tag{1.3.33}$$

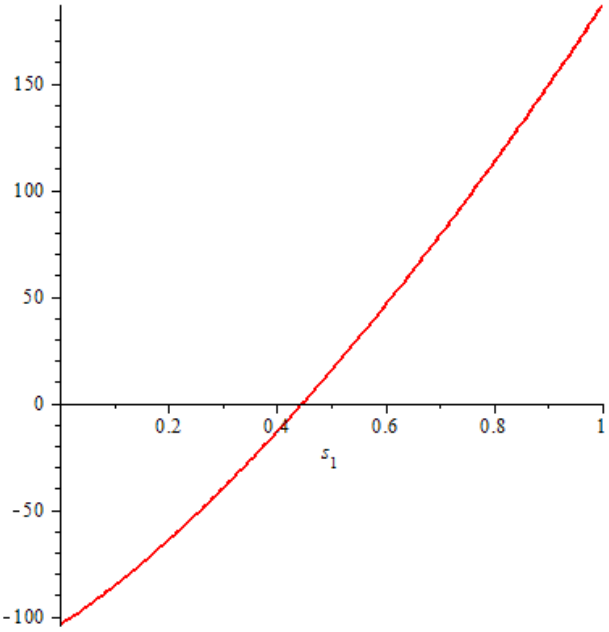
$$c_5 = -\frac{\alpha_1 c_1^{\,2}\left((\alpha_2-\alpha_0)\beta_2 c_3+\alpha_2\right)}{(1-\alpha_1)\lambda_1 k_1^{\,2}\left(c_1-(1-\alpha_0)\beta_1 A_1 k_1^{\alpha_1} c_3\right)}; \tag{1.3.34}$$

$$c_6 = -\frac{\alpha_2 c_1\left(1+c_3\beta_2\right)}{\lambda_2 k_2^{\,2}}; \tag{1.3.35}$$

$$\theta_0 = -\left(\frac{1-\alpha_i}{\alpha_i}\right)\left(\frac{c_{i+4}}{c_1}\right)\lambda_i k_i^{\,2}, \quad i=0,\,1,\,2; \tag{1.3.36}$$

$$s_0 = -\left(\frac{c_4}{c_2}\right)\lambda_0 k_0^{\,2}; \tag{1.3.37}$$

$$s_2 = -\left(\frac{c_6}{c_2}\right)\lambda_2 k_2^{\,2}. \tag{1.3.38}$$



1.3.1 – Сурет. $\varphi(s_1)$ функциясының графигі

Тиімді тұрақтылық күйді анықтау үшін табылған сызықтық емес бағдарламалау есебінің бұл шешімі, КҮСЭМ-дегі траектория ұштары бекітілген ТБЕ шешудің алғашқы кезеңі болып табылады.

КҮСЭМ еңбек ресурстарының үлестірілімі тұрақты болғанда инвестиция мен материалдық секторлар күйінің өзгерісі, тұтыну заттарының меншікті өнімі максимум мәніне жететін теңдестірілген тұрақты күйдің бар екендігін көрсетеді [40]. Экономикалық жүйенің тұрақтылық күйі анықталғаннан кейін аталмыш жүйені бастапқы берілген күйден тепе-теңдік күйге тиімді түрде қалай көшіру мәселесі туындайды. Осы мәселені шешуде ТБЕ-нің әртүрлі жағдайдалары: ақырлы немесе шексіз уақыт аралығындағы басқару параметрлері шектеулермен немесе шектеулерсіз берілген, сызықты және сызықты емес модельдер түріндегі есептер қарастырылуы мүмкін.

1.4 Сызықты емес жүйелермен берілген КҮСЭМ үшін ТБЕ-не квазисызықтандыру әдісін қолдану

Салыстырмалы көрсеткіштермен берілген, дифференциалдық теңдеулерімен сипатталған, сондай-ақ, баланстық арақатынастар шарттарын қанағаттандыратын КҮСЭМ сызықты емес моделін қарастырайық:

$$\dot{k}_i(t) = -\lambda_i k_i(t) + (s_i(t)/\theta_i(t))x_1, \quad k_i(0) = k_i^0, \quad \lambda_i > 0, \quad (i = 0, 1, 2), \tag{1.4.1}$$

$$x_i = \theta_i(t) A_i \left(k_i(t)\right)^{\alpha_i}, \quad A_i > 0, \quad 0 < \alpha_i < 1, \quad (i = 0, 1, 2),$$

Баланстық арақатынастар:

$$s_0(t) + s_1(t) + s_2(t) = 1, \quad s_0(t) \geq 0, \quad s_1(t) \geq 0, \quad s_2(t) \geq 0, \tag{1.4.2}$$

$$\theta_0(t) + \theta_1(t) + \theta_2(t) = 1, \quad \theta_0(t) \geq 0, \quad \theta_1(t) \geq 0, \quad \theta_2(t) \geq 0, \tag{1.4.3}$$

$$(1-\beta_0)x_0 = \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2, \quad 0 < \beta_i < 1, \quad i = 0, 1, 2. \tag{1.4.4}$$

Осы алты басқарудан $(s_0(t), s_1(t), s_2(t), \theta_0(t), \theta_1(t), \theta_2(t))$ тұратын берілген бастапқы есепті баланстық арақатынастар теңдеулерін қолданып, $(u_1(t),\ u_2(t),\ u_3(t))$ үш басқарудан тұратын есепке түрлендіруге болады. Ол үшін (1.4.1) дифференциалдық теңдеулер жүйесінің тепе-теңдік күйінен салыстырмалы ауытқуын, келесі белгілеулерді енгізе отырып жазамыз:

$$y_1(t) = k_1(t) - k_1^s, \quad y_2(t) = k_2(t) - k_2^s, \quad y_3(t) = k_0(t) - k_0^s, \tag{1.4.5}$$

$$u_1(t) = s_1(t) - s_1^s, \quad u_2(t) = \frac{s_2(t)\theta_1(t)}{\theta_2(t)} - \frac{s_2^s\theta_1^s}{\theta_2^s}, \quad u_3(t) = \frac{s_0(t)\theta_1(t)}{\theta_0(t)} - \frac{s_0^s\theta_1^s}{\theta_0^s}. \tag{1.4.6}$$

Осы түрлендірулерді қолданып (1.4.1) дифференциалдық теңдеулер жүйесін төмендегідей дифференциалдық теңдеулер жүйесіне келтіруге болады:

$$\begin{aligned}
&\dot{y}_1(t) = -\lambda_1(y_1(t) + k_1^s) + \left(u_1(t) + s_1^s\right) A_1 \left(y_1(t) + k_1^s\right)^{\alpha_1}, \qquad y_1(t_0) = y_1^0,\ y_1(T) = 0, \\
&\dot{y}_2(t) = -\lambda_2(y_2(t) + k_2^s) + \left(u_2(t) + \frac{s_2^s\theta_1^s}{\theta_2^s}\right) A_1 \left(y_1(t) + k_1^s\right)^{\alpha_1}, y_2(t_0) = y_2^0,\ y_2(T) = 0, \\
&\dot{y}_3(t) = -\lambda_0(y_3(t) + k_0^s) + \left(u_3(t) + \frac{s_0^s\theta_1^s}{\theta_0^s}\right) A_1 \left(y_1(t) + k_1^s\right)^{\alpha_1},\ y_3(t_0) = y_3^0,\ y_3(T) = 0,.
\end{aligned} \tag{1.4.7}$$

Жүйедегі $y = (y_1(t), y_2(t), y_3(t))^*$ жүйе күйінің векторы, $y_0 = (y_1^0,\ y_2^0,\ y_3^0)^*$ арқылы жүйенің бастапқы күйінің векторын белгілейік, ал $u = (u_1(t), u_2(t), u_3(t))^*$ басқару векторы, оның компоненттері келесі түрдегі екі жақты шектеуді қанағаттандыруы қажет:

$$-s_1^s \leq u_1(t) \leq 1 - s_1^s, \quad -\frac{s_2^s\theta_1^s}{\theta_2^s} \leq u_2(t) \leq 1 - \frac{s_2^s\theta_1^s}{\theta_2^s}, \quad -\frac{s_0^s\theta_1^s}{\theta_0^s} \leq u_3(t) \leq 1 - \frac{s_0^s\theta_1^s}{\theta_0^s}. \tag{1.4.8}$$

Басқару сапасы келесі квадраттық функцианалмен берілсін:

$$J(y,u,t)=\frac{1}{2}\int_{t_0}^{T}[(y(t)^{*}Q(t)y(t)+u(t)^{*}R(t)u(t)]dt, \tag{1.4.9}$$

бұнда $Q(t)$, $R(t)$ – сәйкесінше $(n\times n)$ және $(m\times m)$ өлшемді берілген симметриялық үздіксіз, шектелген және $Q(t)\geq 0$ (теріс емес анықталған), $R(t)>0$ (біртекті оң анықталған) шарттарын қанағаттандыратын матрицалар; «жұлдызша» белгісі аудару (transpose) операциясын білдіреді.

(1.4.7) дифференциалдық теңдеулер жүйесі мен (1.4.8) басқару параметрлерінің шектеулерін векторлық түрде жазайық:

$$\begin{aligned}&\dot{y}(t)=f(y(t),u(t),t),\quad y(0)=y_0,\quad y(T)=0,\\&u(t)\in U=\{u\mid \alpha\leq u\leq\beta\},\quad t\in[0,T].\end{aligned} \tag{1.4.10}$$

(1.4.9) квадраттық функцианалымен берілген, (1.4.10) сызықты емес жүйе үшін ТБЕ-нің сандық шешімін алу үшін Беллман – Клаб [41] ұсынған квазисызықтандыруының итеративті (қайталанбалы) әдісі қолданылды.

Аталмыш әдісте итерацияның әрбір қадамында (1.4.10) дифференциалдық теңдеулерінің оң жағы Тейлор қатарына жіктеу арқылы алдыңғы итерацияда алынған шешімге байланысты сызықтық формалар арқылы жуықталады. Осы әдісте итерацияның көптеген қадамынан кейін шешімі бастапқы сызықты емес ТБЕ-нің шешіміне сәукес келетін тиімді басқарудың сызықты-квадраттық есебін (LQ-есептері) аламыз.

Әдістің *n*-итерациясында $u^{(n)}(t)$ басқаруы және осы басқаруға сәйкес келетін $y^{(n)}(t)$ фазалық траектория $(y^{(n-1)}(t),u^{(n-1)}(t))$ алдыңғы қадамында табылған LQ-есебінің шешімі ретінде анықталады [42].

Онда (1.4.10) дифференциалдық теңдеулерінің оң жағын жуықтандыру келесідей болады:

$$\begin{aligned}f(y^{(n)}(t),u^{(n)}(t))\approx{}& A(y^{(n-1)}(t),u^{(n-1)}(t))[y^{(n)}(t)-y^{(n-1)}(t)]+\\&+B(y^{(n-1)}(t),u^{(n-1)}(t))[u^{(n)}(t)-u^{(n-1)}(t)]+f(y^{(n-1)}(t),u^{(n-1)}(t)),\end{aligned} \tag{1.4.11}$$

бұнда A және B матрицалары $A(y,u)=\left(\frac{\partial f_i(y,u)}{\partial y_j}\right)$, $B(y,u)=\left(\frac{\partial f_i(y,u)}{\partial u_j}\right)$, $(i=1,2,3;$ $j=1,2,3)$ түрінде өрнектелген.

Квазисызықтандыру әдісін орындай отырып итерациялардың *n*-қадамында төмендегідей LQ-есебін аламыз:

$$\dot{y}^{(n)}(t)=A^{(n)}(t)y^{(n)}(t)+B^{(n)}(t)u^{(n)}(t)+z^{(n)}(t),\quad y^{(n)}(0)=y_0,\quad y^{(n)}(T)=0, \tag{1.4.12}$$

$$u^{(n)}(t)\in U=\{u^{(n)}\mid \alpha\leq u^{(n)}\leq\beta\},\quad t\in[0,T], \tag{1.4.13}$$

$$J(y^{(n)},u^{(n)})=\int_{0}^{T}[\frac{1}{2}y^{(n)}(t)^{*}Q(t)y^{(n)}(t)+\frac{1}{2}u^{(n)}(t)^{*}R(t)u^{(n)}(t)]dt\to\inf, \tag{1.4.14}$$

бұдағы $A^{(n)}(t)$, $B^{(n)}(t)$, $z^{(n)}(t)$ сәйкесінше $(n\times n)$, $(n\times m)$, $(n\times 1)$ өлшемді матрицалық

және векторлық функциялар:

$$A^{(n)}(t) = A(y^{(n-1)}(t), u^{(n-1)}(t)), \quad B^{(n)}(t) = B(y^{(n-1)}(t), u^{(n-1)}(t)),$$

$$z^{(n)}(t) = f(y^{(n-1)}(t), u^{(n-1)}(t)) - A(y^{(n-1)}(t), u^{(n-1)}(t))y^{(n-1)}(t) - B(y^{(n-1)}(t), u^{(n-1)}(t))u^{(n-1)}(t).$$

Әрбір n-ші итерацияда (1.4.12)-(1.4.14) LQ-есебін шеше отырып, $u^{(n)}(t) = \omega^{(n)}(t) + \varphi^{(n)}(t)$ түрінде берілген басқаруды аламыз. Бұндағы $\omega^{(n)}(t)$ мен $\varphi^{(n)}(t)$ келесі формулалр арқылы есептелінеді:

$$\begin{gathered}
\omega^{(n)}(y,t) = -R^{-1}B^{(n)}(t)^*\left[K^{(n)}(t)y^{(n)}(t) + q^{(n)}(t)\right]. \\
\varphi^{(n)}(t) = R^{-1}\left[\lambda_1^{(n)}(y,t) - \lambda_2^{(n)}(y,t)\right], \\
\lambda_1^{(n)}(y,t) = \max\{0;\ \alpha - \omega^{(n)}(t)\}, \\
\lambda_2^{(n)}(y,t) = \max\{0;\ \omega^{(n)}(t) - \beta\},
\end{gathered} \tag{1.4.15}$$

$K^{(n)}(t)$ матрицасы Риккатидің дифференциалдық теңдеуінің шешімінен алынады.

$\alpha \le \omega^{(n)}(t) \le \beta$ шарты орындалғанда $\lambda_1^{(n)}(t) = 0$ және $\lambda_2^{(n)}(t) = 0$, бұндай жағдайда $\varphi^{(n)}(t) = 0$, яғни $u^{(n)}(t) = \omega^{(n)}(t)$ болатынын ескерген жөн. Басқару мәндерінің ауысуы төменде көрсетілген:

$$u^{(n)}(t) = \begin{cases} \alpha, & егер\ \ \omega^{(n)}(t) < \alpha, \\ \omega^{(n)}(t), & егер\ \ \alpha \le \omega^{(n)}(t) \le \beta, \\ \beta, & егер\ \ \beta < \omega^{(n)}(t), \end{cases} \tag{1.4.16}$$

Қарастырып отырған (1.4.7) КҮСЭМ үшін LQ-есебін мына түрде жазамыз:

$$\begin{gathered}
\dot{y}_1^{(n)}(t) = \left[-\lambda_1 + s_1^c A_1 \alpha_1 \left(k_1^c\right)^{\alpha_1 - 1}\right] y_1^{(n)}(t) + A_1 \left(k_1^c\right)^{\alpha_1} u_1^{(n)}(t) + \\
+ A_1 \left[u_1^{(n-1)}(t)\left(\left(y_1^{(n-1)}(t) + k_1^c\right)^{\alpha_1} - \left(k_1^c\right)^{\alpha_1}\right) + s_1^c \left(\left(y_1^{(n-1)}(t) + k_1^c\right)^{\alpha_1} - \left(k_1^c\right)^{\alpha_1} - \alpha_1 \left(k_1^c\right)^{\alpha_1 - 1} y_1^{(n-1)}(t)\right)\right], \\
y_1^{(n)}(0) = y_1^0, \quad y_1^{(n)}(T) = 0,
\end{gathered}$$

$$\begin{gathered}
\dot{y}_2^{(n)}(t) = A_1 \frac{s_2^c \theta_1^c}{\theta_2^c} \alpha_1 (k_1^c)^{\alpha_1 - 1} y_1^{(n)}(t) - \lambda_2 y_2^{(n)}(t) + A_1 (k_1^c)^{\alpha_1} u_2^{(n)}(t) + \\
+ A_1 \left[u_2^{(n-1)}(t)\left(\left(y_1^{(n-1)}(t) + k_1^c\right)^{\alpha_1} - \left(k_1^c\right)^{\alpha_1}\right) + \frac{s_2^c \theta_1^c}{\theta_2^c}\left(\left(y_1^{(n-1)}(t) + k_1^c\right)^{\alpha_1} - \left(k_1^c\right)^{\alpha_1} - \alpha_1 \left(k_1^c\right)^{\alpha_1 - 1} y_1^{(n-1)}(t)\right)\right], \\
y_2^{(n)}(0) = y_2^0, \quad y_2^{(n)}(T) = 0,
\end{gathered} \tag{1.4.16}$$

$$\begin{gathered}
\dot{y}_3^{(n)}(t) = A_1 \frac{s_0^c \theta_1^c}{\theta_0^c} \alpha_1 (k_1^c)^{\alpha_1 - 1} y_1^{(n)}(t) - \lambda_0 y_3^{(n)}(t) + A_1 (k_1^c)^{\alpha_1} u_3^{(n)}(t) + \\
+ A_1 \left[u_3^{(n-1)}(t)\left(\left(y_1^{(n-1)}(t) + k_1^c\right)^{\alpha_1} - \left(k_1^c\right)^{\alpha_1}\right) + \frac{s_0^c \theta_1^c}{\theta_0^c}\left(\left(y_1^{(n-1)}(t) + k_1^c\right)^{\alpha_1} - \left(k_1^c\right)^{\alpha_1} - \alpha_1 \left(k_1^c\right)^{\alpha_1 - 1} y_1^{(n-1)}(t)\right)\right], \\
y_3^{(n)}(0) = y_3^0, \quad y_3^{(n)}(T) = 0.
\end{gathered}$$

Басқару векторының компоненттері екі жақты шектеумен берілген:

$$-s_1^s \le u_1^{(n)}(t) \le 1 - s_1^s, \quad -\frac{s_2^s \theta_1^s}{\theta_2^s} \le u_2^{(n)}(t) \le 1 - \frac{s_2^s \theta_1^s}{\theta_2^s}, \quad -\frac{s_0^s \theta_1^s}{\theta_0^s} \le u_3^{(n)}(t) \le 1 - \frac{s_0^s \theta_1^s}{\theta_0^s}.$$

Қарастырылып отырған ТБЕ арнайы түрдегі Лагранж көбейткіштерін қолданып Беллман–Калабтың квазисызықтандыру әдісі, траектория ұштары бекітіліп, басқару параметрлері екі жақты шектеумен берілген LQ-есептері үшін синтезделген басқаруды тұрғызуға мүмкіндік береді.

Сандық есептеулерге арналған бұл бағдарлама, экономикалық жүйені бастапқы күйден соңғы уақыттағы қалаулы күйге ауыстырғандағы тиімді басқарулар мен траекторияларды анықтау мақсатында КҮСЭМ арнаған.

1 – бөлім бойынша тұжырымдар

Аталмыш бөлімде секторлы және кластерлік экономиканың шығуы мен даму тарихына әдеби шолу жасалынды, сонымен қатар қарапайым дифференциалдық және алгебралық теңдеулерімен берілген КҮСЭМ-нің математикалық және құрылымдық модельдері қарастырылды.

Сондай-ақ, КҮСЭМ математикалық моделі үшін экономикалық саясаттың өтпелі процестерінің соңында тұрақтылық күйге әкелетін КҮСЭМ тұрақты тепе-теңдік күйін анықтау алгоритмі ұсынылған және сызықты емес теңдеулер жүйесімен берілген КҮСЭМ үшін ТБЕ сызықтандыру мақсатында Беллман–Калабтың квазисызықтандыру әдісін қолдану жолдары көрсетілген. Аталмыш әдіс траектория ұштары бекітіліп, басқару параметрлері екі жақты шектеумен берілген LQ-есептері үшін синтезделген басқаруды тұрғызуға мүмкіндік береді.

2 КЛАСТЕРДІҢ ҮШ СЕКТОРЛЫ ЭКОНОМИКАЛЫҚ МОДЕЛІ ҮШІН СИНТЕЗДЕУШІ БАСҚАРУЛАРДЫ ТҰРҒЫЗУ АЛГОРИТМДЕРІН ӨҢДЕУ

Диссертациялық жұмыстың бұл бөлімінде басқарылатын қозғалыстар теориясының негізгі мәселесі болып табылатын әр-түрлі шектеулермен берілген басқаруды синтездеу есебінің шешу жолдары қарастырылады. Бұл қазіргі уақытта көптеген зерттеулерді қажет ететін және жеткілікті түрде өңделмеген өте маңызды мәселелердің бірі. Осы сала бойынша зерттеулер динамикалық тиімділікті, дифференциалдық теңдеулер теориясын және есептеу математикасын жаңа бағыттарға алып келуі мүмкін.

Сонымен қатар, КҮСЭМ үшін ТБЕ қойылымы, басқару параметрлері шектеулерін ескеріп, кері байланыс қағидасына негізделген сызықты және сызықты емес басқарылатын жүйелер үшін синтездеуші басқаруларды тұрғызудың конструктивті әдістері мен алгоритмдері ұсынылады [43] және бұл алгоритм арнайы түрдегі Лагранж көбейткіштер әдісімен жүзеге асырылады.

Экономикалық жүйелер үшін ТБЕ шешу әдістері. Жалпы алғанда тімді басқару есептерін шешудің негізгі идеялары Л.С. Понтрягиннің максимум қағидасымен [44, 55] және динамикалық бағдарламалаумен байланысты [45, 46].

Динамикалық жүйелер үшін ТБЕ программалық басқаруды $u(t)$ табу немесе жүйенің күйінен $y(t)$ және ағымдағы уақыттан t тәуелді синтездеуші басқаруды $u(y,t)$ табу есебі ретінде тұжырымдалуы мүмкін. Бірінші жағдайда есепті Понтрягиннің максимум қағидасын пайдаланып шығаруға болады, ал екінші жағдайда Беллманның динамикалық–программалау әдісі қолданылуы мүмкін.

Жалпы кері байланыс әдісінің көмегімен берілген жүйені сызықтық және сызықтық емес бөлікті жүйеге түрлендіретін координаттық көрсетілімі (диффеоморфизм) бар сызықты емес жүйелердің бір класын В.Н. Афанасьев пен П.В. Орлов [47] қарастырған. Сонымен қатар М.Г. Дмитриев және т.б. [48] өз жұмыстарында осы жүйелердің тиімді тұрақтылығын шексіз уақыт аралығында зерттеген. Экономиканы параметрлік реттеу теориясы және оны өндірістік кластерлерді ынталандыруда қолдану мәселелері А.А. Ашимов және т.б. [49] зерттеулерінде маңызды орын алған. [50, 51, 70, 71] жұмыстарында кластерлік экономиканың техникалық және сызықты жүйелері үшін Лагранж көбейткіштерін қолданып ТБЕ қарастырылған, ал дискретті жүйелер үшін басқарылу критерилері [52] жазылған.

2.1 Ақырлы уақыт интервалында, басқару парамерлері шектеулерсіз берілген КҮСЭМ сызықты моделі үшін синтездеуші басқаруды іздеу алгоритмі

Квазисызықтандыру әдісімен сызықтандырылып алынған (1.4.16) теңдеулерін келесі түрде жазайық:

$$\dot{y}_1(t) = (-\lambda_1 + A_1\alpha_1(k_1^s)^{\alpha_1-1}s_1^s)y_1(t) + A_1(k_1^s)^{\alpha_1}u_1(t) + f(y_1(t),u_1(t)), \qquad y_1(t_0) = y_1^0,$$

$$\dot{y}_2(t) = A_1\frac{s_2^s\theta_1^s}{\theta_2^s}\alpha_1(k_1^s)^{\alpha_1-1}y_1(t) - \lambda_2 y_2(t) + A_1(k_1^s)^{\alpha_1}u_2(t) + f(y(t)_1,u_2(t)), \quad y_2(t_0) = y_2^0, \qquad (2.1.1)$$

$$\dot{y}_3(t) = A_1\frac{s_0^s\theta_1^s}{\theta_0^s}\alpha_1(k_1^s)^{\alpha_1-1}y_1(t) - \lambda_0 y_3(t) + A_1(k_1^s)^{\alpha_1}u_3(t) + f(y_1(t),u_3(t)), \quad y_3(t_0) = y_3^0.$$

Бұндағы $f(y_1(t),\ u_i(t)),\ i=1,2,3$ белгілеуі төмендегідей түрде берілген:

$$f(y_1(t),\ u_1(t)) = A_1\left[u_1(t)\left(\left(y_1(t)+k_1^s\right)^{\alpha_1} - \left(k_1^s\right)^{\alpha_1}\right) + s_1^s\left(\left(y_1(t)+k_1^s\right)^{\alpha_1} - \left(k_1^s\right)^{\alpha_1} - \alpha_1\left(k_1^s\right)^{\alpha_1-1}y_1(t)\right)\right],$$

$$f(y_1(t),\ u_2(t)) = A_1\left[u_2(t)\left(\left(y_1(t)+k_1^s\right)^{\alpha_1} - \left(k_1^s\right)^{\alpha_1}\right) + \frac{s_2^s\theta_1^s}{\theta_2^s}\left(\left(y_1(t)+k_1^s\right)^{\alpha_1} - \left(k_1^s\right)^{\alpha_1} - \alpha_1\left(k_1^s\right)^{\alpha_1-1}y_1(t)\right)\right], \qquad (2.1.2)$$

$$f(y_1(t),\ u_3(t)) = A_1\left[u_3(t)\left(\left(y_1(t)+k_1^s\right)^{\alpha_1} - \left(k_1^s\right)^{\alpha_1}\right) + \frac{s_0^s\theta_1^s}{\theta_0^s}\left(\left(y_1(t)+k_1^s\right)^{\alpha_1} - \left(k_1^s\right)^{\alpha_1} - \alpha_1\left(k_1^s\right)^{\alpha_1-1}y_1(t)\right)\right].$$

Бұл жерде, жүйенің қалаулы соңғы күйі деп ($y_i(T)=0,\ i=1,2,3$) – меншікті тұтынуды барынша ұлғайатын және экономика секторларындағы теңдестірілген өсімді қамтамасыз ететін тепе-теңдік күйін айтамыз.

Қарастырып отырған есепте $u=(u_1(t),u_2(t),u_3(t))^*$ басқару векторының компоненттеріне шектеулер қойылмайды.

(2.1.1) берілген дифференциалдық теңдеулер жүйесінің сызықтық бөлігін векторлы-матрицалық түрде жазссақ, келесі түрдегі дифференциалдық теңдеулер жүйесін аламыз:

$$\dot{y}(t) = A(t)y(t) + B(t)u(t), \quad y(t_0) = y_0, \quad y(T) = 0, \quad t\in[t_0,T]. \qquad (2.1.3)$$

бұнда $y(t)$ – басқару объектісі күйінің векторы $(n\times1)$; $u(t)$ – басқару векторы $(m\times1)$; $A(t)$, $B(t)$ – сәйкесінше $(n\times n)$ және $(n\times m)$ өлшемді матрицалар:

$$A = \begin{pmatrix} -\lambda_1 + A_1\alpha_1(k_1^s)^{\alpha_1-1}s_1^s & 0 & 0 \\ A_1\dfrac{s_2^s\theta_1^s}{\theta_2^s}\alpha_1(k_1^s)^{\alpha_1-1} & -\lambda_2 & 0 \\ A_1\dfrac{s_0^s\theta_1^s}{\theta_0^s}\alpha_1(k_1^c)^{\alpha_1-1} & 0 & -\lambda_0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} A_1(k_1^s)^{\alpha_1} & 0 & 0 \\ 0 & A_1(k_1^s)^{\alpha_1} & 0 \\ 0 & 0 & A_1(k_1^s)^{\alpha_1} \end{pmatrix} \qquad (2.1.4)$$

t_0 мен T – алдын-ала берілген бастапқы және соңғы уақыттар (айлар) және (2.1.3) жүйесін t_0 уақытында басқарылымды деп ұйғарамыз.

Басқару сапасы келесі квадраттық функцианалмен берілсін:

$$J(y,u,t) = \frac{1}{2}\int_{t_0}^{T}[(y(t)^*Q(t)y(t) + u(t)^*R(t)u(t)]dt, \qquad (2.1.5)$$

бұнда $Q(t)$, $R(t)$ – сәйкесінше $(n\times n)$ және $(m\times m)$ өлшемді берілген симметриялық үздіксіз, шектелген және $Q(t)\geq 0$ (теріс емес анықталған), $R(t)>0$ (біртекті оң анықталған) шарттарын қанағаттандыратын матрицалар; «жұлдызша» белгісі аудару (transpose) операциясын білдіреді.

Есептің қойылымы: (2.1.3) жүйесін $[t_0,T]$ уақыт аралығында берілген $y(t_0)=y_0$ бастапқы күйінен $y(T)=0$ тепе-теңдік күйіне жеткізетін және (2.1.5) функционалының минимум мәнін беретін, $u(t)$ синтездеуші басқаруды табу керек.

Есептің шешімі: Қойылған ТБЕ шешу үшін арнайы түрдегі Лагранж көбейткіштер әдісін қолданамыз. Ол үшін, алдымен (2.1.3) дифференциалдық теңдеулер жүйесін $\lambda_0(y,t)=K(t)y(t)+q(t)$ түрінде берілген көбейткішіне көбейтіп (2.1.5) функционалына қосамыз, нәтижесінде:

$$L(u,y,t)=\int_{t_0}^{T}[\frac{1}{2}y^*(t)Q(t)y(t)+\frac{1}{2}u^*(t)R(t)u(t)+ \\ +\big(K(t)y(t)+q(t)\big)^*\big(A(t)y(t)+B(t)u(t)-\dot{y}(t)\big)]dt \tag{2.1.6}$$

Бұндағы $q(t)$ - $(n\times 1)$ өлшемді вектор; $K(t)$ - $(n\times n)$ өлшемді оң анықталған симметриялы матрица.

Интеграл астындағы өрнекті $M(u,y,t)$ функциясымен белгілеп алайық және қандайда бір $v(y,t)$ функциясын қарастырайық:

$$v(y,t)=\frac{1}{2}y(t)^*K(t)y(t)+y(t)^*q(t),\quad \frac{\partial v(y,t)}{\partial y}=K(t)y(t)+q(t), \tag{2.1.7}$$

$$M(u,y,t)=\frac{1}{2}y^*(t)Q(t)y(t)+\frac{1}{2}u^*(t)R(t)u(t)+ \\ +\big(K(t)y(t)+q(t)\big)^*\big(A(t)y(t)+Bu(t)-\dot{y}(t)\big) \tag{2.1.8}$$

Бұл жерде $\big(K(t)y(t)+q(t)\big)^*\dot{y}(t)=-\frac{1}{2}y^*(t)\dot{K}(t)y(t)-y(t)\dot{q}(t)$ ескерсек $M(u,y,t)$ функциясын келесідей түрде жазамыз:

$$M(u,y,t)=\frac{1}{2}y^*(t)\big(Q(t)+\dot{K}(t)\big)y(t)+\frac{1}{2}u^*(t)R(t)u(t)+ \\ +\big(K(t)y(t)+q(t)\big)^*\big(A(t)y(t)+B(t)u(t)\big)+y^*(t)\dot{q}(t). \tag{2.1.9}$$

Онда (2.1.6) Лагранж функционалы:

$$L(u,y)=v(y(t_0),t_0)-v(y(T),T)+\int_{t_0}^{T}M(u,y,t)dt \tag{2.1.10}$$

Тиімді басқарудың өрнегін табу үшін бірінші ретті экстремумнің қажетті шартын қолданып, оны келесі түрде аламыз:

$$u(t) = -R^{-1}(t)B(t)^{*}\left(K(t)y(t) + q(t)\right). \qquad (2.1.11)$$

Ары қарай, экстремумнің қажетті шартын қолданып (2.1.10) функциясынан $y(t)$ бойынша туынды аламыз және осы туындыны алу барысында (2.1.11) түріндегі басқаруды ескереміз, нәтижесінде:

$$\frac{\partial M(u,y,t)}{\partial y} = \left[\dot{K}(t) + K(t)A(t) + A^{*}(t)K(t) - K(t)B_1(t)K(t) + Q(t)\right]y(t) +$$

$$+\dot{q}(t) + A_1^{*}(t)q(t) - K(t)B_1(t)q(t) = 0.$$

Бұндағы $A_1(t) = A(t) - B(t)R^{-1}(t)B^{*}(t)K(t),\quad B_1(t) = B(t)R^{-1}(t)B^{*}(t)$. Ал $K(t),\ W(t,T)$ матрицалары мен $q(t)$ векторы $t \in [t_0, T]$ уақыт аралығында келесі дифференциалдық теңдеулерді қанағаттандырады:

$$\dot{K}(t) + K(t)A(t) + A^{*}(t)K(t) - K(t)B_1(t)K(t) + Q(t) = 0,\ K(T) = K_T, \qquad (2.1.12)$$

$$\dot{W}(t,T) = W(t,T)A_1^{*}(t) + A_1(t)W(t,T) - B_1(t),\quad W(T,T) = 0, \qquad (2.1.13)$$

$$\dot{q}(t) = -A_1^{*}(t)q(t),\quad q(t_0) = W^{-1}(t_0,T) \times y(t_0), \qquad (2.1.14)$$

(2.1.12)-(2.1.14) теңдеулерінің шешімдері бар болсын, онда (2.1.11) басқаруымен берілген жүйенің қозғалыс заңдылығын анықтайтын дифференциалдық теңдеулер төмендегідей болады:

$$\dot{y} = A_1(t)y(t) - B_1(t)q(t),\ y(t_0) = y_0. \qquad (2.1.15)$$

Тиімді басқаруды тұрғызу алгоритмі. Берілген есептегі $\{y(t),\ u(t)\}$ тиімді жұбтарының сандық мәндері мен графикалық бейнесін алу үшін есепту алгоритмін $\{y(t), u(t)\} \in \Delta(t_0, T, y_0, y_T)$ шартын қанағатандыратын $K(t),\ W(t,T)$ матрицалары мен $q(t)$ вектор функциясын тұрғызудан бастаймыз.

$K(t), W(t,T), q(t)$ мәндері $t \in [t_0, T]$ бекітілген әрбір уақыт аралығында $\{y(t), u(t)\}$ жұбы $M(y,u,t)$ функциясының ең аз мәнін беретіндей түрде ізделінеді. Яғни (2.1.3), (2.1.5) ТБЕ шешу алгоритмі келесі қадамдардан тұрады:

1. Рунге–Кутт әдісін қолданып $[t_0, T]$ аралығында $K(T) = K_T,\ W(T,T) = 0$, шарттарынмен берілген $K(t)$ және $W(t,T)$ матрицаларын анықтау үшін (2.1.12) мен (2.1.13) дифференциалдық теңдеулер жүйесін интегралдаймыз.

Бұл жерде K_T $-(n \times n)$ өлшемді, оң анықталған симметриялы матрица екенін атап өткен жөн. (2.1.12) матрицалық дифференциалдық теңдеуінің $K(t_0) = K_0$ бастапқы шартының әр-түрлі берілуіне байланысты $K(t)$ мен $W(t,T)$ матрицаларының да әр-түрлі мәндерін аламыз. Бірақ, осыған қарамастан (2.1.11) түріндегі $u(t)$ вектор–функциясын аламыз;

2. $y(t_0) = y_0$ шартын беріп $q(t_0) = W^{-1}(t_0,T)y(t_0)$ есептейміз;

3. Рунге–Кутт әдісін қолданып $[t_0, T]$ аралығында $y(t_0) = y_0,\ q(t_0) = q_0$ бастапқы

шарттарын беріп сәйкесінше (2.1.15) және (2.1.14) дифференциалдық теңдеулерін интегралдаймыз. Осы теңдеулерді интегралдау барысында $y(t)$ тиімді траектория мен $u(t)$ тиімді басқарудың графиктерін аламыз. Егер, есептің бастапқы $y(t_0) = y_0$ шарты өзгертілсе және осы өзгерістер үшін есептеулер жүргізу керек болса, онда 2 мен 3 қадамдарды ғана қайталаймыз.

4. Интегралдау барысында алынған $y(t)$ және $u(t)$ мәндерін пайдаланып (1.4.2) –(1.4.4) шарттарын қанағаттандыратын келесі формулаларды есептейміз:

$$v(t) = \frac{\beta_1 A_1 \left(k_1(t)\right)^{\alpha_1} + \beta_2 A_2 \left(k_2(t)\right)^{\alpha_2} \dfrac{1-u_1(t)-s_1^s}{u_2(t)+s_1^s\theta_1^s/\theta_2^s}}{(1-\beta_0)A_0\left(k_0(t)\right)^{\alpha_0}\dfrac{1-u_1(t)-s_1^s}{u_3(t)+s_0^s\theta_1^s/\theta_0^s} + \beta_2 A_2\left(k_2(t)\right)^{\alpha_2}\dfrac{1-u_1(t)-s_1^s}{u_2(t)+s_2^s\theta_1^s/\theta_2^s}}; \quad (2.1.16)$$

(1.4.4) баланыстық ара-қатынастың орындалуын қамтамасыз етеді;

$$s_1(t) = u_1(t) + s_1^s, \quad s_0(t) = v(t)(1-s_1(t)), \quad s_2(t) = (1-v(t))(1-s_1(t)); \quad (2.1.17)$$

(1.4.2) инвестиция шартының орындалуын қамтиды;

$$\theta_1(t) = \frac{1}{1 + s_0(t)/\left(u_3(t)+s_0^s\theta_1^s/\theta_0^s\right) + s_2(t)/\left(u_2(t)+s_2^s\theta_1^s/\theta_2^s\right)},$$
$$\theta_0(t) = \frac{v(t)(1-s_1(t))\theta_1(t)}{u_3(t)+s_0^s\theta_1^s/\theta_0^s}, \quad \theta_2(t) = \frac{(1-v(t))(1-s_1(t))\theta_1(t)}{u_2(t)+s_2^s\theta_1^s/\theta_2^s}. \quad (2.1.18)$$

(1.4.3) еңбек шартының орындалуын қамтиды.

2.2 Ақырлы уақыт интервалында, басқару парамерлері шектеулермен берілген КҮСЭМ сызықты моделі үшін синтездеуші басқаруды іздеу алгоритмі

2.4 бөлімде сипатталған квазисызықтандыру әдісінің көмегімен (1.4.7) КҮСЭМ теңдеулерін сызықтандырудан алынған (2.1.1) түріндегі дифференциалдық теңдеулер жүйесінің сызықтық бөлігін векторлы-матрицалық түрде жазып, қарастырайық:

$$\dot{y}(t) = A(t)y(t) + B(t)u(t), \quad y(t_0) = y_0, \quad y(T) = 0, \quad t \in [t_0, T]. \quad (2.2.1)$$

$$u(t) \in U = \{u \mid \alpha(t) \le u(t) \le \beta(t)\}, \quad t \in [t_0, T]. \quad (2.2.2)$$

Бұнда $y(t)$ – басқару объектісі күйінің векторы $(n\times 1)$; $u(t)$ – $(m\times 1)$ өлшемді басқару векторы, оның компоненттері келесі түрдегі екі жақты шектеуді қанағаттандыруы қажет:

$$-s_1^s \le u_1(t) \le 1-s_1^s, \quad -\frac{s_2^s\theta_1^s}{\theta_2^s} \le u_2(t) \le 1-\frac{s_2^s\theta_1^s}{\theta_2^s}, \quad -\frac{s_0^s\theta_1^s}{\theta_0^s} \le u_3(t) \le 1-\frac{s_0^s\theta_1^s}{\theta_0^s}. \quad (2.2.3)$$

$\alpha(t)$, $\beta(t)$ – бөліктелген – үзіліссіз функциялардан тұратын вектор $(m\times 1)$; $A(t)$, $B(t)$ – сәйкесінше $(n\times n)$ және $(n\times m)$ өлшемді матрицалар:

$$A=\begin{pmatrix} -\lambda_1+A_1\alpha_1(k_1^s)^{\alpha_1-1}s_1^s & 0 & 0 \\ A_1(s_2^s\theta_1^s/\theta_2^s)\alpha_1(k_1^s)^{\alpha_1-1} & -\lambda_2 & 0 \\ A_1(s_0^s\theta_1^s/\theta_0^s)\alpha_1(k_1^s)^{\alpha_1-1} & 0 & -\lambda_0 \end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix} A_1(k_1^s)^{\alpha_1} & 0 & 0 \\ 0 & A_1(k_1^s)^{\alpha_1} & 0 \\ 0 & 0 & A_1(k_1^s)^{\alpha_1} \end{pmatrix} \quad (2.2.4)$$

t_0 мен T – алдын-ала берілген бастапқы және соңғы уақыттар (айлар) және (2.2.1) жүйесін t_0 уақытында басқарылымды деп ұйғарамыз.

Бұл жерде, жүйенің қалаулы соңғы күйі деп ($y_i(T)=0,\ i=1,2,3$) – меншікті тұтынуды барынша ұлғайатын және экономика секторларындағы теңдестірілген өсімді қамтамасыз ететін тепе-теңдік күйін айтамыз.

Басқару сапасы келесі квадраттық функционалмен берілсін:

$$J(y,u,t)=\frac{1}{2}\int_{t_0}^{T}[(y(t)^*Q(t)y(t)+u(t)^*R(t)u(t)]dt, \quad (2.2.5)$$

бұнда $Q(t)$, $R(t)$ – сәйкесінше $(n\times n)$ және $(m\times m)$ өлшемді берілген симметриялық үздіксіз, шектелген және $Q(t)\geq 0$ (теріс емес анықталған), $R(t)>0$ (біртекті оң анықталған) шарттарын қанағаттандыратын матрицалар; «жұлдызша» белгісі аудару (transpose) операциясын білдіреді.

Есептің қойылымы: (2.2.1) жүйесін $[t_0,T]$ уақыт аралығында берілген $y(t_0)=y_0$ бастапқы күйінен $y(T)=0$ тепе-теңдік күйіне жеткізетін және (2.2.5) функционалының минимум мәнін беретін, (2.2.2) екі жақты шартын қанағаттандыратын $u(t)$ синтездеуші басқаруды табу керек.

Есептің шешімі: Қойылған ТБЕ шешу үшін арнайы түрдегі Лагранж көбейткіштер әдісін қолданамыз. Ол үшін, алдымен (2.2.1) дифференциалдық теңдеулер жүйесін $\lambda_0(y,t)=K(t)y(t)+q(t)$ түрінде берілген көбейткішіне көбейтеміз, содан кейін $\lambda_1^*(y,t)\big(\alpha(t)-u(t)\big)+\lambda_2^*(y,t)\big(u(t)-\beta(t)\big)+$ $+\lambda_3^*(y,t)\big(y(t)-W(t,T)^{-1}q(t)\big)$, $\lambda_i(y,t)\geq 0,\ i=1,2,3$ өрнегімен бірге (2.2.5) функционалына қосып, нәтижесінде келесі функционалды аламыз:

$$\begin{aligned} L(u,y,t)=\int_{t_0}^{T}[&\frac{1}{2}y^*(t)Q(t)y(t)+\frac{1}{2}u^*(t)R(t)u(t)+\big(K(t)y(t)+q(t)\big)^*\times \\ &\times\big(A(t)y(t)+B(t)u(t)-\dot{y}(t)\big)+\lambda_1^*(y,t)\big(\alpha(t)-u(t)\big)+ \\ &+\lambda_2^*(y,t)\big(u(t)-\beta(t)\big)+\lambda_3^*(y,t)\big(y(t)-W^{-1}(t,T)q(t)\big)]dt \end{aligned} \quad (2.2.6)$$

Бұндағы $q(t)$ - $(n\times 1)$ өлшемді вектор; $K(t)$ - $(n\times n)$ өлшемді оң анықталған симметриялы матрица.

Интеграл астындағы өрнекті $M(u,y,t)$ функциясымен белгілеп алайық және қандайда бір $v(y,t)$ функциясын қарастырайық:

$$v(y,t)=\frac{1}{2}y(t)^*K(t)y(t)+y(t)^*q(t),\quad \frac{\partial v(y,t)}{\partial y}=K(t)y(t)+q(t), \quad (2.2.7)$$

$$M(u,y,t)=\frac{1}{2}y^*(t)Q(t)y(t)+\frac{1}{2}u^*(t)R(t)u(t)+$$
$$+\left(K(t)y(t)+q(t)\right)^*\left(A(t)y(t)+Bu(t)-\dot{y}(t)\right)+\lambda_1^*(y,t)\left(\alpha(t)-u(t)\right)+ \quad (2.2.8)$$
$$+\lambda_2^*(y,t)\left(u(t)-\beta(t)\right)+\lambda_3^*(y,t)\left(y(t)-W^{-1}(t,T)q(t)\right)$$

Бұл жерде $\left(K(t)y(t)+q(t)\right)^*\dot{y}(t)=-\frac{1}{2}y^*(t)\dot{K}(t)y(t)-y(t)\dot{q}(t)$ ескерсек $M(u,y,t)$ функциясын келесідей түрде жазамыз:

$$M(u,y,t)=\frac{1}{2}y^*(t)\left(Q(t)+\dot{K}(t)\right)y(t)+\frac{1}{2}u^*(t)R(t)u(t)+$$
$$+\left(K(t)y(t)+q(t)\right)^*\left(A(t)y(t)+B(t)u(t)\right)+y^*(t)\dot{q}(t)+\lambda_1^*(y,t)\left(\alpha(t)-u(t)\right)+ \quad (2.2.9)$$
$$+\lambda_2^*(y,t)\left(u(t)-\beta(t)\right)+\lambda_3^*(y,t)\left(y(t)-W^{-1}(t,T)q(t)\right)$$

Онда (2.2.6) Лагранж функцианалы:

$$L(u,y)=v(y(t_0),t_0)-v(y(T),T)+\int_{t_0}^{T}M(u,y,t)dt \quad (2.2.10)$$

Тиімді басқарудың өрнегін табу үшін бірінші ретті экстремумнің қажетті шартын қолданып, оны келесі түрде аламыз:

$$u(t)=-R^{-1}(t)B(t)^*\left(K(t)y(t)+q(t)\right)+R^{-1}(t)\left(\lambda_1^*(y,t)-\lambda_2^*(y,t)\right) \quad (2.2.11)$$

Ары қарай, бірінші ретті экстремумнің қажетті шартын қолданып (2.2.10) функциясынан $y(t)$ бойынша туынды аламыз және осы туындыны алу барысында (2.2.11) түріндегі басқару мен $\lambda_3(y,t)=-\left(K(t)+W^{-1}(t,T)\right)B(t)R^{-1}(t)\left(\lambda_1^*(y,t)-\lambda_2^*(y,t)\right)$ өрнегін ескереміз, нәтижесінде:

$$\frac{\partial M(u,y,t)}{\partial y}=\left[\dot{K}(t)+K(t)A(t)+A^*(t)K(t)-K(t)B_1(t)K(t)+Q(t)\right]y(t)+\dot{q}(t)+$$
$$+A_1^*(t)q(t)-K(t)B_1(t)q(t)-W^{-1}(t,T)B(t)R^{-1}(t)\left[\lambda_1^*(y,t)-\lambda_2^*(y,t)\right]=0.$$

Бұндағы $A_1(t)=A(t)-B(t)R^{-1}(t)B^*(t)K(t),\quad B_1(t)=B(t)R^{-1}(t)B^*(t)$. Ал $K(t),\ W(t,T)$ матрицалары мен $q(t)$ векторы $t\in[t_0,T]$ уақыт аралығында келесі дифференциалдық теңдеулерді қанағаттандырады:

$$\dot{K}(t)+K(t)A(t)+A^*(t)K(t)-K(t)B_1(t)K(t)+Q(t)=0,\ K(t_0)=K_0, \quad (2.2.12)$$

$$\dot{W}(t,T)=W(t,T)A_1^*(t)+A_1(t)W(t,T)-B_1(t),\quad W(T,T)=0, \quad (2.2.13)$$

$$\dot{q}(t)=-A_1^*(t)q(t)+W^{-1}(t,T)B(t)\varphi(y,t),\quad q(t_0)=W^{-1}(t_0,T)\times y(t_0), \quad (2.2.14)$$

бұл жерде:

$$\varphi(y,t) = R^{-1}(t)[\lambda_1^*(y,t) - \lambda_2^*(y,t)]. \qquad (2.2.15)$$

Ескере кететін жайт, $\lambda_1(y,t) \geq 0,\ \lambda_2(y,t) \geq 0$ Лагранж көбейткіштері қатаңдықты толықтыру шартын қанағаттандыру керек, яғни:

$$\lambda_1^*(y,t)(\alpha(t) - u(t)) = 0, \quad \lambda_2^*(y,t)(u(t) - \beta(t)) = 0. \qquad (2.2.16)$$

Ол үшін $\lambda_1(y,t),\ \lambda_2(y,t)$ көбейткіштерін төменде көрсетілгендей түрде таңдаймыз:

$$\begin{aligned} \lambda_1(y,t) &= \max\{0;\ \alpha(t) - \omega(y,t)\} \geq 0, \\ \lambda_2(y,t) &= \max\{0;\ \omega(y,t) - \beta(t)\} \geq 0, \\ \omega(y,t) &= -R^{-1}(t)B^*(t)\big(K(t)y(t) + q(t)\big). \end{aligned} \qquad (2.2.17)$$

(2.2.12)-(2.2.14) теңдеулерінің шешімдері бар болсын және (2.2.17) шарты орындалсын, онда (2.2.11) басқаруымен берілген жүйенің қозғалыс заңдылығын анықтайтын дифференциалдық теңдеулер төмендегідей болады:

$$\dot{y} = A_1(t)y(t) - B_1(t)q(t) + B(t)\varphi(y,t),\ \ y(t_0) = y_0. \qquad (2.2.18)$$

Тиімді басқаруды тұрғызу алгоритмі. Берілген есептегі $\{y(t),\ u(t)\}$ тиімді жұбтарының сандық мәндері мен графикалық бейнесін алу үшін есепту алгоритмін $\{y(t), u(t)\} \in \Delta(t_0, T, y_0, y_T)$ шартын қанағатандыратын $K(t),\ W(t,T)$ матрицалары мен $\{q(t), \lambda_1(y,t), \lambda_2(y,t)\}$ функцияларын тұрғызудан бастаймыз.

$(K(t), W(t,T),\ q(t),\ \lambda_1(y,t),\ \lambda_2(y,t))$ мәндері $t \in (t_0, T)$ бекітілген әрбір уақыт аралығында $\{y(t), u(t)\}$ жұбы $M(y,u,t)$ функциясының ең аз мәнін беретіндей түрде ізделінеді. Тағыда бір ескеретін жайт, егер (2.2.2) шартымен берілен басқару (2.2.18) дифференциалдық теңдеуін қанағаттандырса, онда бұл $(y(t), u(t))$ жұбын қойылған есептің шешімі деп қабылдаймыз. Яғни (2.2.1), (2.2.2), (2.2.5) ТБЕ шешу алгоритмі келесі қадамдардан тұрады:

1. Рунге–Кутт әдісін қолданып $[t_0, T]$ аралығында $K(t_0) = K_0,\ W(T,T) = 0$, шарттарынмен берілген $K(t)$ және $W(t,T)$ матрицаларын анықтау үшін (2.2.12) мен (2.2.13) дифференциалдық теңдеулер жүйесін интегралдаймыз.

Бұл жерде K_0 $-(n \times n)$ өлшемді, оң анықталған симметриялы матрица екенін атап өткен жөн. (2.2.13) матрицалық дифференциалдық теңдеуінің $K(t_0) = K_0$ бастапқы шартының әр-түрлі берілуіне байланысты $K(t)$ мен $W(t,T)$ матрицаларының да әр-түрлі мәндерін аламыз. Бірақ, осыған қарамастан (2.2.11) түріндегі $u(t)$ вектор–функциясын аламыз;

2. $y(t_0) = y_0$ шартын беріп $q(t_0) = W^{-1}(t_0, T)y(t_0)$ есептейміз;

3. Рунге–Кутт әдісін қолданып $[t_0, T]$ аралығында $y(t_0) = y_0,\ q(t_0) = W^{-1}(t_0, T)y(t_0)$ бастапқы шарттарын беріп сәйкесінше (2.2.18) және (2.2.14) дифференциалдық теңдеулерін интегралдаймыз. Осы теңдеулерді интегралдау барысында $y(t)$ тиімді траектория мен $u(t)$ тиімді басқарудың графиктерін аламыз. Егер, есептің

бастапқы $y(t_0)=y_0$ шарты өзгертілсе және осы өзгерістер үшін есептеулер жүргізу керек болса, онда 2 мен 3 қадамдарды ғана қайталаймыз.

4. Интегралдау барысында алынған $y(t)$ және $u(t)$ мәндерін пайдаланып (1.4.2) –(1.4.4) шарттарын қанағаттандыратын келесі формулаларды есептейміз:

$$v(t)=\frac{\beta_1 A_1\left(k_1(t)\right)^{\alpha_1}+\beta_2 A_2\left(k_2(t)\right)^{\alpha_2}\dfrac{1-u_1(t)-s_1^s}{u_2(t)+s_1^s\theta_1^s/\theta_2^s}}{(1-\beta_0)A_0\left(k_0(t)\right)^{\alpha_0}\dfrac{1-u_1(t)-s_1^s}{u_3(t)+s_0^s\theta_1^s/\theta_0^s}+\beta_2 A_2\left(k_2(t)\right)^{\alpha_2}\dfrac{1-u_1(t)-s_1^s}{u_2(t)+s_2^s\theta_1^s/\theta_2^s}}; \quad (2.2.19)$$

(1.4.4) баланыстық ара-қатынастың орындалуын қамтамасыз етеді;

$$s_1(t)=u_1(t)+s_1^s,\quad s_0(t)=v(t)(1-s_1(t)),\quad s_2(t)=(1-v(t))(1-s_1(t)); \qquad (2.2.20)$$

(1.4.2) инвестиция шартының орындалуын қамтиды;

$$\theta_1(t)=\frac{1}{1+s_0(t)/(u_3(t)+s_0^s\theta_1^s/\theta_0^s)+s_2(t)/(u_2(t)+s_2^s\theta_1^s/\theta_2^s)},$$

$$\theta_0(t)=\frac{v(t)(1-s_1(t))\theta_1(t)}{u_3(t)+s_0^s\theta_1^s/\theta_0^s},\quad \theta_2(t)=\frac{(1-v(t))(1-s_1(t))\theta_1(t)}{u_2(t)+s_2^s\theta_1^s/\theta_2^s}. \qquad (2.2.21)$$

(1.4.3) еңбек шартының орындалуын қамтиды.

2.3 Ақырлы уақыт интервалында, басқару парамерлері шектеулермен берілген КҮСЭМ-нің сызықты емес моделі үшін синтездеуші басқаруды іздеу алгоритмі

Алдыңғы бөлімшедегі (2.1.1) дифференциалдық теңдеулермен берілген жүйені векторлы-матрицалық түрде жазып, төмендегідей түрде берілген сызықты емес басқарылатын жүйелердің бір класына арналған тімді басқару есебін қарастырайық:

$$\dot{y}(t)=A(t)y(t)+B(t)u(t)+f(y,u,\varphi,t),\quad y(t_0)=y_0,\quad y(T)=0,\quad t\in[t_0,T]. \qquad (2.3.1)$$

$$u(t)\in U=\{u\mid \alpha(t)\le u(t)\le\beta(t)\},\quad t\in[t_0,T]. \qquad (2.3.2)$$

Жоғарыда атап өткендей, бұндағы $y(t)$ дегеніміз – $(n\times1)$ өлшемді басқару объектісі күйінің векторы; $u(t)-$ $(m\times1)$ өлшемді басқару векторы; $f(y,u,\varphi,t)$ – $t\in[t_0,T]$ уақытында шектелген үзіліссіз функциялар векторы $(n\times1)$; $\alpha(t)$, $\beta(t)$ – бөліктелген – үзіліссіз функциялардан тұратын вектор $(m\times1)$; $A(t)$, $B(t)$ – сәйкесінше $(n\times n)$ және $(n\times m)$ өлшемді матрицалар және олар (2.2.4) түрінде берілген; t_0 мен $T-$ алдын-ала берілген бастапқы және соңғы уақыттар және (2.3.1) жүйесі t_0 уақытында басқарылымды деп ұйғарамыз [53].

Ары қарай, $\Delta(t_0, T, y_0, y_T)$ арқылы $\{y(t), u(t)\}$ жұптарының бар болу жиынтығын белгілейік:

$$\Delta(t_0,T,\ y_0,y_T)=\{(y,u)\mid u(t)\in U(t),$$
$$\dot{y}=A(t)y(t)+B(t)u(t)+f(y,u,\varphi,t),\qquad (2.3.3)$$
$$t_0\le t\le T,\ \ y(t_0)=y_0,\ \ y(T)=y_T\}.$$

Енді осы (2.3.3) жиынтығында басқару сапасы келесі функцианалмен берілсін:

$$J(y,u)=\frac{1}{2}\int_0^T[y^*(t)Q(t)y(t)+u^*(t)R(t)u(t)]dt, \qquad (2.3.4)$$

бұндағы $Q(t)$ мен $R(t)$ – сәйкесінше оң анықталғын, симметриялы матрицалар.

Есептің қойылымы: (2.3.1) жүйесін $[t_0,T]$ уақыт аралығында берілген $y(t_0)=y_0$ бастапқы күйінен $y(T)=0$ тепе-теңдік күйіне жеткізетін және (2.3.4) функцианалының минимум мәнін беретін, (2.3.2) екі жақты шартын қанағаттандыратын $u(t)$ синтездеуші басқаруды табу керек.

Есептің шешімі: Екі жақты шектеуерімен берілген (2.3.1), (2.3.2) және (2.3.4) ТБЕ шешу үшін арнайы түрдегі Лагранж көбейткіштер әдісін қолданамыз. Қарастырылып отырған есепке аталмыш әдісті қолданудың басты мақсаты, шектеулерімен берілген бастапқы ТБЕ шектеулері жоқ есепке түрлендіруде болып табылады. Бұл жерде ескере кететін жайт, жаңа есептің шешімі бастапқы берілген есептің шешімін қанағаттандыратындай түрде құрылады.

Осы әдісті қолдану үшін, алдымен (2.3.1) дифференциалдық теңдеулер жүйесін $\lambda_0(y,t)=K(t)y(t)+q(t)$ түрінде берілген көбейткішіне көбейтеміз, содан кейін $\lambda_1^*(y,t)(\alpha(t)-u(t))+\lambda_2^*(y,t)(u(t)-\beta(t))+\lambda_3^*(y,t)\left(y(t)-W(t,T)^{-1}q(t)\right)$, $\lambda_i(y,t)\ge 0$, $\left(i=1,2,3\right)$ өрнегімен бірге (2.3.4) функцианалына қосамыз. Нәтижесінде келесі функционал шығады:

$$L(u,y,t)=\int_{t_0}^{T}[\frac{1}{2}y^*(t)Q(t)y(t)+\frac{1}{2}u^*(t)R(t)u(t)+$$
$$+\lambda_0^*(y,t)\left(A(t)y(t)+Bu(t)+f(y,u,\varphi,t)-\dot{y}(t)\right)+\lambda_1^*(y,t)\left(\alpha(t)-u(t)\right)+ \qquad (2.3.5)$$
$$+\lambda_2^*(y,t)\left(u(t)-\beta(t)\right)+\lambda_3^*(y,t)\left(y(t)-W^{-1}(t,T)q(t)\right)]dt$$

бұндағы $q(t)-(n\times 1)$ өлшемді вектор; $K(t)-(n\times n)$ өлшемді оң анықталған, симметриялы матрица.

Жаңадан енгізген $\lambda_0(y,t)=K(t)y(t)+q(t)$ көбейткіші $\{y(t),u(t)\}$ жұптарына (2.3.1) дифференциалдық теңдеулер жүйесі түрінде берілген шектеулерді, ал $\left\{\lambda_1(y,t),\ \lambda_2(y,t)\right\}$ функциялары (2.3.2) басқаруға қойылған шектеулерді алып тастауға мүмкіндік береді.

(2.3.5) функцияналындағы интеграл астындағы өрнекті келесі функциялар түрінде қарастырайық:

$$v(y,t)=\frac{1}{2}y(t)^{*}K(t)y(t)+y(t)^{*}q(t),\quad \frac{\partial v}{\partial y}=K(t)y(t)+q(t), \tag{2.3.6}$$

$$\begin{gathered}M(u,y,t)=\frac{1}{2}y^{*}(t)Q(t)y(t)+\frac{1}{2}u^{*}(t)R(t)u(t)+\\ +\lambda_0^{*}(y,t)\big(A(t)y(t)+B(t)u(t)+f(y,u,\varphi,t)-\dot{y}(t)\big)+\lambda_1^{*}(y,t)\big(\alpha(t)-u(t)\big)+\\ +\lambda_2^{*}(y,t)\big(u(t)-\beta(t)\big)+\lambda_3^{*}(y,t)\big(y(t)-W^{-1}(t,T)q(t)\big)\end{gathered} \tag{2.3.7}$$

$\lambda_0(y,t)=K(t)y(t)+q(t)$ белгілеуін қолданып $M(u,y,t)$ функциясын келесідей жазамыз:

$$\begin{gathered}M(u,y,t)=\frac{1}{2}y^{*}(t)\big(Q(t)+\dot{K}(t)\big)y(t)+\frac{1}{2}u^{*}(t)R(t)u(t)+\\ +\big(K(t)y(t)+q(t)\big)^{*}\big(A(t)y(t)+B(t)u(t)+f(y,u,\varphi,t)\big)+y^{*}(t)\dot{q}(t)+\\ +\lambda_1^{*}(y,t)\big(\alpha(t)-u(t)\big)+\lambda_2^{*}(y,t)\big(u(t)-\beta(t)\big)+\lambda_3^{*}(y,t)\big(y(t)-W^{-1}(t,T)q(t)\big).\end{gathered} \tag{2.3.8}$$

Онда (2.3.5) түріндегі Лагранж функцияналын келесі түрде жазамыз:

$$L(u,y)=v(y(t_0),t_0)-v(y(T),T)+\int_{t_0}^{T}M(u,y,t)dt \tag{2.3.9}$$

Қойылған есепті шешу үшін алдымен бірінші ретті экстремумнің қажетті шартын қолданып, ізделініп отырған басқаруды келесі түрде тауып аламыз:

$$u(t)=-R^{-1}(t)B^{*}(t)\big(K(t)y(t)+q(t)\big)+R^{-1}(t)\big(\lambda_1^{*}(y,t)-\lambda_2^{*}(y,t)\big). \tag{2.3.10}$$

Одан кейін, $\varphi(y,t)=R^{-1}(t)\big(\lambda_1^{*}(y,t)-\lambda_2^{*}(y,t)\big)$ белгілеуін енгізіп (2.3.8) функциясындағы $u(t)$ орнына (2.3.10) түріндегі басқаруды қойсақ:

$$\begin{gathered}M(u,y,t)=\frac{1}{2}y^{*}(t)\big(Q(t)+\dot{K}(t)\big)y(t)+\\ +\frac{1}{2}\big[-\big(K(t)y(t)+q(t)\big)B(t)+R(t)\varphi(t)\big]\big[-R^{-1}(t)B(t)\big(K(t)y(t)+q(t)\big)+\varphi(t)\big]+\\ +\big(K(t)y(t)+q(t)\big)^{*}\big(A(t)y(t)-B(t)R^{-1}(t)B(t)\big(K(t)y(t)+q(t)\big)+B(t)\varphi(t)+f(y,u,\varphi,t)\big)+\\ +y^{*}(t)\dot{q}(t)+\lambda_1^{*}(y,t)\big(\alpha(t)-u(t)\big)+\lambda_2^{*}(y,t)\big(u(t)-\beta(t)\big)+\lambda_3^{*}(y,t)\big(y(t)-W^{-1}(t,T)q(t)\big).\end{gathered}$$

Бұл жерде $K(t)$ Рикаттидің матрицалы-дифференциалдық теңдеуін қанағаттандыратын $(n\times n)$ өлшемді матрица. Осы $K(t)$ мен $W(t)$ матрицалары және $q(t)$ векторы $t\in[t_0,T]$ уақыт аралығында келесі дифференциалдық теңдеулерді қанағаттандырады:

$$\dot{K}(t)+K(t)A(t)+A^{*}(t)K(t)-K(t)B_1(t)K(t)+Q(t)=0,\ K(T)=K_T, \tag{2.3.11}$$

$$\dot{W}(t,T)=W(t,T)A_1^{*}(t)+A_1(t)W(t,T)-B_1(t),\quad W(T,T)=0, \tag{2.3.12}$$

$$\dot{q}(t) = -A_1^*(t)q(t) + W^{-1}(t,T)B(t)\varphi(y,t) + W^{-1}(t,T)\,f(y,u,\varphi,t),$$
$$q(t_0) = W^{-1}(t_0,T)y(t_0) \tag{2.3.13}$$

бұндағы:

$$A_1(t) = A(t) - B(t)R^{-1}(t)B^*(t)K(t),$$
$$B_1(t) = B(t)R^{-1}(t)B^*(t). \tag{2.3.14}$$

(2.3.13) дифференциалдық теңдеуінің бастапқы шарты төмендегі ара – қатынастан алынады:

$$y(t) = W(t,T)q(t), \quad t \in [t_0,T].$$

$\lambda_1(y,t) \geq 0,\ \lambda_2(y,t) \geq 0$ көбейткіштері қатаңдықты бәсеңдету шартын қанағаттандыру керек, яғни:

$$\lambda_1^*(y,t)(\alpha(t) - u(t)) = 0, \quad \lambda_2^*(y,t)(u(t) - \beta(t)) = 0. \tag{2.3.15}$$

Ол үшін $\lambda_1(y,t),\ \lambda_2(y,t)$ келесі түрде таңдаймыз:

$$\lambda_1(y,t) = \max\{0;\ \alpha(t) - \omega(y,t)\} \geq 0, \quad \lambda_2(y,t) = \max\{0;\ \omega(y,t) - \beta(t)\} \geq 0,$$
$$\varphi(y,t) = R^{-1}(t)\left(\lambda_1^*(y,t) - \lambda_2^*(y,t)\right), \tag{2.3.16}$$
$$\omega(y,t) = -R^{-1}(t)B^*(t)\left(K(t)y(t) + q(t)\right).$$

Ары қарай, (2.3.11), (2.3.12) теңдеулерінің шешімдері бар болсын және (2.1.15) шарттары орындалсын делік, онда $u(y,t) = \omega(y,t) + \varphi(y,t)$ басқаруымен берілген (2.3.2) жүйесінің қозғалу заңдылығын анықтайтын дифференциалдық теңдеулерді келесі түрде жазамыз:

$$\dot{y}(t) = A_1(t)y(t) - B_1(t)q(t) + B(t)\varphi(y,t) + f(y,u,\varphi,t), \quad y(t_0) = y_0. \tag{2.3.17}$$

(2.3.13) және (2.3.17) дифференциалдық теңдеулердің шешімдерін қолданып (2.3.10) басқаруларына сәйкес келетін (2.3.17) жүйесінің күйі соңғы уақыт ағымында $y(T) = 0$ немесе $y(T) = y_T$ нүктесіне жететінін аламыз.

Есептің қойылымына сай (2.3.9) функцианалының минимум мәнін келесідей аламыз:

$$L(y,u,t) = \frac{1}{2}y^*(t_0)K(t_0)y(t_0) + \frac{1}{2}y(t_0)^*W^{-1}(t_0,T)y(t_0) +$$
$$+\int_{t_0}^{T}[\frac{1}{2}\varphi^*(y,t)R(t)\varphi(y,t) + y^*(t)K(t)\,f(y,u,\varphi,t)]dt. \tag{2.3.18}$$

Жоғарыда қорытылған есептің нәтижелерін теорема түрінде тұжырымдауға

2.3.1–теорема. (2.3.1), (2.3.2) және (2.3.4) есептеріндегі $(y(t),\ u(t)) \in \Delta(t_0,T,y_0,y_T)$ жұптарының тиімді болуы үшін келесі екі пунктің орындалуы қажет және жеткілікті.

1. $y(t)$ келесі дифференциалдық теңдеуді қанағаттандыруы керек:

$$\dot{y}(t) = A_1(t)y(t) - B_1(t)q(t) + B(t)\varphi(y,t) + f(y,u,\varphi,t), \quad y(t_0) = y_0. \tag{2.3.19}$$

2. $u(t)$ басқаруы келесідей анықталуы тиіс:

$$u(y,t) = \omega(y,t) + \varphi(y,t). \tag{2.3.20}$$

Бұндағы $\varphi(y,t)$ мен $\omega(y,t)$ (2.3.16) формулаларымен анықталса, $K(t), W(t,T)$ матрицалары (2.3.11)–(2.3.12) теңдеулерінің шешімі болып табылады. Ал $q(t)$ векторы (2.3.13) дифференциалдық теңдеуін қанағаттандырады.

Синтездеуші басқаруды тұрғызу алгоритмі

Берілген есептегі $\{y(t), u(t)\}$ тиімді жұбтарының сандық мәндері мен графикалық бейнесін алу үшін есепту алгоритмі, яғни (2.3.1)–(2.3.2), (2.3.4) ТБЕ шешу алгоритмі келесі қадамдардан тұрады:

1. Рунге–Кутт әдісін қолданып $[t_0,T]$ аралығында $K(T) = K_T$, $W(T,T) = 0$ шарттарынмен берілген $K(t)$ және $W(t,T)$ матрицаларын анықтау үшін (2.3.11) мен (2.3.12) дифференциалдық теңдеулер жүйесін интегралдаймыз.

Бұл жерде $K_T - (n \times n)$ өлшемді, оң анықталған кез-келген симметриялық матрица екенін атап өткен жөн. (2.3.11) матрицалық дифференциалдық теңдеуінің $K(T) = K_T$ бастапқы шартының әр-түрлі берілуіне байланысты $K(t)$ мен $W(t,T)$ матрицаларының да әр-түрлі мәндерін аламыз. Бірақ, осыған қарамастан (2.3.10) түріндегі $u(t)$ вектор–функциясын аламыз;

2. $y(t_0) = y_0$ шартын беріп $q_0 = W^{-1}(t_0,T)y(t_0)$ есептейміз;

3. Рунге–Кутт әдісін қолданып $[t_0,T]$ аралығында $y(t_0) = y_0$, $q(t_0) = q_0$ шарттарын беріп сәйкесінше (2.3.17) және (2.3.13) дифференциалдық теңдеулерін интегралдаймыз. Осы теңдеулерді интегралдау барысында $y(t)$ тиімді траектория мен $u(t)$ тиімді басқарудың графиктерін аламыз. Егер, есептеу барысында есептің берілген бастапқы және уақыттардағы шартарын өзгертіп және олар үшін сандық есептеулер жүргізу керек болса, онда есептеуді 2 мен 3 қадамдардан қайталаймыз.

4. Интегралдау барысында алынған $y(t)$ тиімді траектория мен $u(t)$ тиімді басқарудың мәндерін пайдаланып (1.4.2)–(1.4.4) шарттарын қанағаттандыратын келесі формулаларды есептейміз:

$$v(t) = \frac{\beta_1 A_1\left(k_1(t)\right)^{\alpha_1} + \beta_2 A_2\left(k_2(t)\right)^{\alpha_2} \dfrac{1-u_1(t)-s_1^s}{u_2(t)+s_1^s\theta_1^s/\theta_2^s}}{(1-\beta_0)A_0\left(k_0(t)\right)^{\alpha_0} \dfrac{1-u_1(t)-s_1^s}{u_3(t)+s_0^s\theta_1^s/\theta_0^s} + \beta_2 A_2\left(k_2(t)\right)^{\alpha_2} \dfrac{1-u_1(t)-s_1^s}{u_2(t)+s_2^s\theta_1^s/\theta_2^s}}; \tag{2.3.21}$$

(1.4.4) баланыстық ара-қатынастың орындалуын қамтамасыз етеді;

$$s_1(t) = u_1(t) + s_1^s, \quad s_0(t) = v(t)(1-s_1(t)), \quad s_2(t) = (1-v(t))(1-s_1(t)); \tag{2.3.22}$$

(1.4.2) инвестиция шартының орындалуын қамтиды;

$$\theta_1(t)=\frac{1}{1+\dfrac{s_0(t)}{u_3(t)+s_0^s\theta_1^s/\theta_0^s}+\dfrac{s_2(t)}{u_2(t)+s_2^s\theta_1^s/\theta_2^s}},$$

$$\theta_0(t)=\frac{v(t)(1-s_1(t))\theta_1(t)}{u_3(t)+s_0^s\theta_1^s/\theta_0^s}, \qquad (2.3.23)$$

$$\theta_2(t)=\frac{(1-v(t))(1-s_1(t))\theta_1(t)}{u_2(t)+s_2^s\theta_1^s/\theta_2^s}.$$

(1.4.3) еңбек шартының орындалуын қамтиды.

2.4 Шексіз уақыт интервалында, басқару парамерлері шектеулермен берілген кластердің үш секторлы экономикалық моделінің сызықты емес моделі үшін тиімді тұрақтылықты іздеу алгоритмі

КҮСЭМ сызықты емес моделін қарастыруды жалғастырамыз, яғни математикалық моделіміз:

1. Кобб – Дуглас түріндегі меншікті өнімнің үш функциясынан:

$$x_i=\theta_i A_i k_i^{\alpha_i}, \quad A_i>0, \quad 0<\alpha_i<1, \quad (i=0,1,2), \qquad (2.4.1)$$

2. Секторларды қормен жарақтандырудың динамикасын сипаттайтын, үш дифференциалдық теңдеулерден:

$$\dot{k}_i=-\lambda_i k_i+(s_i/\theta_i)x_1, \quad k_i(0)=k_i^0, \quad \lambda_i>0, \quad (i=0,1,2), \qquad (2.4.2)$$

3. Және үш баланстық арақатынастан тұрсын:

$$s_0+s_1+s_2=1, \quad s_0\ge 0, \quad s_1\ge 0, \quad s_2\ge 0, \qquad (2.4.3)$$

$$\theta_0+\theta_1+\theta_2=1, \quad \theta_0\ge 0, \quad \theta_1\ge 0, \quad \theta_2\ge 0, \qquad (2.4.4)$$

$$(1-\beta_0)x_0=\beta_1x_1+\beta_2x_2, \quad 0<\beta_i\le 0, \quad i=0,1,2. \qquad (2.4.5)$$

Экономикалық жүйенің күйі (қормен жарақтандыру) (k_0,k_1,k_2) векторымен сипатталады, басқару векторы (s_0,s_1,s_2) –инвестиция ресурстарын бөлгендегі секторлардың үлестерін сипаттаса, $(\theta_0,\theta_1,\theta_2)$ –еңбек ресурстарын бөлгендегі секторлардың үлестерін сипаттайды. x_i –меншікті өнім, β_i –i-ші секторда (i = 0,1,2) өнімді өндіруге кеткен тікелей материалдық шығын. Жүйенің бастапқы күйі (k_0^0,k_1^0,k_2^0) тең.

Тиімді тұрақтылық есебінің қойылымы: берілген сызықты емес жүйені $[0,\infty)$ уақыт интервалында $\left(k_0^0,k_1^0,k_2^0\right)$ бастапқы күйден $\left(k_0^s,k_1^s,k_2^s\right)$ қалаулы күйге көшіру есебі қарастырылады. жүйенің қалаулы соңғы күйі $\left(k_0^s,k_1^s,k_2^s\right)$ретінде, оның тепе-теңдік күйі алынады:

$$k_1^s=\left(\frac{s_1A_1}{\lambda_1}\right)^{\frac{1}{1-\alpha_1}}, \quad k_0^s=\frac{s_0\theta_1A_1(k_1^s)^{\alpha_1}}{\lambda_0\theta_0}, \quad k_2^s=\frac{s_2\theta_1A_1(k_1^s)^{\alpha_1}}{\lambda_2\theta_2} \qquad (2.4.6)$$

$(s_0^s, s_1^s, s_2^s, \theta_0^s, \theta_1^s, \theta_2^s)$ мәндері 3.1–ші бөлімінде анықталған [39].

Ары қарай, төмендегідей белгілеулер енгізіп:

$$y_1(t) = k_1(t) - k_1^s, \quad y_2(t) = k_2(t) - k_2^s, \quad y_3(t) = k_0(t) - k_0^s,$$

$$u_1(t) = s_1(t) - s_1^s, \quad u_2(t) = \frac{s_2(t)\theta_1(t)}{\theta_2(t)} - \frac{s_2^s\theta_1^s}{\theta_2^s}, \quad u_3(t) = \frac{s_0(t)\theta_1(t)}{\theta_0(t)} - \frac{s_0^s\theta_1^s}{\theta_0^s}.$$

$$f(y_1,u_1) = A_1\left[u_1(t)\left(\left(y_1(t)+k_1^s\right)^{\alpha_1} - \left(k_1^s\right)^{\alpha_1}\right) + s_1^s\left(\left(y_1(t)+k_1^s\right)^{\alpha_1} - \left(k_1^s\right)^{\alpha_1} - \alpha_1\left(k_1^s\right)^{\alpha_1-1} y_1(t)\right)\right],$$

$$f(y_1,u_2) = A_1\left[u_2(t)\left(\left(y_1(t)+k_1^s\right)^{\alpha_1} - \left(k_1^s\right)^{\alpha_1}\right) + \frac{s_2^s\theta_1^s}{\theta_2^s}\left(\left(y_1(t)+k_1^s\right)^{\alpha_1} - \left(k_1^s\right)^{\alpha_1} - \alpha_1\left(k_1^s\right)^{\alpha_1-1} y_1(t)\right)\right],$$

$$f(y_1,u_3) = A_1\left[u_3(t)\left(\left(y_1(t)+k_1^s\right)^{\alpha_1} - \left(k_1^s\right)^{\alpha_1}\right) + \frac{s_0^s\theta_1^s}{\theta_0^s}\left(\left(y_1(t)+k_1^s\right)^{\alpha_1} - \left(k_1^s\right)^{\alpha_1} - \alpha_1\left(k_1^s\right)^{\alpha_1-1} y_1(t)\right)\right].$$

$$A = \begin{pmatrix} -\lambda_1 + A_1\alpha_1(k_1^s)^{\alpha_1-1}s_1^s & 0 & 0 \\ A_1\dfrac{s_2^s\theta_1^s}{\theta_2^s}\alpha_1(k_1^s)^{\alpha_1-1} & -\lambda_2 & 0 \\ A_1\dfrac{s_0^s\theta_1^s}{\theta_0^s}\alpha_1(k_1^s)^{\alpha_1-1} & 0 & -\lambda_0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} A_1(k_1^s)^{\alpha_1} & 0 & 0 \\ 0 & A_1(k_1^s)^{\alpha_1} & 0 \\ 0 & 0 & A_1(k_1^s)^{\alpha_1} \end{pmatrix}$$

басқару объектісінің математикалық моделін векторлық формада берілген дифференциалдық теңдеулер жүйесі ретінде жазайық:

$$\dot{y}(t) = A(t)y(t) + B(t)u(t) + f(y,u,\varphi,t), \quad y(t_0) = y_0, \quad t \in [t_0, \infty). \tag{2.4.7}$$

Бұндағы $y = (y_1, y_2, y_3)^*$ объект күйінің векторы, $u = (u_1, u_2, u_3)^*$ басқару векторы және бұл вектордың компоненттері екі жақты шектеулермен берілген:

$$u(t) \in U(t) = \left\{u \mid \gamma_1(t) \le u(t) \le \gamma_2(t), t \in [t_0, T];\ \ \gamma_1,\ \gamma_2 \in C[t_0, T]\right\}. \tag{2.4.8}$$

(2.4.7) жүйені басқарылатын жүйе деп қарастырамыз. Ал *A, B* матрицалары басқарушылық шартын қанағаттандырады ($rang[B, AB, ...A^{n-1}B] = n.$). $\Delta(t_0)$ - белгілеуі арқылы, $u(t) \in U(t),\ t \in [t_0, \infty)$ шартын қанағаттандыратын және (2.4.7) жүйенің $y(t,u)$ траекториясына сәйкес келетін, барлық басқарулар жиынын белгілейік. Және осы $\Delta(t_0)$ жиынында объектінің күйі мен басқаруынан тәуелді функциянал берілсін:

$$J(u) = \frac{1}{2}\int_{t_0}^{\infty}[y^*(t)Q(t)y(t) + u(t)^*R(t)u(t)]\,dt, \tag{2.4.9}$$

Бұндағы Q–жартылай оң және R–оң анықталған матрицалар.

Есептің қойылымы: (2.4.8) екі жақты шектеуін қанағаттандыратын және (2.4.7) жүйені (2.4.9) функцианалын минимумдай отырып, $[t_0, \infty)$ уақыт интервалында $y(t_0) = y_0$ берілген бастапқы күйден $y(\infty) = 0$ қалаулы соңғы күйге

ауыстыратын $u(y,t)$ тұрақтандырушы басқаруды табу қажет [54].

Қойылған есепті шешу үшін, $\lambda_0 = K(t)y(t)$ түріндегі Лагранж көбейткішін қолданамыз. Ол үшін (2.4.9) берілген функционалға (2.4.7) жүйесін Лагранж көбейткішіне көбейтіп қосамыз және $\lambda_1^*(t)[\alpha - u(t)] + \lambda_2^*(t)[u(t) - \beta]$ $\lambda_1(t) \geq 0,\ \lambda_2(t) \geq 0$ өрнегін де қосамыз. Нәтижесінде төмендегідей Лагранж функционалын алатынымыз:

$$\begin{aligned} L(y,u) = \int_{t_0}^{\infty} \{ & \frac{1}{2} y^*(t)Q(t)y(t) + \frac{1}{2} u^*(t)R(t)u(t) + \\ & + \big(K(t)y(t)\big)^* \big(A(t)y(t) + B(t)u(t) + f(y,u,\varphi,t) - \dot{y}(t)\big) + \\ & + \lambda_1^*(t)[\alpha - u(t)] + \lambda_2^*(t)[u(t) - \beta]\}\, dt, \end{aligned} \tag{3.4.10}$$

$K(t)$ – оң анықталған симмертиялы матрица.

Ары қарай есепті шешу үшін келесі функцияларды енгізейік:

$$V(y,t) = \frac{1}{2} y^*(t)K(t)y(t), \quad \frac{\partial V}{\partial y} = K(t)y(t), \tag{2.4.11}$$

$$\begin{aligned} M(y,u,t) = & \frac{1}{2} y^*(t)Q(t)y(t) + \frac{1}{2} u^*(t)R(t)u(t) + \\ & + \big(K(t)y(t)\big)^* \Big(A(t)y(t) + B(t)u(t) + f(y,u,\varphi,t) - \dot{y}(t) \Big) + \\ & + \lambda_1^*(t)[\alpha - u(t)] + \lambda_2^*(t)[u(t) - \beta]. \end{aligned} \tag{2.4.12}$$

Онда (2.4.10) функционалын келесідей жазамыз:

$$L(y,u) = V(y_0,t_0) + \int_{t_0}^{\infty} M(y,u,t)dt. \tag{2.4.13}$$

Ізделініп отырған тиімді басқару өрнегін (2.4.12) теңдеуінен $u(t)$ параметрі бойынша туынды алу арқылы келесі қатынастан табамыз:

$$R(t)u(t) + B^*(t)K(t)y(t) = \lambda_1(y,t) - \lambda_2(y,t), \tag{2.4.14}$$

$K(t)$ матрицамыз $t \in [t_0, \infty)$ интервалында келесі дифференциалдық теңдеуді қанағаттандырады:

$$\dot{K}(t) + K(t)A(t) + A^*(t)K(t) - K(t)B_1(t)K(t) + Q(t) = 0,\ K(T) = K_T, \tag{2.4.15}$$

бұндағы:

$$\begin{aligned} & B_1(t) = B(t)R^{-1}(t)B^*(t) \\ & A_1(t) = A(t) - B(t)R^{-1}(t)B^*(t)K(t), \\ & \varphi(y,t) = R^{-1}(t)[\lambda_1(y,t) - \lambda_2(y,t)], \\ & \lambda_1(y,t) = \max\{0;\ \alpha - \omega(y,t)\} \geq 0, \\ & \lambda_2(y,t) = \max\{0;\ \omega(y,t) - \beta\} \geq 0, \\ & \omega(y,t) = -R^{-1}(t)B^*(t)K(t)y(t). \end{aligned} \tag{3.4.16}$$

$\lambda_1(y,t) \geq 0,\ \lambda_2(y,t) \geq 0$ көбейткіштерін (2.4.16) түрінде таңдау, қатаңдықты толықтыру шартының орындалуын қаматамасыз етеді. Яғни:

$$\lambda_1^*(y,t)[\alpha - u(t)] = 0,\ \ \lambda_2^*(y,t)[u(t) - \beta] = 0.$$

(2.4.15) теңдеуінің шешімі бар болсын делік, онда жүйенің қозғалыс заңдылығын анықтайтын дифференциалдық теңдеу келесідей түрде болады:

$$\dot{y}(t) = A_1(t)y(t) + B(t)\varphi(y,t) + f(y,u,\varphi,t), \quad y(t_0) = y_0. \tag{2.4.17}$$

Шексіз уақыт интервалында, басқару параметрлері шектеулермен берілген ТБЕ шешу жолынан алынған нәтижелерді төмендегідей түрде тұжырымдауға болады.

2.4.1 – теорема. $[t_0, \infty)$ интервалында $Q(t)$ - жартылай оң анықталған, ал $R(t)$- оң анықталған матрицалар болсын. (2.4.7) жүйесі t_0 уақытында басқарылатын жүйе болсын делік. Онда (2.4.7) – (2.4.9) есептеріндегі $(y(t),\ u(t))$ жұбының тиімді болуы үшін келесі шарттардың орындалуы жеткілікті:

1. $y(t)$ траекториясының келесі дифференциалдық теңдеуін қанағаттандыруы

$$\dot{y}(t) = A_1(t)y(t) + B(t)\varphi(y,t) + f(y,u,\varphi,t), \quad y(t_0) = y_0.$$

2. $u(t)$ басқаруының төмендегі түрде анықталуы

$$u(t) = \omega(y,t) + \varphi(y,t)$$

$K(t)$ матрицасы (2.4.15) дифференциалдық теңдеуін қанағаттандырады, ал $\omega(y,t),\ \varphi(y,t)$ векторлық-функциялары (2.4.8) басқару параметрлерінің шарттары орындалатындай түрде (2.4.16) формулаларынан анықталады.

Тиімді тұрақтылық есебін шешу алгоритмі. (2.4.7) – (2.4.9) ТБЕ компьютерде шешудің алгоритмін сипаттайық:

1. $[t_0, \infty)$ интервалында $K(T) = K_T$ шартымен берілген $K(t)$ матрицасын анықтау үшін (2.4.15) дифференциалдық теңдеуін интегралдаймыз. Бұндағы K_T матрицалық алгебралық Риккати теңдеуінің оң анықталған шешімі;

2. $[t_0, \infty)$ интервалында $y(t_0) = y_0$ бастапқы шартымен берілген (2.4.17) дифференциалдық теңдеулер жүйесін интегралдаймыз. Осы теңдеуді интегралдау барысында тиімді траектория $y(t)$ мен тиімді басқарудың $u(t)$ графиктерін аламыз.

3. Интегралдау барысында алынған $y(t)$ тиімді траектория мен $u(t)$ тиімді басқарудың мәндерін пайдаланып (2.4.3)–(2.4.5) шарттарын қанағаттандыратын келесі формулаларды есептейміз:

$$v(t) = \frac{\beta_1 A_1\left(k_1(t)\right)^{\alpha_1} + \beta_2 A_2\left(k_2(t)\right)^{\alpha_2} \dfrac{1 - u_1(t) - s_1^s}{u_2(t) + s_1^s\theta_1^s / \theta_2^s}}{(1-\beta_0)A_0\left(k_0(t)\right)^{\alpha_0} \dfrac{1 - u_1(t) - s_1^s}{u_3(t) + s_0^s\theta_1^s / \theta_0^s} + \beta_2 A_2\left(k_2(t)\right)^{\alpha_2} \dfrac{1 - u_1(t) - s_1^s}{u_2(t) + s_2^s\theta_1^s / \theta_2^s}}; \tag{2.4.18}$$

(2.4.5) баланыстық ара-қатынастың орындалуын қамтамасыз етеді;

$$s_1(t) = u_1(t) + s_1^s, \quad s_0(t) = v(t)(1 - s_1(t)), \quad s_2(t) = (1 - v(t))(1 - s_1(t)); \tag{2.4.19}$$

(2.4.3) инвестиция шартының орындалуын қамтиды;

$$\theta_1(t) = \frac{1}{1 + \dfrac{s_0(t)}{u_3(t) + s_0^s \theta_1^s / \theta_0^s} + \dfrac{s_2(t)}{u_2(t) + s_2^s \theta_1^s / \theta_2^s}},$$
$$\theta_0(t) = \frac{v(t)(1 - s_1(t))\theta_1(t)}{u_3(t) + s_0^s \theta_1^s / \theta_0^s}, \quad \theta_2(t) = \frac{(1 - v(t))(1 - s_1(t))\theta_1(t)}{u_2(t) + s_2^s \theta_1^s / \theta_2^s}. \tag{2.4.20}$$

(2.4.4) еңбек шартының орындалуын қамтиды.

2–бөлім бойынша тұжырымдар

Диссертациялық жұмыстың бұл бөлімінде экономика салаларын БАЖ үшін «Секторлар арасында еңбек және инвестиция ресурстарын тиімді үлестіруді модельдеу және жоспарлау» модулінің ақпаратты өңдеу процесінің объектісі ретінде қарастырылатын КҮСЭМ үшін синтездеуші басқаруды тұрғызу алгоритмдері қарастырылды. Аталмыш модуль үшін алгоритмдерді тұрғызу КҮСЭМ тұрақты тепе–теңдік күйін анықтаудан басталды. Есепті шешу барысында арнайы түрдегі Лагранж көбейткіштері әдісі қолданылып, секторлар арасында еңбек пен инвестициялық ресурстар үлесін және секторларды қормен жарақтанудың тиімді тұрақтылық нүктелерін іздеудің жаңа алгоритімі тұрғызылды және бұл алгоритм жабық түрдегі КҮСЭМ –де ресурстарды тиімді үлестіруге мүмкіндік береді.

Сонымен қатар КҮСЭМ үшін ТБЕ қойылымы және басқару параметрлері шектеулерін ескеріп, кері байланыс қағидасына негізделген сызықты және сызықты емес басқарылатын жүйелер үшін синтездеуші басқаруларды тұрғызудың конструктивті әдістері мен алгоритмдері ұсынылды, бұл алгоритмдер $\lambda_0 = K(t)y(t) + q(t)$ арнайы түрдегі Лагранж көбейткіштерінің көмегімен жүзеге асырылды. Сондай – ақ, сызықты емес жүйелерге арналған ТБЕ арнайы түрдегі Лагранж көбейткіштерін қолданып Беллман – Калабтың квазисызықтандыру әдісіне негізделген алгоритм сипатталды.

Ары қарай ЭЕМ сандық есептеулер жүргізуге арналған ТБЕ шешу алгоритмі әзірленді. Шешу алгоритмі қадамдарында атап өткендей $K(0) = K_0$ шартын өздігінше таңдау $K(t), q(t), \ (t_0 \le t \le T)$ және $u = u(x,t)$ тиімді басқарудың әр-түрлі формаларын алуға мүмкіндік беретіндігі келтірілді.

Жалпы көптеген зерттеулерде есепті жеңілдету мақсатында шексіз уақыт аралығын қарастырады, алайда экономикалық жүйелердегі басқару есептерінде белгіленген уақытта мақсатқалған көрсеткіштерге қол жеткізу есептері қарастырылатындықтан, диссертациялық жұмыста ақырлы уақыт аралығындағы траектория ұштары бекітілген ТБЕ қарастырылған және осы жұмыста ұсынылып отырған алгоритмдердің артықшылығы - экономиканың ағымдағы күйін ескеріп шешім қабылдауға мүмкіндік беретін кері байланыс әдісін қолданып басқаруды тұрғызуда болып табылады.

3 ЭКОНОМИКА САЛАЛАРЫН БАСҚАРУДЫҢ АҚПАРАТТЫҚ ЖҮЙЕСІ ҮШІН СЕКТОРЛАР АРАСЫНДА ЕҢБЕК ЖӘНЕ ИНВЕСТИЦИЯ РЕСУРСТАРЫН ТИІМДІ ҮЛЕСТІРУДІ МОДЕЛЬДЕУ ЖӘНЕ ЖОСПАРЛАУ МОДУЛІН ӨҢДЕУ

Диссертациялық жұмыстың бұл бөлімде басқарудың ақпараттық жүйесі (БАЖ) түсінігіне анықтама беріліп, оның қалыптасу тарихы мен қазіргі кездегі даму бағыттары мен күйлеріне аналитикалық шолу жасалынған. Сонымен қатар сеторлы экономикада шешім қабылдау процесінде тиімді басқару теориясын қолданатын ақпараттық жүйені құру проблемалары көрсетілген және экономика салаларын БАЖ үшін «Секторлар арасында еңбек және инвестиция ресурстарын тиімді үлестіруді модельдеу және жоспарлау» модулінде КҮСЭМ үшін синтездеуші басқаруларды тұрғызу алгоритмдері өңделеді.

3.1 Басқарудың ақпараттық жүйесі түсінігі, қысқаша тарихы және қазіргі жағдайы

Бүгінгі таңда кез-келген салада АЖ алатын орны ерекше. Мысалы, экономика саласында үлкен көлемдегі ақпараттарға аналитикалық талдау жасау арқылы тиімді шешім қабылдау өте күрделі және біліктілік пен ұзақ уақытты талап ететін процесс. Ал осындай үлкен көлемдегі мәліметтерге сапалы және кешенді талдау жасау мақсатында автотаммандырылған жүйені қолдану: біріншіден шешім қабылдау процесін жеңілдетсе, екіншіден уақытты үнемдейді.

Жалпы кез-келген экономикалық объектіні - максимум пайда табуды, сұраныстарды қанағаттандыруды немесе одан әрі өсуді қамтамасыз етуде резервті қалыптастыруды және т.б. мақсаттаған, көп құрылымды, көп деңгейлі динамикалық күрделі жүйе ретінде қарауға болса, ал ондағы модель объектілері мен олардың арасындағы байланыстарды АЖ ретінде қарастыруға болады. Осындай жүйені басқару өте күрделі динамикалық процесс болып табылады және бұндай жүйелердегі басқару деп– қойылған мақсатқа жету үшін жүйе элементтеріне әсер ету процесін қарастыруға болады.

Динамикалық жүйелерді оңтайландыру есептеріндегі тиімді шешімді іздеудің сандық процедурасын құру тақырыбында көптеген ғылыми мақалалар жарияланған. Бұл бағыттың басында Л.С. Понтрягин [55, 56], Л.В. Канторович, Н.Н. Красовский, Р. Беллман [57], В.Ф. Кротов, В.И. Гурман [58], А.Брайсон, Р.Калман, А. Айзекс сында ұлы математиктер тұр. Тиімді басқарудағы талдау проблемасының әртүрлі аспектілері Н.Н. Красовскидің, А.Я. Дубовицкидің, А.А. Кротовтың, Ф.М. Кирилловтың, Ф.П. Васильевтің, В.М. Матросовтың, А.А. Красовскидің, В.И. Зудовтың, Ж.Л. Егоровтың жұмыстарында терең зерттелініп қарастырылған [59].

ТБЕ-нің әртүрлі математикалық тұжырымдары және олардың классификациясы жайлы [60-63] жазса, тиімді басқарудың заманауи теориясында қолданылатын модельдер мен әдістерге толық шолулар [64-66] еңбектерінде қарастырылған.

Отанымызда экономикадағы ТБЕ зерттеумен айналысатындар қатарына

С.А. Айсагалиев, М.Н. Калимолдаев, З.Н. Мурзабеков, Ш.А. Айпанов, Т.Н. Бияров, С.Я. Серевайский сынды ғалымдарды жатқызуға болады [67-71].

Яғни БАЖ деп- басқару функцияларын орындауға арналған ақпаратты жинау, сақтау, өңдеу және ұсыну мақсатында бірыңғай жүйеге біріктірілген ұйымдық, техникалық, бағдарламалық және ақпараттық құралдардың жиынтығын айтамыз.

БАЖ белгілі бір экономикалық объект үшін құрылады және қолданушының сұранысы бойынша ақпаратты сақтауға, өңдеуге, іздеуге және ұсынуға негізделген. Аталмыш жүйе басқаруға және шешім қабылдауға байланысты кез-келген ТБЕ шеше алмайтын болғандықтан, ол арқылы тек шектеулі көлемдегі ақпарат өңделінеді.

Басқару жүйесі келесі негізгі басқару функцияларын орындайды:

– *жоспарлау* - түрлі уақыт кезеңдерінде экономикалық жүйенің жұмыс істеу мақсаттарына қол жеткізудің тиімді жолдарын айқындайды;

– *есеп* - бизнес-операциялардың нәтижесінде басқару объектісінің ағымдағы жай-күйін көрсетеді;

– *талдау* - шаруашылық объектінің жұмыс істеуін зерттеуге байланысты және осы ауытқулардың себептерін анықтаумен жоспарланған нақты көрсеткіштердің ауытқуларын анықтайды;

– *бақылау* - мақсатқа жету процесінде жоспарланған нақты деректердің ауытқуын анықтауға байланысты;

– *реттеу* - резервтерді анықтау және тиімді басқару шешімдерін қабылдау үшін объектідегі барлық бизнес-процестерді жедел басқаруға негізделген.

Кез-келген ұйымдық жүйе - өздерінің басқару процестері мен басқару бөліктері бар бірнеше объектілерден тұратын күрделі кешен болып табылады. Сондықтан күрделі жүйелердің жұмысын үйлестіру үшін көп деңгейлі басқару құрылымы енгізіледі.

Жалпы БАЖ қызметінің ерекшеліктері: ақпаратты циклдық түрде өңдеу, ішкі есептеулердің күрделілігі, жүйелердің динамикалық сипаты, сондай-ақ жоспарлауда жүйелілікті қолдануда болып табылады.

Ең алғашқы экономикадағы АЖ ретінде XIX ғасырдың 60 – жылдары материалдық қажеттілікті жоспарлауды автоматтандыруға негізделген MRP (Mayterial Requirements Planning) және өндіріс қуаттылығына деген сұранысты жоспарлауды автоматтандыруға негізделген CRP **(**Capacity Requirements Planning) жүйелерін айтуға болады. Бұл жүйелер ағымдағы сұраныс жоспарын орындау үшін қажетті материалдар мен шикізаттарды сатып алу және өндіріс қуатын оңтайлы жүктеуге мүмкіндік беретін материалдық қажеттіліктерді жоспарлауды жүзеге асырады. Одан кеінгі 1980 жылдары MRP II жүйесі шықты, бұл жүйе жоспарлау есебін шешіп қана қоймай, өндіріс үрдісін модельдеу мүмкіндіктеріне де ие болды [72, 73].

Экономикада АЖ деген талаптардың көбейуі мен оған деген сұраныстың артуына байланысты, өткен ғасырдың 90-шы жылдарында кәсіпорынның ресурстарын кешенді жоспарлайтын ERP (Enterprise Resource Planning) жаңа жүйесі пайда болды. Егер MRP II белгілі бір бөлімдегі өндіріс ресурстарын ғана

жоспарласа, ERP жүйесі кәсіпорынның барлық ресурстарын (қаржы, сұраныс, қызметкерлерді және т.б. басқару) жоспарлауды жүзеге асыра алды. Ары қарай аталмыш жүйе жаңғыртылып және модернизацияланып – бір бағытта жұмыс жасайтын компаниялар арасындағы байланыс модельдерін жүзеге асыратын ERP II жүйесінің жаңа нұсқасы пайда болды. Сонымен қатар осы жылдары өнім туралы барлық ақпаратты басқаруды қамтамасыз ететін ұйымдастырушы-техникалық жүйе PDM (Product Data Management) пайда болды. Аталмыш жүйеде инженерлік мәліметтерді басқару (Engineering Data Management – EDM), өнім жайлы ақпаратты басқару (Product Information Management – PIM), техникалық мәліметтерді (Technical Data Management – TDM) және техникалық ақпараттарды басқару (Technical Information Management – TIM) технологиялары қолданылды.

Қазіргі таңда елімзідегі мемлекеттік дәрежедегі салаларды БАЖ-не: «E-Agriculture» агроөнеркәсіптік саланы басқарудың бірыңғай АЖ, денсаулық сақтау саласындағы «Дәрі-дәрмекпен қамтамасыз етуді басқару жүйесі» атты АЖ, Ұлттық экономика министірлігі аясындағы «Қаржыландыру жоспарын құру және түсіндіру» атты АЖ, Қазақстан Республикасының қаржысын басқарудың бірыңғай ақпараттық технологиялар инфрақұрылымын ұсынатын «е-МинФин» АЖ, Үкіметтің қаржылық ресурстарын тиімді басқаруды және бюджеттің атқарылуын бақылауды қамтамасыз ететін «Қазнашылдық-Клиент» АЖ т.с.с жүйелерді жатқызуға болады.

3.2 Экономика салаларын БАЖ үшін «Секторлар арасында еңбек және инвестиция ресурстарын тиімді үлестіруді модельдеу және жоспарлау» модулін өңдеу

АЖ бүгінгі таңдағы жетістіктеріне қарамастан экономика салаларын БАЖ құруда айтарлықтай проблемалар кездеседі. Мысалы нарықтық экономикада өндірістің бәсекелестік қабілетін арттыру және оны дамытуды жоспарлауда, экономиканы секторларға бөліп, сол сектор арасында шектеулі ресурстарды (инвестицияларды, еңбек ресурстарын, еңбек құралдарын және т.б.) тиімді үлестіру есебін шешу қажеттілігі жиі туындайды және осы типтегі есептерді шешу, соған арналған автоматтандырылған жүйені құру өте күрделі.

Бұндай проблеманың бар болуының өзіндік себебі де бар, мысалы ТБЕ әсіресе, сызықты емес түрінде берілген ТБЕ есептеу әдісін құру үшін, сол пәндік аймақтың маманы ғана емес, сондай-ақ программалау, алгоритмдеу, математикалық модельдеу дағдыларына ие бола білуі керек. Бұның өзі аталмыш дағдыларға ие болатын әртүрлі сала мамандардың бірігіп жұмыс жасауын, жаңа ақпараттық технологияларды және қомақты қаржыны талап етеді. Осы сынды мәселелердің болуы, экономика салаларын БАЖ немесе осы функцияларды жүзеге асыратын модульдерді құру мен өңдеу жаңа проблемаларды тудырады. Бұл проблеманы шешу үшін – секторлы экономикадағы тиімді басқарудың әрбір есебі үшін жекеленген есептеу алгоритмдерін өңдеу, оны ЭЕМ-де сандық есептеулер алу мақсатында программалық жабдықтарын тұрғызуды жүзеге асыру қажет. Яғни, секторлы экономиканың ТБЕ шешуге негізделген жүйені немесе модульді тұрғызу үшін,

осы жүйеде жұмыс жасай алатын, теориялық немесе алгоритм тұрғысынан жаңа әдісті беретін икемді функцияларды өңдеу күрделі проблема.

Осындай проблемалардның бар болуы негізінде зерттеу жұмысында экономика салаларын БАЖ үшін «Секторлар арасында еңбек және инвестиция ресурстарын тиімді үлестіруді модельдеу және жоспарлау» модулін өңдеу мақсаты қойылды.

Экономикалық салаларды БАЖ-сі әрқайсысы өз міндеті мен қызметін орындайтын бірнеше ішкі жүйелерден тұрады және оның құрылымдық сызбасы 3.2.1-суретте көрсетілген.



3.2.1-Сурет. Экономика салаларын БАЖ-нің құрылымы

Осы жүйедегі функционалдық ішкі жүйелер – басқару жүйесі функцияларын жүзеге асыратын есептер жиыны мен функционалды ішкі жүйелердің жиынтығын береді. Қолдану ортасына байланысты функционалдық ішкі жүйелердің құрамы әртүрлі болады.

Зерттеу жұмысында функционалдық ішкі жүйелер құрамындағы **«Басқару функциялары»** ішкі жүйесі зерттелінеді. Бұл ішкі жүйе: есепке алу және есеп беру, экономикалық талдау, жоспарлау және болжам жасау, салаларды басқару сынды функцияларды жүзеге асырады. Оның негізгі міндеттеріне - жедел (оперативті) басқару, бухгалтерлік есеп және экономиканы жоспарлау мен талдау жатады. 3.2.2-суретте «Басқару функциялары» ішкі жүйесінің негізгі ішкі жүйелері мен олардың модульдері көрсетілген.

Диссертациялық жұмыста «Жоспарлау және болжам жасау» ішкі жүйесіндегі «Секторлар арасында еңбек және инвестиция ресурстарын тиімді үлестіруді модельдеу және жоспарлау» модулі өңделді. Бұл модуль КҮСЭМ үшін синтездеуші басқаруларды тұрғызу алгоритмдерін жүзеге асырады.

Аталмыш модульді өңдеу ҚР Ұлттық экономика министірлігінің құрамындағы «Экономика салаларын дамыту» департаменті үшін секторлар

арасында еңбек және инвестиция ресурстарын тиімді үлестіруді жоспарлауға және модельдеуге мүмкіндігін береді.



3.2.2-суретте «Басқару функциялары» ішкі жүйесінің құрылымы

Аталмыш модуль диссертациялық жұмыстың екінші бөлімінде сипатталған КҮСЭМ үшін ТБЕ қарастырады және келесідей мүмкіндіктерді береді:

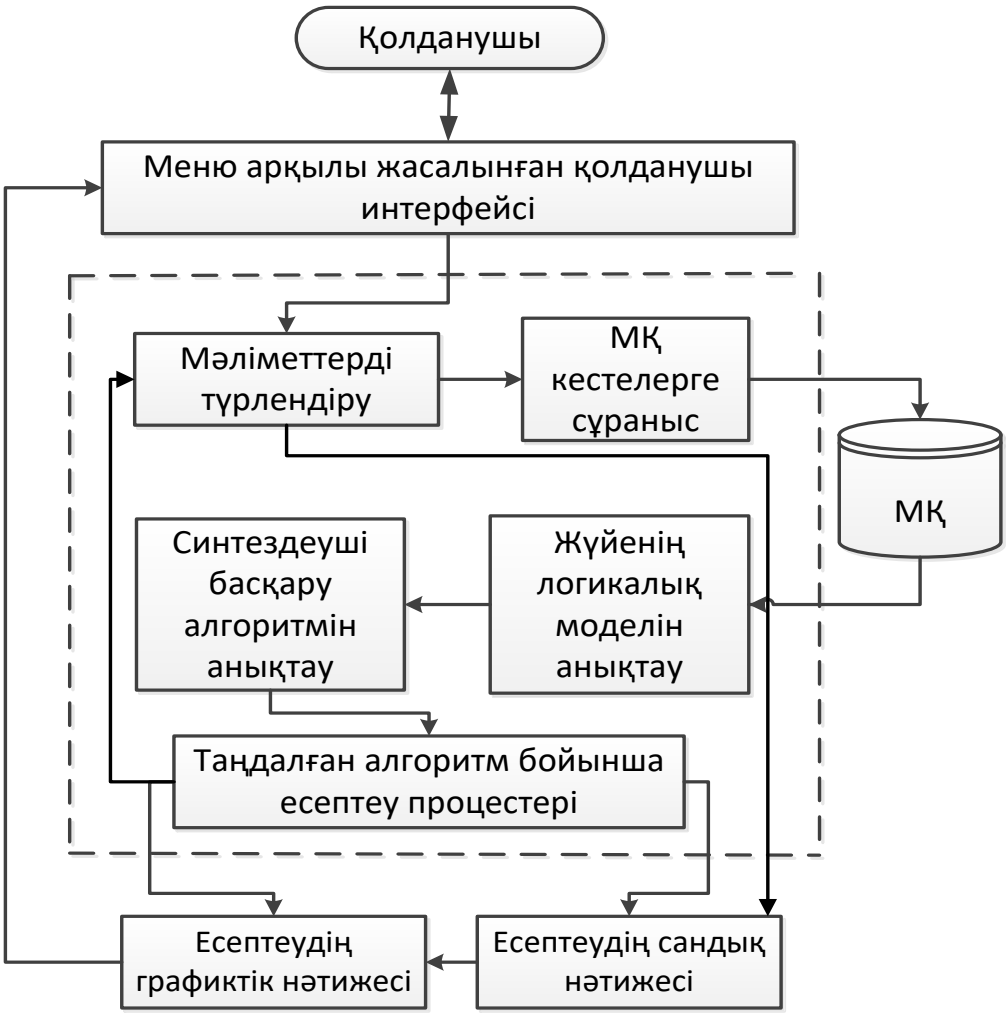
- Секторлар арасында еңбек және инвестиция ресурстарын тиімді үлестіру жайлы ақпараттарды жинау, сақтау және өңдеу;
- КҮСЭМ үшін тиімді басқарудың әрбір есебі үшін жекеленген есептеу алгоритмдерін өңдеуді жүзеге асыру;
- Осы алгоритмдер негізінде ЭЕМ-де сандық есептеулер жүргізу және олардың графиктерін тұрғызу;
- Сандық есептеулерден алынған нәтижелерді қолданушыға ыңғайлы кесте түрінде сақтау.



3.2.3–Сурет. «Секторлар арасында еңбек және инвестиция ресурстарын тиімді үлестіруді модельдеу және жоспарлау» модулінің құрылымдық сызбасы

«Секторлар арасында еңбек және инвестиция ресурстарын тиімді үлестіруді модельдеу және жоспарлау» модулінің жұмыс жасау логикасы келесі сатылардан тұрады (3.2.4 – сурет):

1. **Қолданушы интерфейсі** (қолданушы мен жүйе арасындағы сапалы және ыңғайлы түрдегі байланысты орнататын негізгі құрал болып табылады);
2. **Мәліметтерді түрлендіру блогы** (абсолюттік шамада берілген мәліметтерді салыстырмалы шамаға алмастыру және керсінше түрлендіру процесі);
3. **Мәліметтер қорымен (МҚ) байланыс блогы** (МҚ кестелерге сұраныс жасау арқылы жүзеге асырылады, яғни модель коэффициенттерін кестелерден алу және есептеу нәтижелерін сақтау);
4. **Логикалық модельді анықтау блогы** (жүйенің күйін сипаттайтын математикалық модель анықталады);
5. **Синтездеуші басқару алгоритмін анықтау блогы** (яғни логикалық модельге байланысты тиімді синтездеуші басқаруды тұрғызу алгроитмі таңдалынады);
6. **Таңдалған алгоритм бойынша есептеу процесі блогы**;



3.2.4 – Сурет. «Секторлар арасында еңбек және инвестиция ресурстарын тиімді үлестіруді модельдеу және жоспарлау» модулінің жұмыс жасау логикасы

Ары қарай, аталмыш модульдің әрбір компонентіне жеке-жеке тоқталайық:

Қолданушы интерфейсі– қолданушы мен жүйе арасындағы сапалы және ыңғайлы түрдегі байланысты орнататын негізгі құрал болып табылады.

Қолданушы интерфейсі «Кіріс (Input Data)» және «Шығыс (Output Data)» мәліметтері деп аталатын екі бөліктен тұрады.

«Input Data» бөлігіндегі **кіріс мәліметтері** – кластерлі экономиканың үш секторынан, басқару объектісіне келіп түскен ақпараттар. Олар векторлық және матрицалық түрде болады және оларға келесі түрдегі ақпараттар жатады:

– L – еңбек расурстары жайлы ақпарат;

– I – инвестиция көлемі жайлы ақпарат;

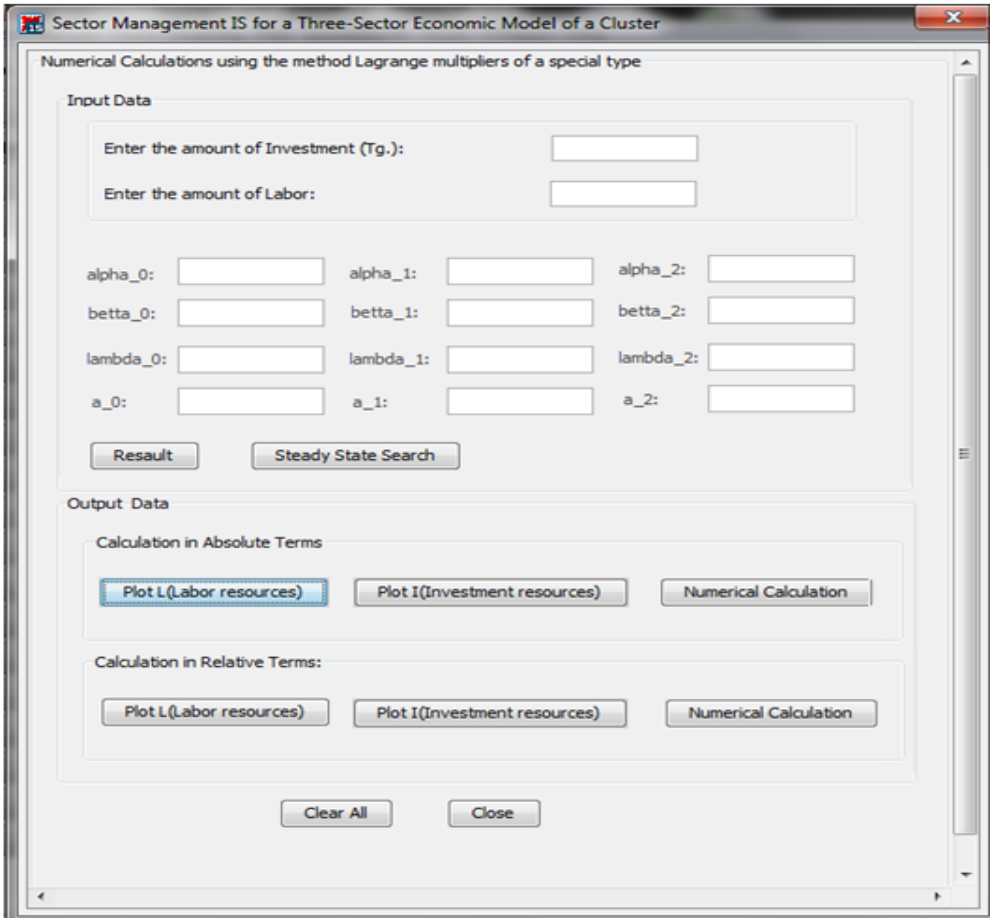
– t_0 бастапқы және T соңғы уақыт интервалы;

– α_i – i – ші сектордағы $(i = 0, 1, 2)$ қорлардың икемділік коэфициенті (егер қор 1% өсетін болса, өнімнің қанша пайыз өсетінін көрсетеді);

– β_i – i-ші сектордағы $(i = 0, 1, 2)$ өнім бірлігін шығаруға жұмсалған тікелей материалдық шығындар және ол тұрақты коэффициент;

– λ_i – i – ші сектордың $(i = 0, 1, 2)$ қормен жарақтандырылуының тозу коэффициеті;

– $A_i (i = 0, 1, 2)$ – ғылыми–техникалық прогрестің бейтараптық коэффициенті;

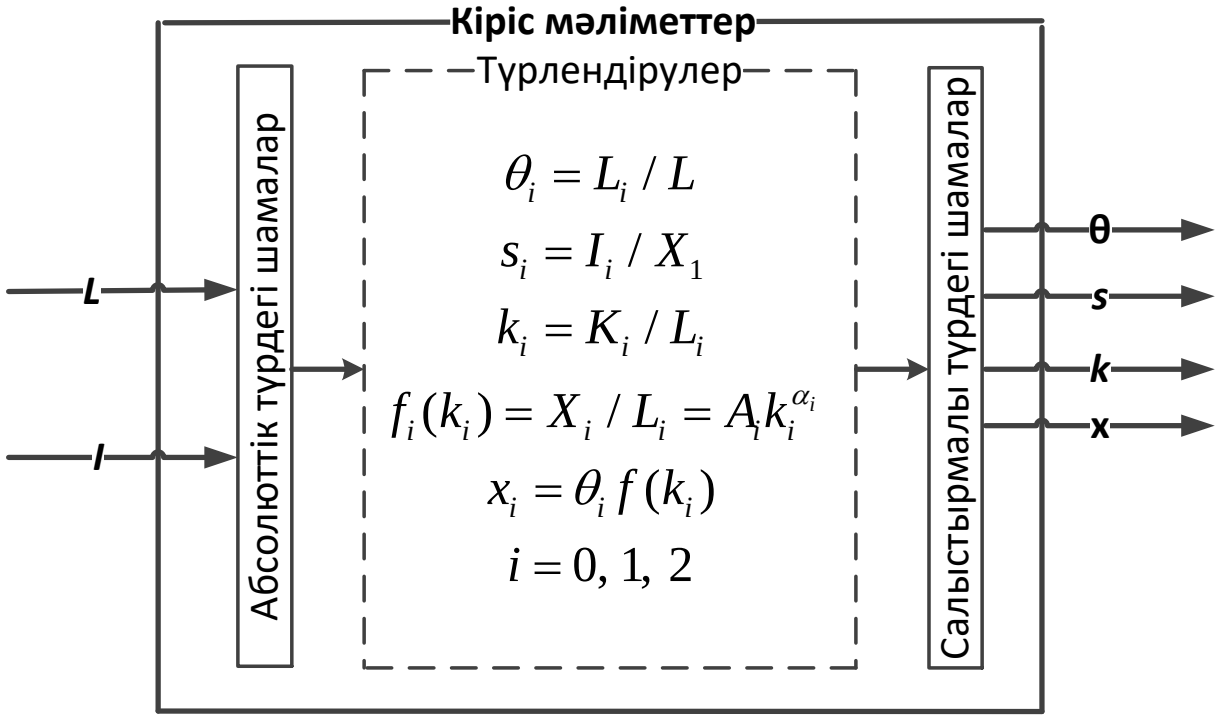


3.2.5–Сурет. Секторлар арасында еңбек және инвестиция ресурстарын тиімді үлестіруді модельдеу және жоспарлау модулінің қолданушы интерфейсі

Осы кіріс ақпараттарына байланысты жүйенің ішінде мәліметтерді өңдеу процестері басталады.

Есептің абсолютті немесе салыстырмалы түрдегі нәтижесін сандық есептеулер және график түрінде қолданушы интерфейсінің «Output Data» бөлігіндегі сәйкесінше батырмалар арқылы көруге болады.

Мәліметтерді түрлендіру блогында абсолюттік шамада берілген мәліметтерді салыстырмалы шамаға алмастыру және керсінше түрлендіру процесі жүзеге асырылады. Жалпы есептеу барысында параметрлерді анықтау үшін оларды салыстырмалы көрсеткіштермен сипаттаған ыңғайлы, сол себепті аталмыш блоктың «**кіріс мәліметтер**» деп аталатын ішкі жүйесінде - сыртқы ортадан абсолюттік шамамен берілген ақпараттарды салыстырмалы шамаларға түрлендіру процесі жүзеге асырылады. Аталмыш ішкі жүйедегі түрлендіру процесі келесідей түрде болады (3.2.6 – сурет):



3.2.6–Сурет. «Кіріс мәліметтер» ішкі жүйесіндегі түрлендіру процесі

– θ_i – еңбек ресурстарын бөлгендегі секторлардың үлестері;

– s_i – инвестициялық ресурстарды бөлгендегі секторлардың үлестері;

– k_i – секторлардың қормен жарақтандырылуы;

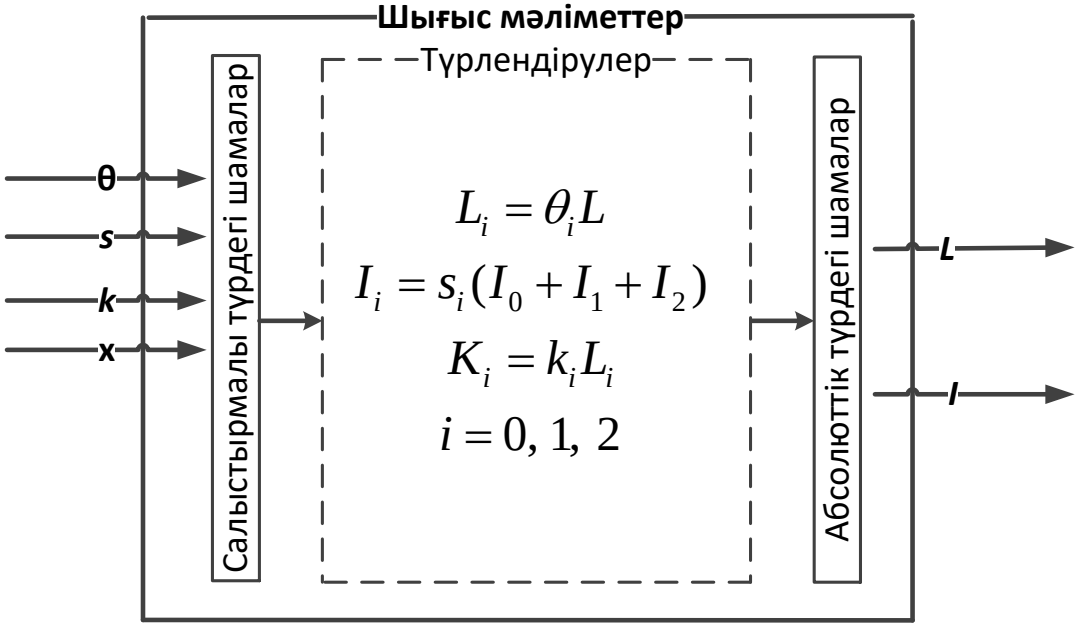
– $f_i(k_i)$ – i –ші сектордағы еңбек өнімділігі;

– x_i – секторлардың меншікті өнімдері;

– α_i – қорлардың икемділік коэфициенті (егер қор 1% өсетін болса, өнімнің қанша пайыз өсетінін көрсетеді);

– $(1-\alpha_i)$ –еңбек ресурсының икемділік коэфициенті (егер еңбек ресурсы 1% өсетін болса, өнімнің қанша пайыз өсетінін көрсетеді).

Мәліметтерді түрлендіру блогының келесі **«шығыс мәліметтер»** деп аталатын ішкі жүйесі – басқару жүйесінен сыртқы ортаға берілетін мәліметтер ағымын, яғни салыстырмалы түрдегі шамаларды абсолютті шамаларға түрлендіреді. Нәтижесінде секторлар арасында еңбек ресурстары, инвестиция және өндірістік қорларды тиімді үлестірудің абсолюттік шамамен берілген сандық мәліметтері және олардың графикалық сызбалары алынады.



3.2.7–Сурет. «Шығыс мәліметтер» ішкі жүйесіндегі түрлендіру процесі

Мәліметтер қоры (МҚ) негізгі алты кестеден тұрады.

3.2.1 – Кесте. «Секторлар арасында еңбек және инвестиция ресурстарын тиімді үлестіруді модельдеу және жоспарлау» модулінің МҚ кестелер

р/с	Кестенің аты	Сипаттамасы
1	const_coefficients	Үш секторлардағы модельдің тұрақты коэффициенттері ($\alpha_i, \beta_i, \lambda_i, A_i, i = 0,1,2$)
2	stable_coefficients	КҮСЭМ-нің тұрақты тепе-теңдік күйінің коэффициенттері ($k_i^s, \theta_i^s, s_i^s, i = 0,1,2$). КҮСЭМ-нің тұрақты тепе-теңдік күйін анықтау алгоритмінен алынған нәтижелер.
3	R_1_table	Ақырлы уақыт интервалында, сызықты теңдеулер жүйесімен және басқару параметрлері шектеулерсіз берілген КҮСЭМ үшін синтездеуші басқаруды іздеу алгоритмі үшін R матрицасының элементтері
4	R_2_table	Ақырлы уақыт интервалында, сызықты теңдеулер жүйесімен және басқару параметрлері шектеулермен берілген кластердің үш секторлы экономикалық моделі үшін синтездеуші басқаруды іздеу алгоритмі үшін R матрицасының элементтері

5	R_3_table	Ақырлы уақыт интервалында, сызықты емес теңдеулер жүйесімен және басқару параметрлері шектеулермен берілген кластердің үш секторлы экономикалық моделі үшін синтездеуші басқаруды іздеу алгоритмі үшін R матрицасының элементтері
6	R_4_table	Шексіз уақыт интервалында, сызықты емес теңдеулер жүйесімен және басқару мәндері шектеулермен берілген кластердің үш секторлы экономикалық моделі үшін тиімді тұрақтандыруды іздеу алгоритмі үшін R матрицасының элементтері

3.2.2 – Кесте. const_coefficients кестесіндегі жазбалар

I	0	1	2
alpha_	0.46	0.68	0.49
beta_	0.39	0.29	0.52
lambda_	0.05	0.05	0.05
A_	6.19	1.35	2.71

Аталмыш коэффициенттерді қолданудағы мақсатымыз, диссертациялық жұмыста ұсынылып отырған әдістің, яғни арнайы түрдегі Лагранж көбейткіштері әдісінің тиімділігін сандық нәтижелер арқылы салыстыра отырып дәлелдеу. Себебі, экономиканың үш секторлы моделі үшін тиімді тұратылық күйді анықтау есебін зерттеумен үш секторлы экономиканың ғылыми мектебінің негізін қалаушы, экономика ғылымдарының докторы, профессор В.А. Колемаев айналысады. Өз еңбектерінде Владимир Алексеевич экономиканың үш секторлы моделін экономиканың салаларына пайдаланады және зерттеп отырған жүйенің тұрақты күйін анықтауда еңбек ресурстарының үлестерін есептеуге мүмкіндік беретін Лагранж көбейткіштерінің классикалық әдісін қолданады.

3.2.3 – Кесте. stable_coefficients кестесіндегі жазбалар

I	0	1	2
ks_	966.56	2411.61	1090,17
teta_s_	0.3944	0.2562	0,3494
s_stab_	0.2763	0.4476	0,2761

3.2.4 – Кесте. R_1_table кестесіндегі жазбалар

matrix_ R_11	matrix_ R_12	matrix_ R_13	matrix_ R_21	matrix_ R_22	matrix_ R_23	matrix_ R_31	matrix_ R_32	matrix_ R_33
6.25	0	0	0	100	0	0	0	25

3.2.5 – Кесте. R_2_table кестесіндегі жазбалар

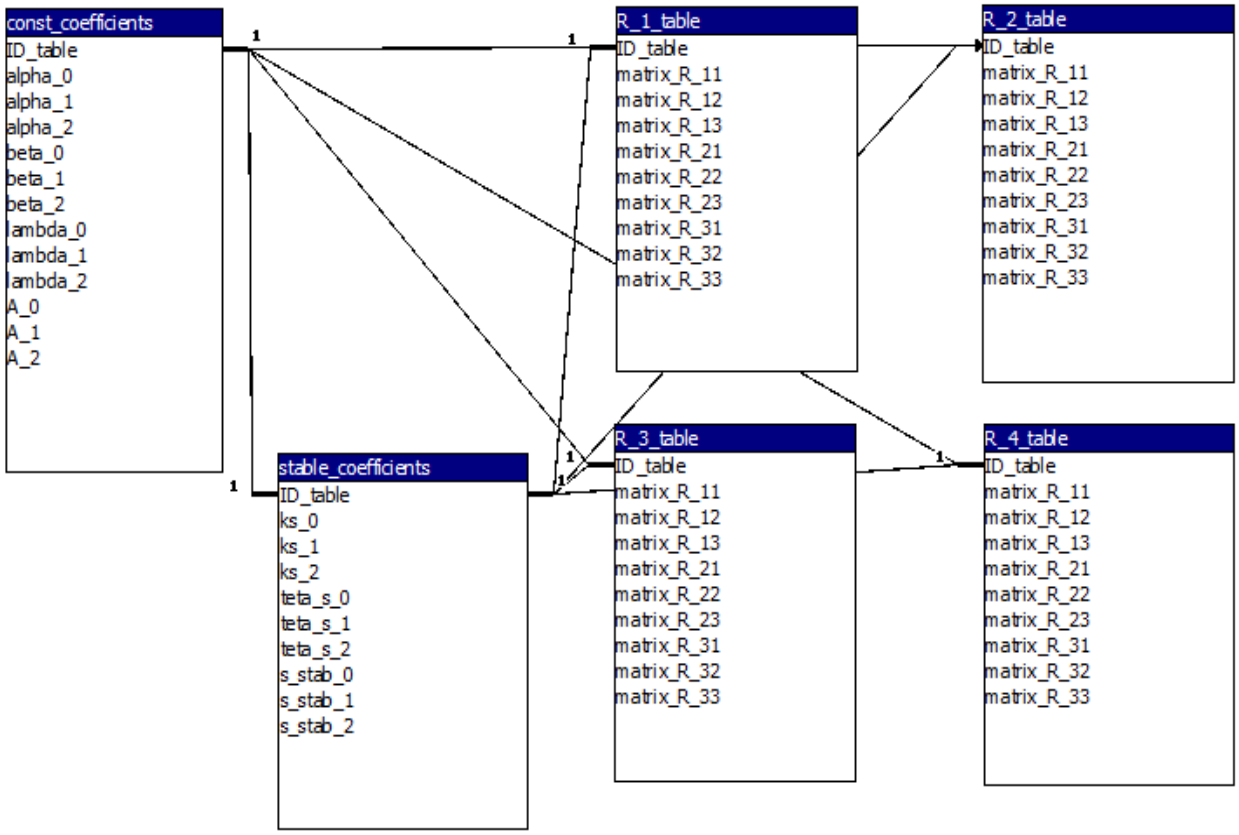
matrix_ R_11	matrix_ R_12	matrix_ R_13	matrix_ R_21	matrix_ R_22	matrix_ R_23	matrix_ R_31	matrix_ R_32	matrix_ R_33
2.77	0	0	0	100	0	0	0	25

3.2.6 – Кесте. R_3_table кестесіндегі жазбалар

matrix_ R_11	matrix_ R_12	matrix_ R_13	matrix_ R_21	matrix_ R_22	matrix_ R_23	matrix_ R_31	matrix_ R_32	matrix_ R_33
0.8	0	0	0	5	0	0	0	5

3.2.7 – Кесте. R_4_table кестесіндегі жазбалар

matrix_ R_11	matrix_ R_12	matrix_ R_13	matrix_ R_21	matrix_ R_22	matrix_ R_23	matrix_ R_31	matrix_ R_32	matrix_ R_33
0.8	0	0	0	5	0	0	0	5



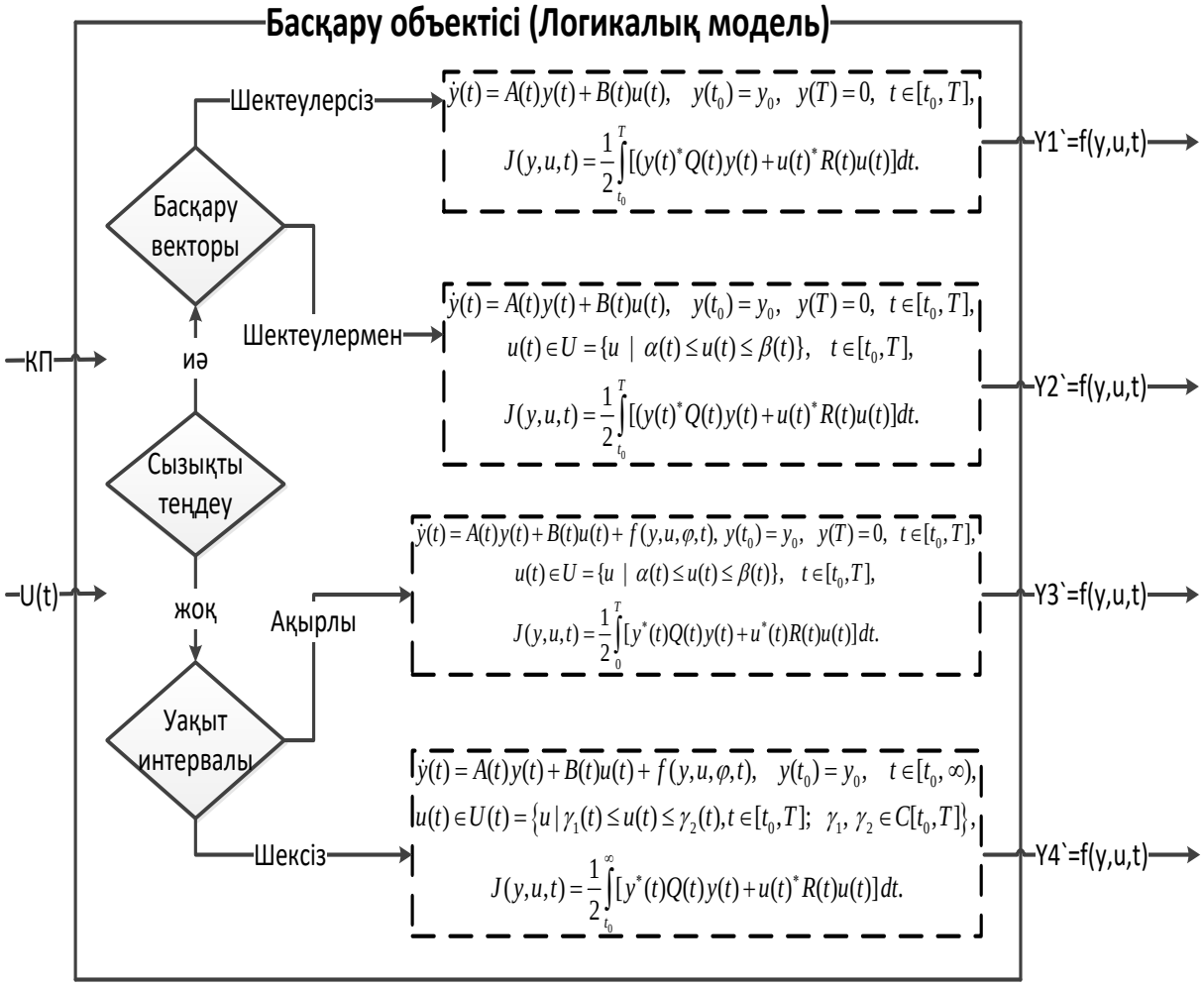
3.2.8 – Сурет. МҚ логикалық сызбасы.

Логикалық модельді анықтау блогында енгізілген мәліметтерге байланысты басқару объектісі таңдалынады, бұл блокта – секторлар арасында ресурстарды тиімді үлестірудің математикалық моделін $(Y_1(t), Y_2(t), Y_3(t), Y_4(t))$ анықтау процесі орындалады.

Экономика салаларын БАЖ-де **басқару объектісі** ретінде, басқарылатын жүйенің күйін сипаттайтын математикалық модель қарастырылады.

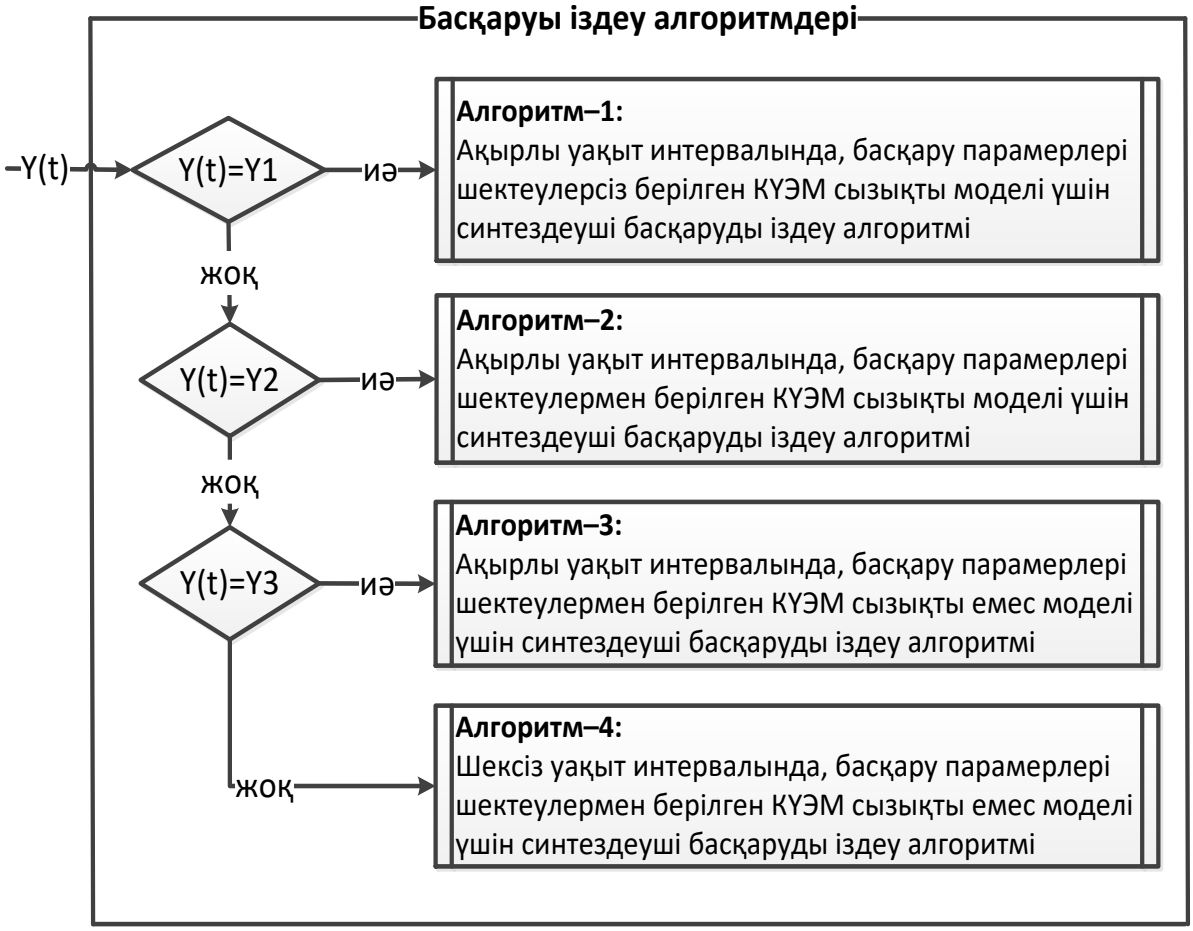
Басқару объектісін таңдау – уақыт интервалына, басқару параметрлеріне қойылған шектеулерге және сыртқы орта ретінде қарастырылатын секторлар арасындағы өзгерісті ескерілу, ескерілмеуіне байланысты жүзеге асырылады. Аталмыш блоктың жұмыс жасау процесі 3.2.9–суретінде көрсетілген.

Суреттегі **КП** қысқартуы– «*Кіріс мәліметтер*» ішкі жүйесінен келіп түскен **кіріс параметрлерін** білдіреді.



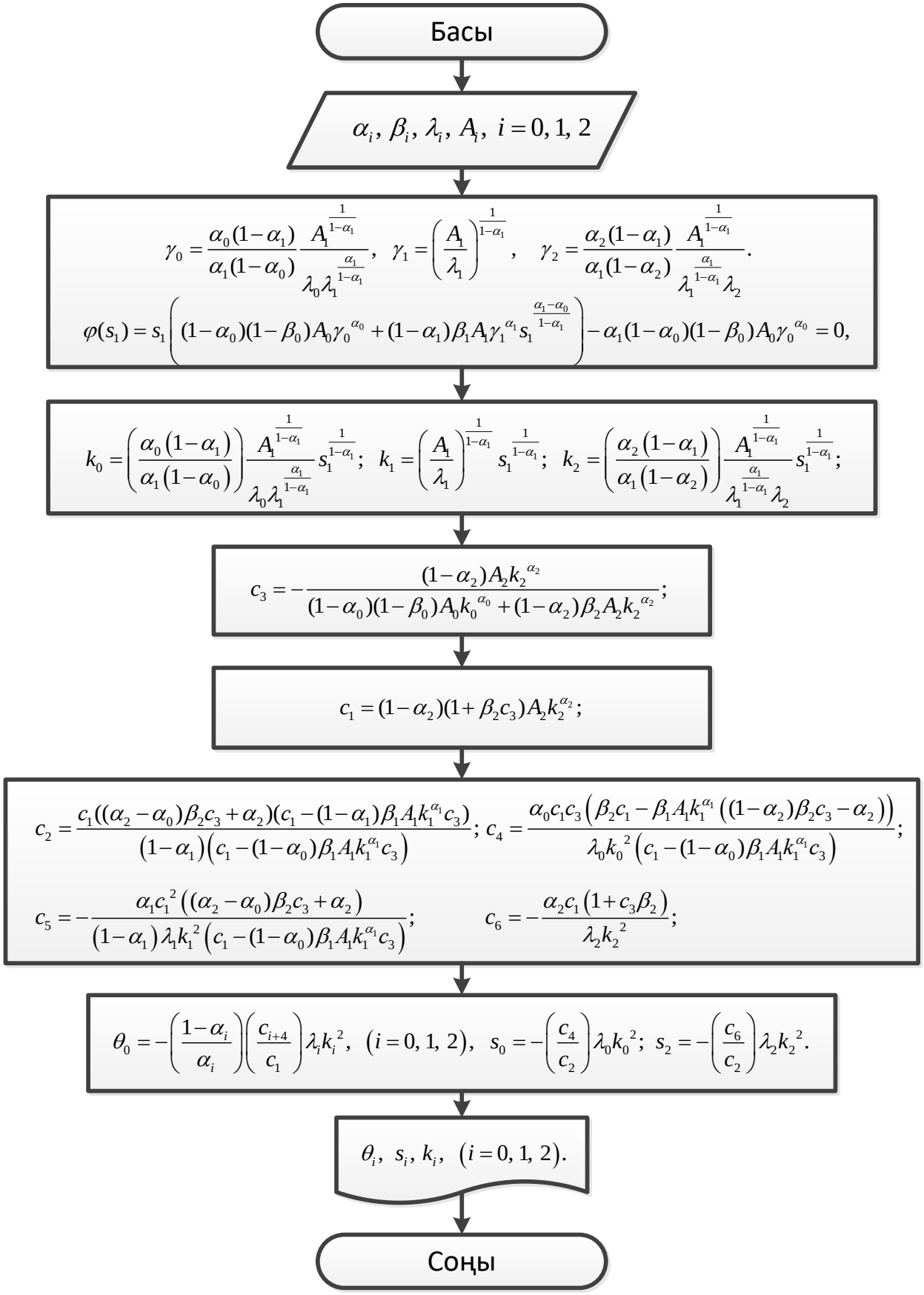
3.2.9–Сурет. «Басқару объектісі (логикалық модель)» блогының құрылымдық схемасы

Синтездеуші басқаруды анықтау алгоритмі блогында басқару объектісіне байланысты $U(t)-$ кері байланыс арқылы байланысқан экономикалық жүйенің күйін реттеуші векторды, яғни тиімді синтездеуші басқаруларды іздеу алгоритмі жүзеге асырылады. Аталмыш блоктың құрылымдық сызбасы келесі суретте көрсетілген.

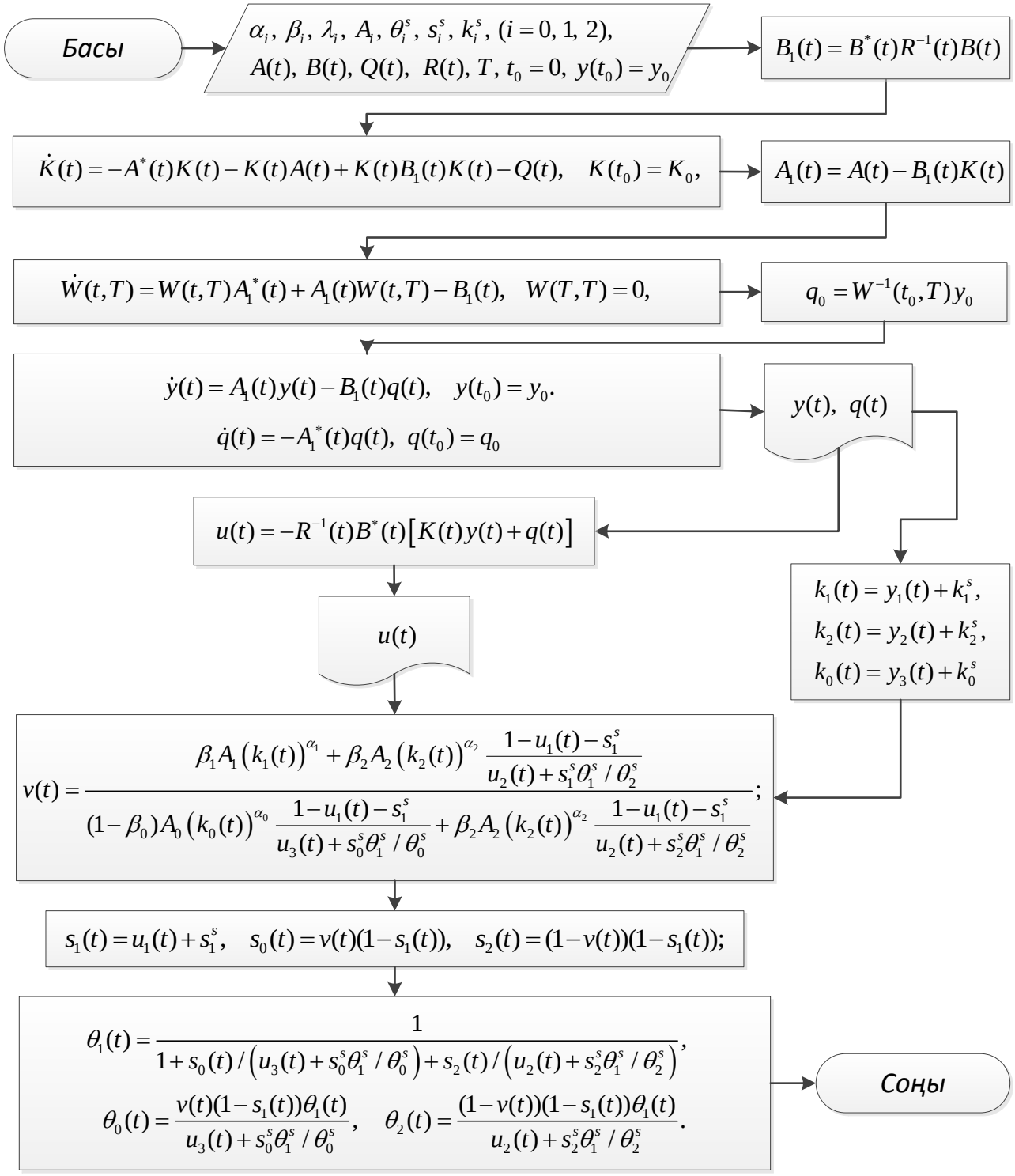


3.2.10–Сурет. «Синтездеуші басқаруды іздеу алгоритмі» блогының құрылымдық схемасы

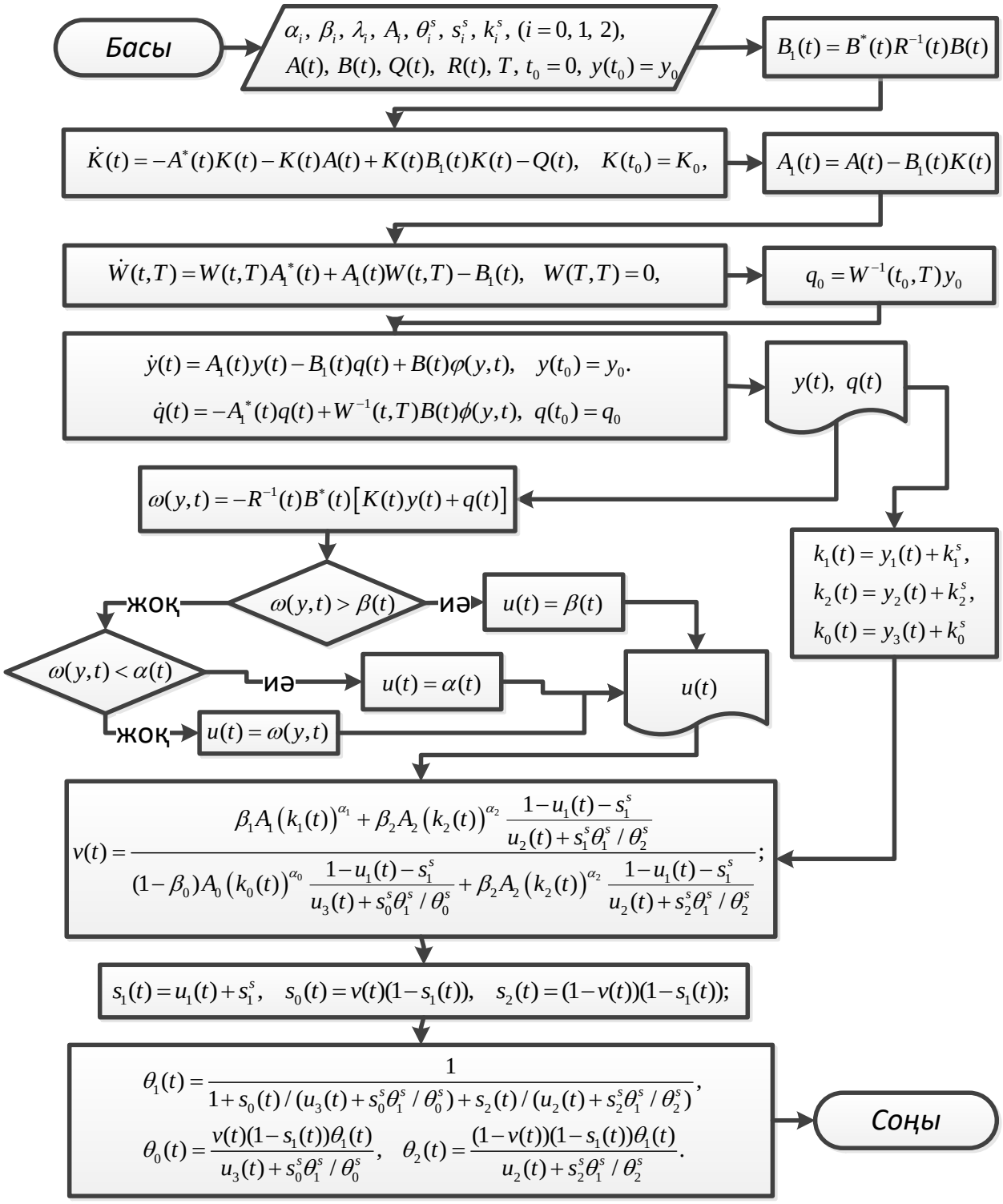
«Секторлар арасында еңбек және инвестиция ресурстарын тиімді үлестіруді модельдеу және жоспарлау» модулінде КҮСЭМ үшін тиімді синтездеуші басқаруларды іздеу алгоритмдерінің блоктық-сызбалары 3.2.11 – 3.2.15 суреттерінде келтірілген.



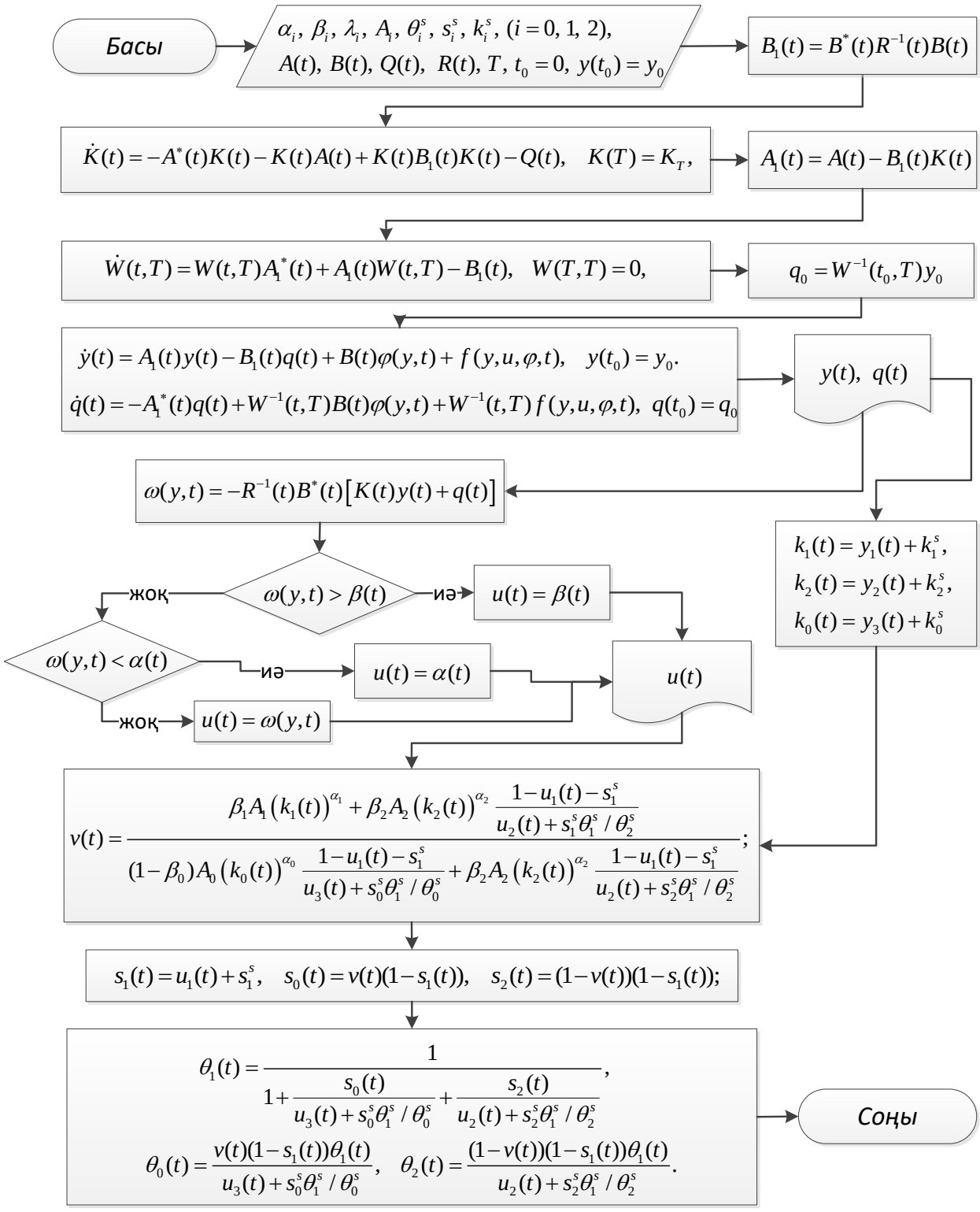
3.2.11-Сурет. КҮСЭМ-нің тұрақты тепе-теңдік күйін анықтау алгоритмінің блок-схемасы



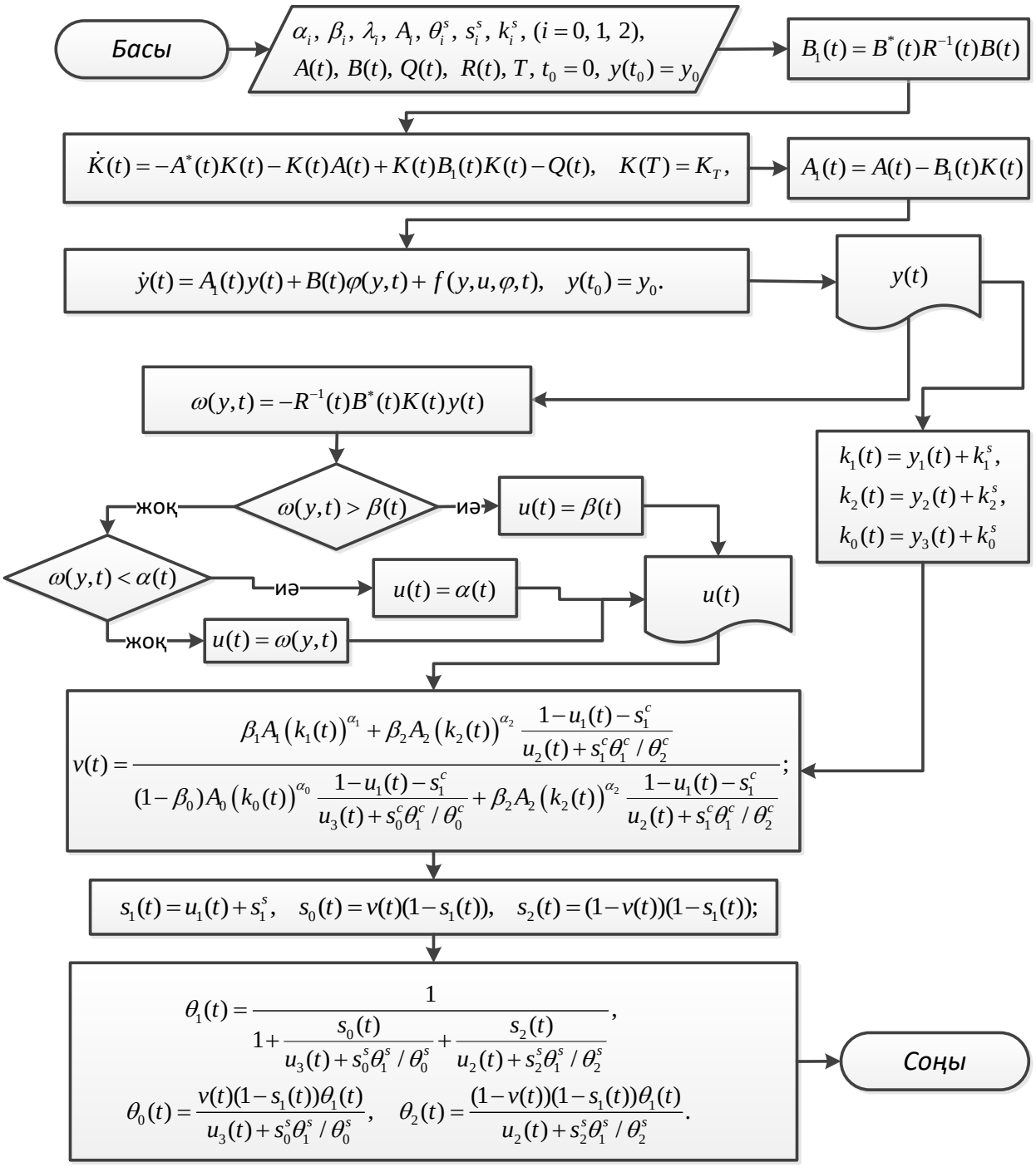
3.2.12-Сурет. Ақырлы уақыт интервалында, басқару парамерлері шектеулерсіз берілген КҮСЭМ сызықты моделі үшін синтездеуші басқаруды іздеу алгоритмінің блок-схемасы



3.2.13 – Сурет. Ақырлы уақыт интервалында, басқару парамерлері шектеулермен берілген КҮСЭМ сызықты моделі үшін синтездеуші басқаруды іздеу алгоритмінің блок-схемасы



3.2.14-Сурет. Ақырлы уақыт интервалында, басқару парамерлері шектеулермен берілген КҮСЭМ-нің сызықты емес моделі үшін синтездеуші басқаруды іздеу алгоритмінің блок-схемасы



3.2.15-Сурет. Шексіз уақыт интервалында, басқару парамерлері шектеулермен берілген КҮСЭМ сызықты емес моделі үшін тиімді тұрақтылықты іздеу алгоритмінің блок-схемасы

Экономика салаларын БАЖ үшін «Секторлар арасында еңбек және инвестиция ресурстарын тиімді үлестіруді модельдеу және жоспарлау» модулін өңдеудегі инструменталдық құралдар. Аталмыш модульді программалау отрасы ретінде Maple визуалдану және модельдеу ортасына кірістірілген Maplet қосымшасы таңдап алынды [74, 75]. Себебі аталмыш есептеу жүйесі есептердің үйреншікті аналитикалық жолын тезірек, аз уақыттың ішінде жеткілікті дәлдікпен шешімдерін алуға мүмкіндік береді, сондай-ақ, Maple компьютерлік бағдарламасында алгебралық,

тригонометриялық, логарифмдік және көрсеткіштік, дифференциалдық теңдеулер мен теңсіздіктерді, олардың түрлі жүйелерін шешудің автоматтандырылған жүйесі жасалынған [76]. Сондай-ақ, мәліметтер қорын басқару жүйесі Microsoft SQLite қолданылды.

3 – бөлім бойынша тұжырымдар

Диссертациялық жұмыстың бұл бөлімінде БАЖ түсінігіне анықтамасы беріліп, оның қалыптасу тарихы мен қазіргі кездегі даму бағыттарына және күйлеріне аналитикалық шолу жасалынып, сеторлы экономикада шешім қабылдау процесінде тиімді басқару теориясын қолданатын автоматтандырылған жүйені құрудың проблемалары көрсетілген.

Сондай – ақ, экономика салаларын БАЖ үшін «Секторлар арасында еңбек және инвестиция ресурстарын тиімді үлестіруді модельдеу және жоспарлау» модулінің құрылымдық сызбасы сызылып, модульдің жұмыс жасау логикасы мен негізгі компоненттеріне сипаттама жасалынған.

Жалпы зерттеу жұмысында ұсынып отырған «Секторлар арасында еңбек және инвестиция ресурстарын тиімді үлестіруді модельдеу және жоспарлау» модулі базасында экономиканың үш секторлы моделі үшін басқару параметрлеріне қойылған шектеулерді ескере отырып ақырлы уақыт аралығында берілген тиімді басқарудың әрбір есебі үшін жекеленген есептеу алгоритмдері өңделген. Осыған байланысты аталмыш модуль секторлар арасында еңбек және инвестиция ресурстарын тиімді үлестіру сынды негізгі функцияларды атқарады.

4 ЭКСПЕРИМЕНТТІК ЕСЕПТЕУЛЕР

Аталмыш бөлімде «Секторлар арасында еңбек және инвестиция ресурстарын тиімді үлестіруді модельдеу және жоспарлау» модулінде 1.3 бөлімде сипатталған КҮСЭМ үшін тұрақты тепе-теңдік күйін анықтау және 2-бөлімде сипатталған алгоритмдер бойынша КҮСЭМ үшін ТБЕ сандық есептеулерінің нәтижелері келтірілген.

Эксперименттік есептеулер жүргізу үшін модель коэффициенттері ретінде 4.1–кестесінде берілген мәліметтерді қолданылды [2]. Аталмыш коэффициенттерді қолданудағы мақсатымыз, диссертациялық жұмыста ұсынылып отырған әдістің, яғни арнайы түрдегі Лагранж көбейткіштері әдісінің тиімділігін сандық нәтижелер арқылы салыстыра отырып дәлелдеу. Себебі, экономиканың үш секторлы моделі үшін тиімді тұратылық күйді анықтау есебін зерттеумен үш секторлы экономиканың ғылыми мектебінің негізін қалаушы, экономика ғылымдарының докторы, профессор В.А. Колемаев айналысады. Өз еңбектерінде Владимир Алексеевич экономиканың үш секторлы моделін экономиканың салаларына пайдаланады және зерттеп отырған жүйенің тұрақты күйін анықтауда еңбек ресурстарының үлестерін есептеуге мүмкіндік беретін Лагранж көбейткіштерінің классикалық әдісін қолданады.

4.1–Кесте. Модель коэффициенттерінің мәндері [25, 283 б.]

i	0	1	2
Модель коэффициенттері			
α_i	0.46	0.68	0.49
β_i	0.39	0.29	0.52
λ_i	0.05	0.05	0.05
A_i	6.19	1.35	2.71

4.1-Кесте мәндері бойынша алныған В.А. Колемаевтің тиімді тұратылық күйді анықтау есебінің шешімі 4.2–кестесінде көрсетілген.

4.2–Кесте. В.А. Колемаевтің Лагранж көбейткіштерінің классикалық әдісімен алған тұрақты тепе-теңдік күйін анықтау есебінің нәтижелері [3, 39 б.]

i	***0***	***1***	***2***
θ_i	0,37	0,08	0,55
s_i	0,32	0,16	0,52
k_i	98,3	337	108

4.1–кестесіндегі модель коэффициенттерін қолданып диссертациялық жұмыста ұсынып отырған арнайы түрдегі Лагранж көбейткіштері әдісі бойынша кластердің тиімді тұрақтылық күйін анықтау есебінің шешімін алдық. Оның нәтижелері 4.3-кестеде көрсетілген.

4.3–Кесте. Арнайы түрдегі Лагранж көбейткіштері әдісімен алынған КҮСЭМ тұрақты тепе-теңдік күйін анықтау есебінің нәтижелері

i	0	1	2
θ_i^s	0.3944	0.2562	0,3494
s_i^s	0.2763	0.4476	0,2761
k_i^s	966.56	2411.61	1090,17
Мақсатты функцияның мәні			
χ_2	29.1544		

4.3-кестеден байқайтынымыз, қормен жарақтану секторындағы инвестициялау көлемінің елеулі ұлғаюы материалдық және тұтынушы секторларындағы инвестицияның азаюына алып келді. Есептеу нәтижесінде алынған 4.3 кесте мен 4.2 кестедгі мәндерді салыстырсақ, ұсынылып ортырған алгоритм бойынша табылған еңбек және инвестиция ресурстарының секторлар арасындағы үлестірімі салыстырмалы түрде тең мөлшерде үлестірілгендігін байқаймыз. Сонымен қатар, барлық секторлардағы k_i қормен жарақтандырылу үлестерінің бірнеше есе өзгергендігін байқаймыз. Бұл өзгерістер өз кезегінде тұтыну заттарының өндірісін ұлғайтады.

4.1.1 Ақырлы уақыт интервалында, басқару парамерлері шектеулерсіз берілген КҮСЭМ-нің сызықты моделі үшін синтездеуші басқаруды тұрғызудың сандық есептеулері

Арнайы түрдегі Лагранж көбейткіштері әдісімен ақырлы уақыт интервалында сызықты дифференциалдық теңдеулер жүйесімен берілген КҮСЭМ-нің сандық шешімі ((2.1.3) және (2.1.5) ТБЕ-нің) мен жүйе күйінің тиімді траекториясы және синтездеуші басқарудың графиктерін тұрғызу үшін модель парамерлерінің мәндерін 4.1 және 4.3 кестелерден аламыз.

Есептеу барысында мақсатты (2.1.5) функцианалын минимумдау және (2.1.3) жүйесін $[t_0, T]$ уақыт аралығында $y(t_0) = y_0$ бастапқы күйінен $y(T) = 0$ соңғы күйіне жеткізу есебі қарастырылды.

Жоспарлау шегінің интервалы $T = 20$. Жүйенің бастапқы күйі төмендегідей түрде берілген:

$$y(t_0) = \left(-500,\ -200,\ 200\right)^*,$$

Сондай–ақ, осы есептеулер үшін $A(t),\ B(t),\ Q(t),\ R(t)$ және K_T матрицалары төмендегідей түрде берілген:

$$A(t) = \begin{pmatrix} -0.016 & 0 & 0 \\ 0.0153 & -0.05 & 0 \\ 0.0136 & 0 & -0.05 \end{pmatrix},\quad B(t) = \begin{pmatrix} 269.306 & 0 & 0 \\ 0 & 269.306 & 0 \\ 0 & 0 & 269.306 \end{pmatrix},\quad R(t) = \begin{pmatrix} 6,25 & 0 & 0 \\ 0 & 100 & 0 \\ 0 & 0 & 25 \end{pmatrix},$$

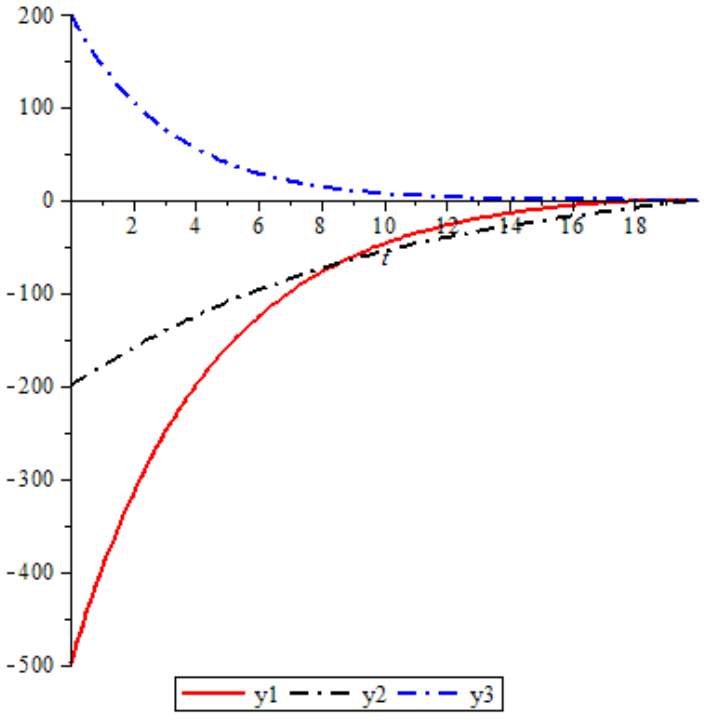
$$Q(t)=\begin{pmatrix} 0.4\cdot10^{-5} & 0 & 0 \\ 0 & 2.5\cdot10^{-5} & 0 \\ 0 & 0 & 2.5\cdot10^{-5} \end{pmatrix},\quad K_T=\begin{pmatrix} 0.17\cdot10^{-4} & 0 & 0 \\ 0 & 1.25\cdot10^{-4} & 0 \\ 0 & 0 & 0.76\cdot10^{-4} \end{pmatrix}.$$

Берілген мәндерге байланысты сандық септеудің нәтижелері 4.1.1.1 – 4.1.1.5 суреттерде көрсетілген. 4.1.1.1–суретте тиімді траекторияның графигі жүйенің тепе-теңдік күйінен ауытқуы түрінде сызылған, осындай графикті тұрғызудың басты себебі, соңғы уақытта ауытқу нөлге ұмтылады. Яғни, соңғы уақыт моментінде жүйе траекториясы тепе-теңдік күйге тура жетуі керек. Есептеу машинасында жүргізілген сандық эксперименттер, қойылған есепті шешуде қарастырылып отырған алгоритмнің тиімді екенін көрсетті. Оны есептеу барысында алынған жүйенің соңғы уақытта тепе-теңдік күйінен ауытқу шамасынан көруге болады:

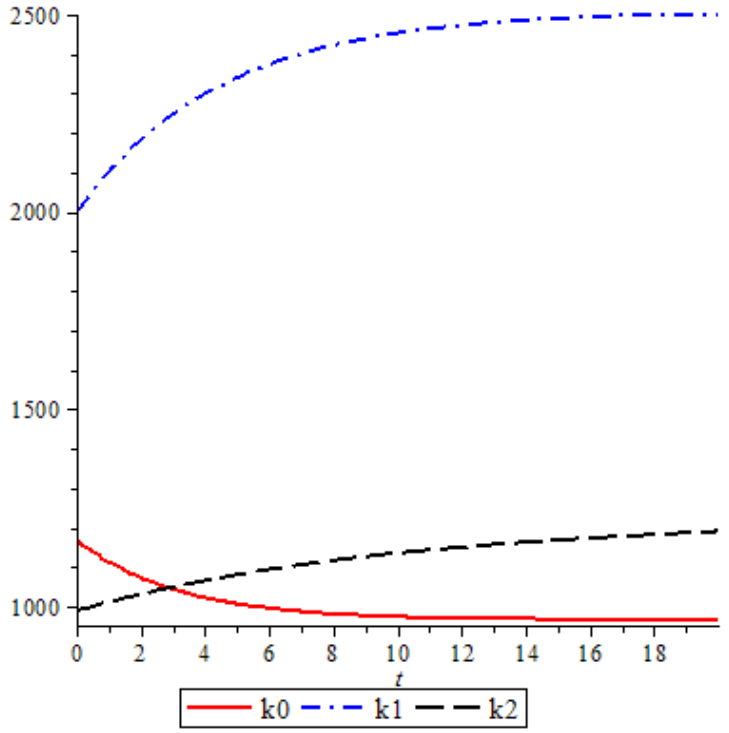
$$y_1(T)=-2.0481\cdot10^{-6},\ \ y_2(T)=9.8941\cdot10^{-7},\ \ y_3(T)=4.1832\cdot10^{-7}.$$

Ал 4.1.1.2–суретте жүйе күйінің графигі $k_1(t)=y_1(t)+k_1^s$, $k_2(t)=y_2(t)+k_2^s$, $k_0(t)=y_3(t)+k_0^s$, түрінде көрсетілсе, 4.1.1.3–суретте тиімді басқарудың графигі тұрғызылған.

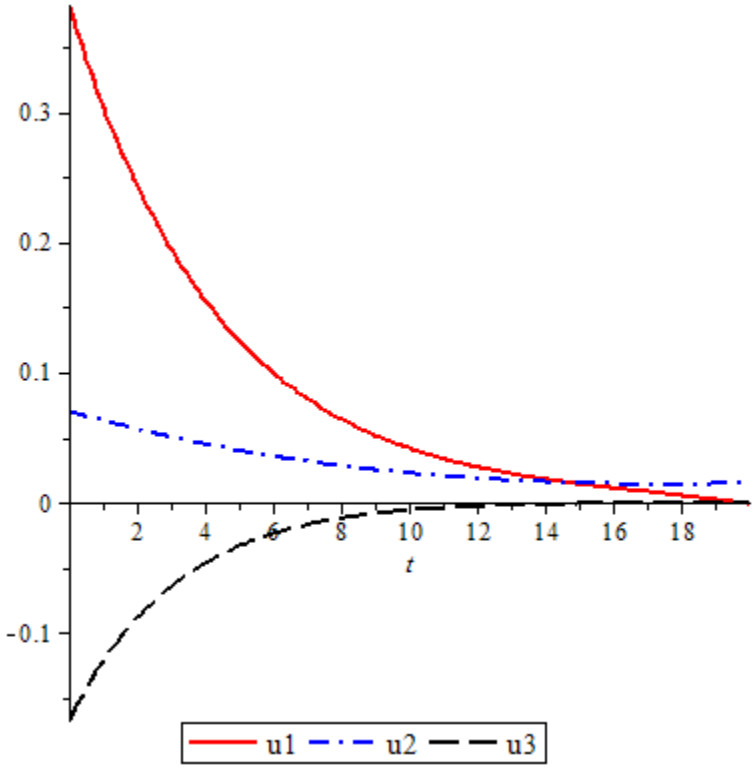
Сонымен қатар есептеу барысында (2.1.16)-(2.1.18) формулаларының көмегімен (1.4.2)-(1.4.4) баланстық ара-қатынастар шартын қанағаттандыратын $(\theta_0(t),\theta_1(t),\theta_2(t))$ еңбек және $(s_0(t),s_1(t),s_2(t))$ инвестиция ресурстарының тиімді үлестірімі табылды (4.1.1.4 және 4.1.1.5 суреттер).



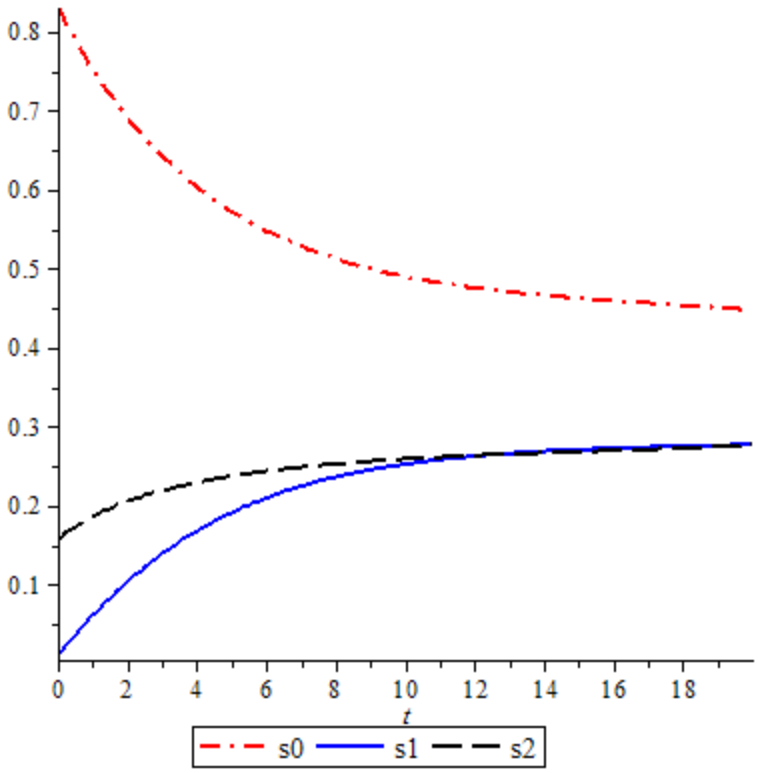
4.1.1.1–Сурет. $y_i(t)\ (i=0,1,2)$ траекториясының графигі



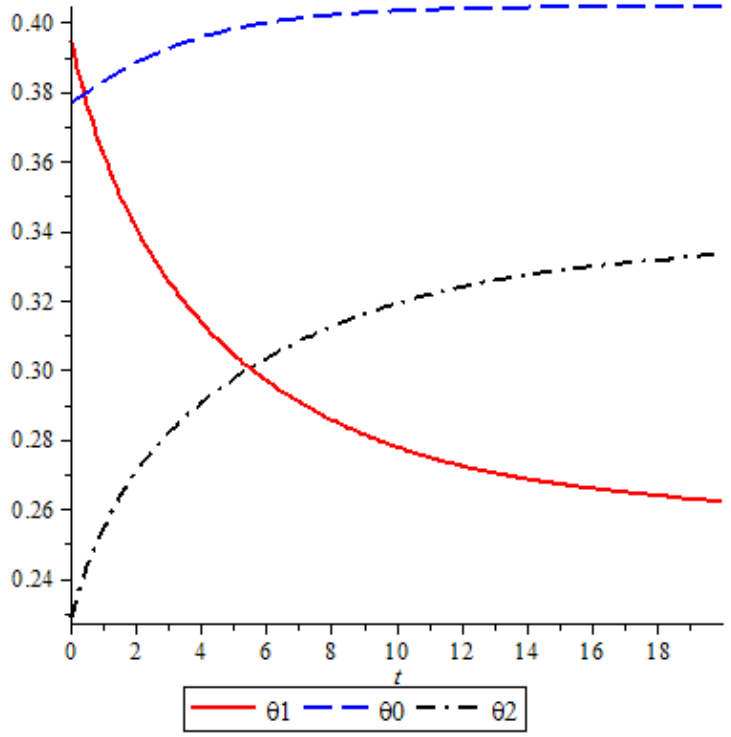
4.1.1.2–Сурет. $k_i(t)\ (i=0,1,2)$ траекториясының графигі



4.1.1.3–Сурет. Тиімді басқарудың графигі



4.1.1.4–Сурет. (1.4.2)-(1.4.4) баланстық ара-қатынастар үшін инвестициялық ресурстарды тиімді үлестірудің графигі



4.1.1.5–Сурет. (1.4.2)-(1.4.4) баланстық ара-қатынастар үшін еңбек ресурстарын тиімді үлестірудің графигі

4.1.2 Сызықты жүйелермен берілген КҮСЭМ тиімді басқару есебін Понтрягиннің максимум қағидасы әдісімен шешу

Зерттеліп отырған жүйенің динамикасы сызықты дифференциалдық теңдеулермен сипатталған және басқарудың сапа өлшемі ретінде квадраттық функционалмен берілген ТБЕ қарастырайық. Есептің қойылымы бойынша осы жүйені белгілі бір бастапқы күйінен берілген уақыт аралығында қажетті соңғы күйге тиімді түрде ауыстыру қажет.

$$\dot{y}(t) = A(t)y(t) + B(t)u(t), \quad y(t_0) = y_0, \quad y(T) = 0, \quad t \in [t_0, T]. \tag{4.1.2.1}$$

бұнда $y(t)$ – басқару объектісі күйінің векторы $(n\times 1)$; $u(t)$ – басқару векторы $(m\times 1)$; $A(t)$, $B(t)$ – сәйкесінше $(n\times n)$ және $(n\times m)$ өлшемді матрицалар және олар (2.1.4) түрінде берілген. t_0 мен T – алдын-ала берілген бастапқы және соңғы уақыттар (айлар).

Басқару сапасы келесі квадраттық функционалмен берілген:

$$J(y,u,t) = \frac{1}{2}\int_{t_0}^{T}[(y(t)^* Q(t)y(t) + u(t)^* R(t)u(t)]dt, \tag{4.1.2.2}$$

бұнда $Q(t)$, $R(t)$ – сәйкесінше $(n\times n)$ және $(m\times m)$ өлшемді берілген симметриялық үздіксіз, шектелген және $Q(t) \geq 0$ (теріс емес анықталған), $R(t) > 0$ (біртекті оң анықталған) шарттарын қанағаттандыратын матрицалар; «жұлдызша» белгісі аудару (transpose) операциясын білдіреді.

Қойылған (4.1.2.1) – (4.1.2.2) ТБЕ шешу үшін Понтрягиннің максимум қағидасын қолданамыз. Ол үшін $\psi(t)$ $n-$векторын енгізе отырып Гамильтон-Понтрягин функциясын келесі түрде анықтаймыз:

$$H(y,u,t,\psi) = [\frac{1}{2}y^*(t)Q(t)y(t) + \frac{1}{2}u^*(t)R(t)u(t)] + \psi^*(t)[A(t)y(t) + B(t)u(t)]. \tag{4.1.2.3}$$

$y(t)-$бастапқы $y(t_0) = y_0$ шартын қанағаттандыратын және қандайда бір $u(t)$ басқару векторына сәйкес келетін (4.1.2.1) жүйесінің шешімі болсын. $\psi(t)$ келесі дифференциалдық теңдеуді қанағаттандырады:

$$\dot{\psi}(t) = -\frac{\partial H}{\partial y} = Q(t)y(t) - A^*(t)\psi(t). \tag{4.1.2.4}$$

Қарастырып отырған ТБЕ үшін интервалдың оң жақ соңында трансверсальдық шарты $y(T) = 0$ түрінде болады. Максимум қағидасына сай, егер $(y(t),u(t))$ жұбы (4.1.2.1)-(4.1.2.2) ТБЕ шешімі болса, онда уақыттың $t \in [t_0,T]$ әр кезеңінде $u = u(t)$ болғанда функция өзінің жоғарғы шегіне жететін $\psi(t)$ түйіндес вектор бар болады, яғни:

$$\max_u H(y,u,t,\psi) = H(y,u,t,\psi)$$

$u(t)$ бойынша $H(y,u,t,\psi)$ функциясының максимум шарты келесі түрде

жазылады:

$$\frac{\partial H}{\partial u} = -R(t)u(t) + B^*(t)\psi(t) = 0. \qquad (4.1.2.5)$$

$$\frac{\partial^2 H}{\partial u^2} = -R(t) < 0, \quad \forall t \in [t_0, T]. \qquad (4.1.2.6)$$

(4.1.2.5) өрнектен $u(t)$ басқаруын келесі түрде табамыз:

$$u(t) = R^{-1}(t)B^*(t)\psi(t). \qquad (4.1.2.7)$$

(4.1.2.5) түріндегі басқаруды (4.1.2.1) және (4.1.2.4) өрнектеріне қойып, келесі түрдегі дифференциалдық теңдеулер жүйесін аламыз:

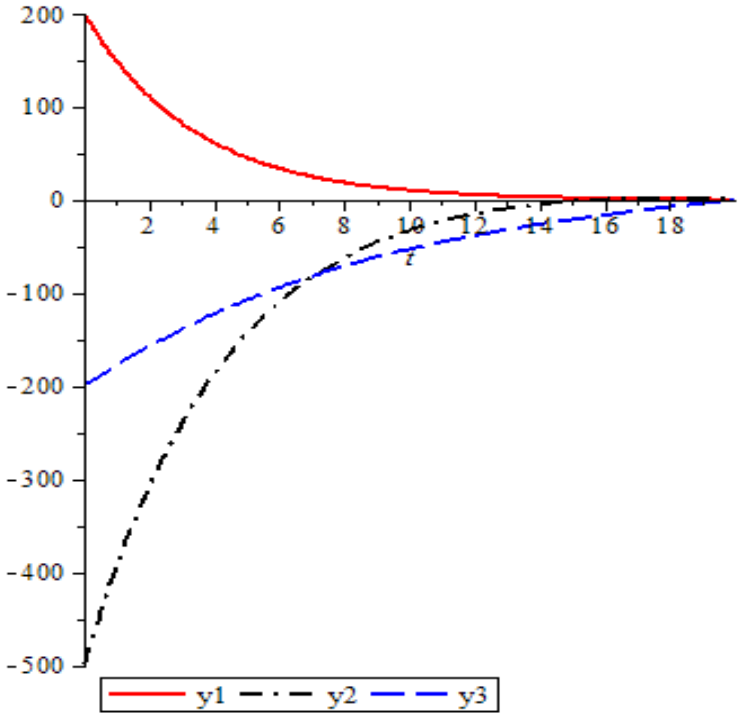
$$\begin{aligned} \dot{y}(t) &= A(t)y(t) + B(t)R^{-1}(t)B^*(t)\psi(t), \\ \dot{\psi}(t) &= Q(t)y(t) - A^*(t)\psi(t). \end{aligned} \qquad (4.1.2.8)$$

шектік шарттар:

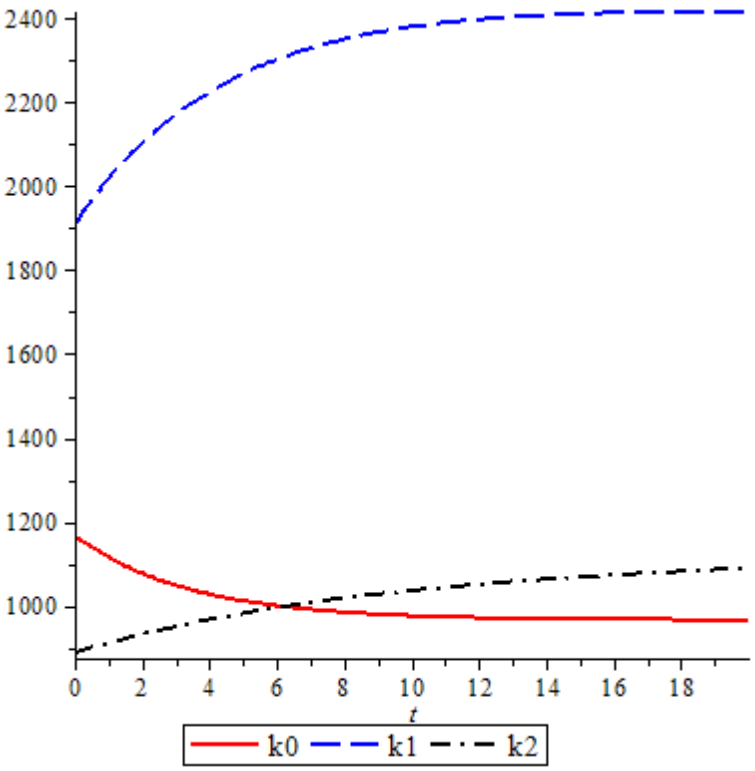
$$y(t_0) = y_0, \quad y(T) = 0,\ t \in [t_0, T] \qquad (4.1.2.9)$$

(4.1.2.1) – (4.1.2.2) ТБЕ үшін Понтрягиннің максимум қағидасы бойынша **эксперименттік есептеулер** 4.1.1-бөлімдегі сандық мәліметтер бойынша жүргізілді. КҮСЭМ үшін тиімді траектория мен тиімді басқарулар тұрғызылды және олар (4.1.2.1)- (4.1.2.5) суреттерінде көрсетілген. Сандық есптеулер нәтижесінде соңғы уақытта $y(T) = 0$ шарты толық орындалады:

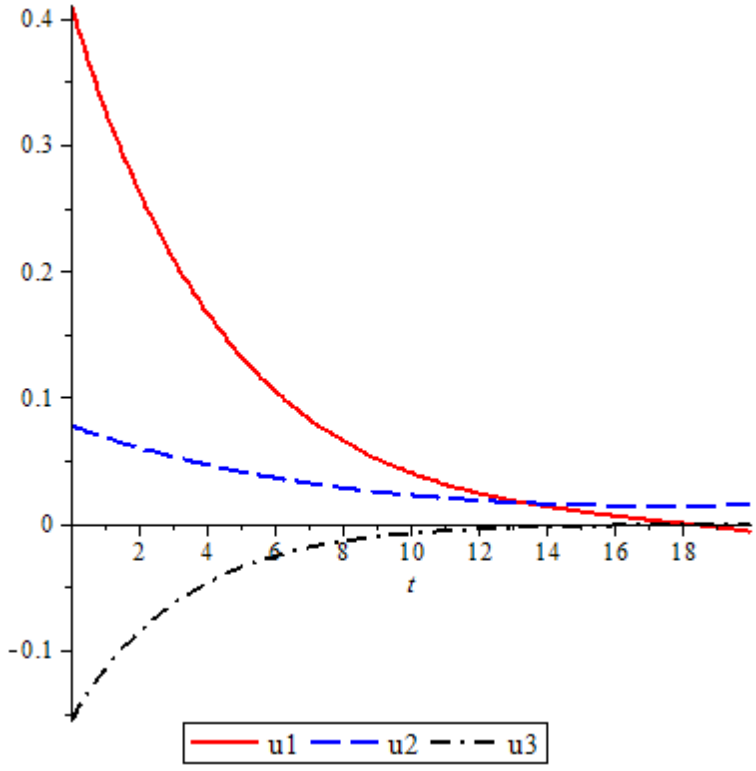
$$y_1(T) = 0, \quad y_2(T) = 0, \quad y_3(T) = 0.$$



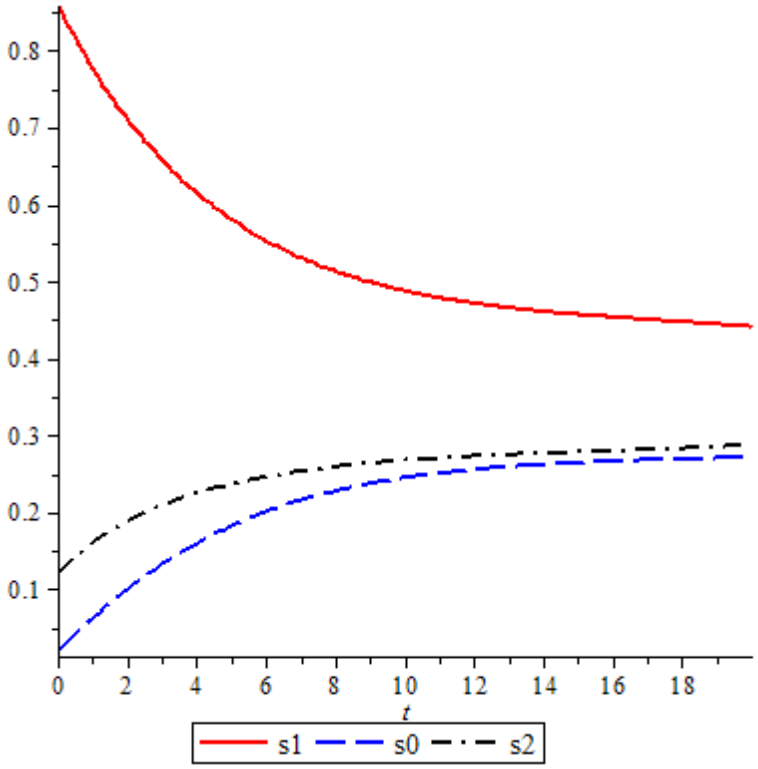
4.1.2.1–Сурет. $y_i(t)\ (i = 0,1,2)$ траекториясының графигі



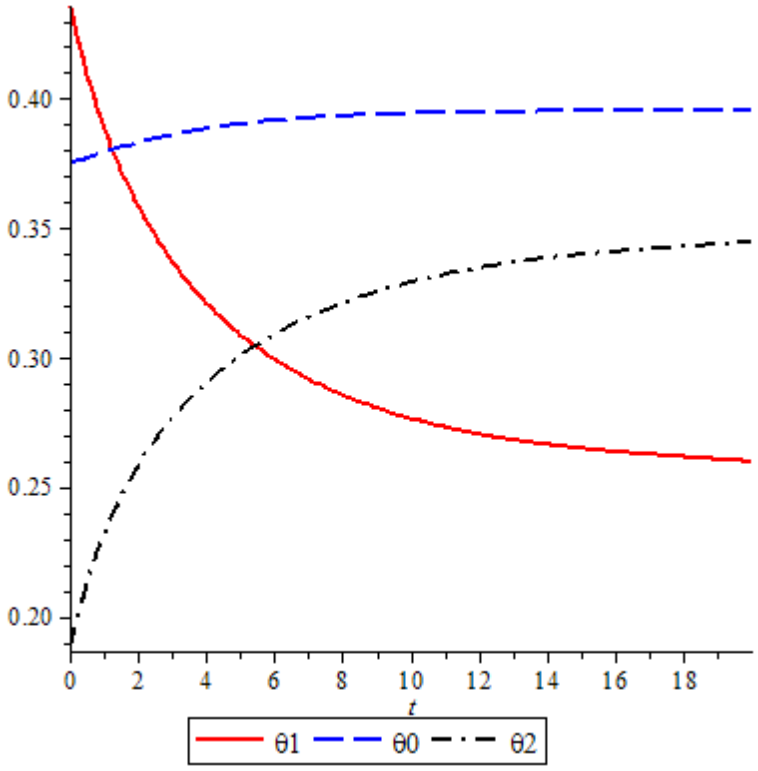
4.1.2.2–Сурет. $k_i(t)$, $(i=0,1,2)$ траекториясының графигі



4.1.2.3–Сурет. Тиімді басқарудың графигі



4.1.2.4–Сурет. (1.4.2)-(1.4.4) баланстық ара-қатынастар үшін инвестициялық ресурстарды тиімді үлестірудің графигі



4.1.2.5–Сурет. (1.4.2)-(1.4.4) баланстық ара-қатынастар үшін еңбек ресурстарын тиімді үлестірудің графигі

Екі әдіспен, яғни Понтрягиннің максимум қағидасы және арнайы түрдегі Лагранж көбейткіштері әдісімен шығарылған ақырлы уақыт интервалында, басқару параметрлері шектеусіз берілген КҮСЭМ-нің сызықты моделі үшін қарастырылған ТБЕ эксперименттік есептеулерінің нәтижелерінен байқайтынымыз, есепті шешуде арнайы түрдегі Лагранж көбейткіштері алгоритмімен алынған нәтижелер $y(T)=0$ шартының өте жоғарғы дәлділікпен нақты орындалуын қамтамасыз ететіндігі сандық есептеулерден айқын көрініп тұр.

4.2 Ақырлы уақыт интервалында, басқару парамерлері шектеулермен берілген КҮСЭМ-нің сызықты моделі үшін синтездеуші басқаруды тұрғызудың сандық есептеулері

(2.2.1)-(2.2.5) ТБЕ экономиканың үш секторлы сызықты моделі үшін тиімді траектория мен тиімді басқаруды анықтауға арналған сандық есептеулерін жүргізейік. Есептеулер нәтижесін жүйенің бастапқы күйіне байланысты көрсетеміз. Жүйе парамерлерінің мәндері 4.1 және 4.3 кестелерде көрсетілген.

Есептеу барысында мақсатты (2.2.5) функционалын минимумдау және (2.2.1) жүйесін $[t_0, T]$ уақыт аралығында $y(0)=y_0$ бастапқы күйінен $y(T)=0$ соңғы күйіне жеткізу есебі қарастырылды. Жоспарлау шегінің интервалы $T=20$ тең деп алынды. Жүйенің бастапқы күйі мен басқару параметрлеріне қойылған шектеулер төмендегідей түрде берілген:

$$y(t_0)=(-411,\ -100,\ 200)^*,$$

$$-0.3476\le u_1\le 0.4523,\ \ -0.1024\le u_2\le 0.6976,\ \ -0.0794\le u_3\le 0.7205. \qquad (4.2.1)$$

$A(t),\ B(t),\ R(t),\ Q(t)$ және K_0 матрицаларының мәндері:

$$A(t)=\begin{pmatrix} -0.016 & 0 & 0\\ 0.0153 & -0.05 & 0\\ 0.0136 & 0 & -0.05\end{pmatrix},\quad B(t)=\begin{pmatrix} 269.306 & 0 & 0\\ 0 & 269.306 & 0\\ 0 & 0 & 269.306\end{pmatrix},\quad R=\begin{pmatrix} 2.77 & 0 & 0\\ 0 & 100 & 0\\ 0 & 0 & 25\end{pmatrix},$$

$$Q=\begin{pmatrix} 0.059\cdot 10^{-4} & 0 & 0\\ 0 & 10^{-4} & 0\\ 0 & 0 & 0.25\cdot 10^{-4}\end{pmatrix},\quad K_0=\begin{pmatrix} 0.147\cdot 10^{-4} & 0 & 0\\ 0 & 3.06\cdot 10^{-4} & 0\\ 0 & 0 & 0.77\cdot 10^{-4}\end{pmatrix}.$$

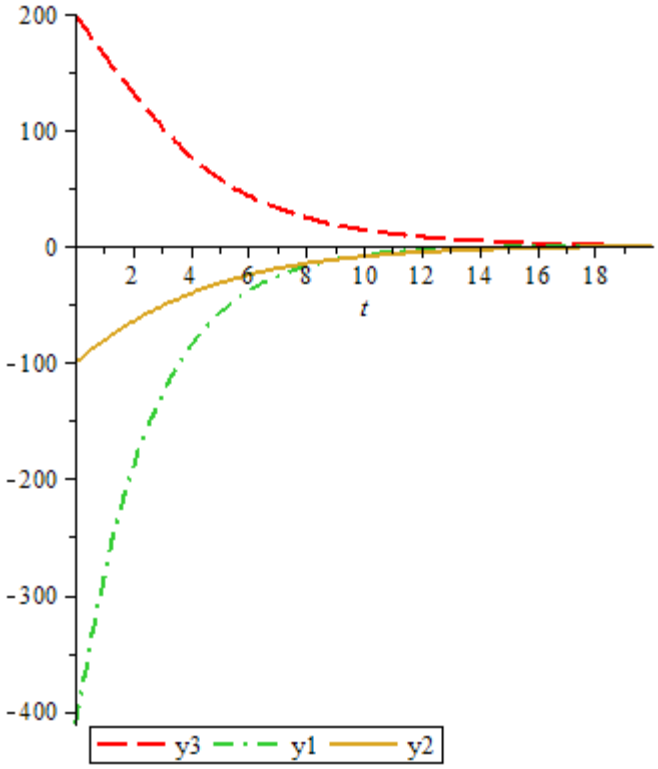
Берілген мәндерге байланысты сандық септеудің нәтижелері 4.2.1 – 4.2.5 суреттерде көрсетілген. 4.2.1–суретте жүйе күйінің тиімді траекторясы көрсетілсе, 4.2.2–суретте осы траекторяның тепе-теңдік күйінен ауытқуы, яғни $y_1(t)=k_1(t)-k_1^s,\ y_2(t)=k_2(t)-k_2^s,\ y_3(t)=k_0(t)-k_0^s$ көрсетілген. Есептеу барысында алынған жүйенің соңғы уақытта тепе-теңдік күйінен ауытқу шамасы:

$$y_1(T)=-0.855\cdot 10^{-2},\ \ y_2(T)=3.489\cdot 10^{-2},\ \ y_3(T)=-4.968\cdot 10^{-2}.$$

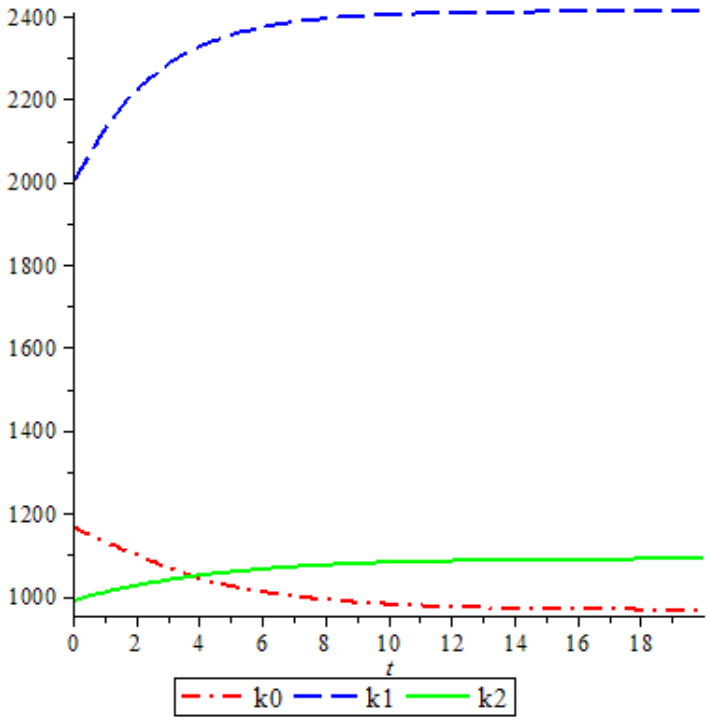
Ал 4.2.3–суретте тиімді басқару графигі, суреттен көрініп тұрғандай тиімді басқару шектеулерімен берілген U аймағынан шықпайды. Яғни суретте басқарудың $u_1(t)$ мен $u_3(t)$ компоненттері $[0, t_1]$ және $[0, t_2]$ уақыт аралығында

(4.2.1) аралықта берілген U аймағының шекарасынан өтеді де, $t \in [t_1, T]$, $t \in [t_2, T]$ аралығында U аймағының ішкі жағына кіреді. Басқару компоненттерінің ауысуы $u_1(t)$ үшін $t_1 = 0.739$ уақытында, ал $u_3(t)$ үшін $t_2 = 3.272$ уақытында болады.

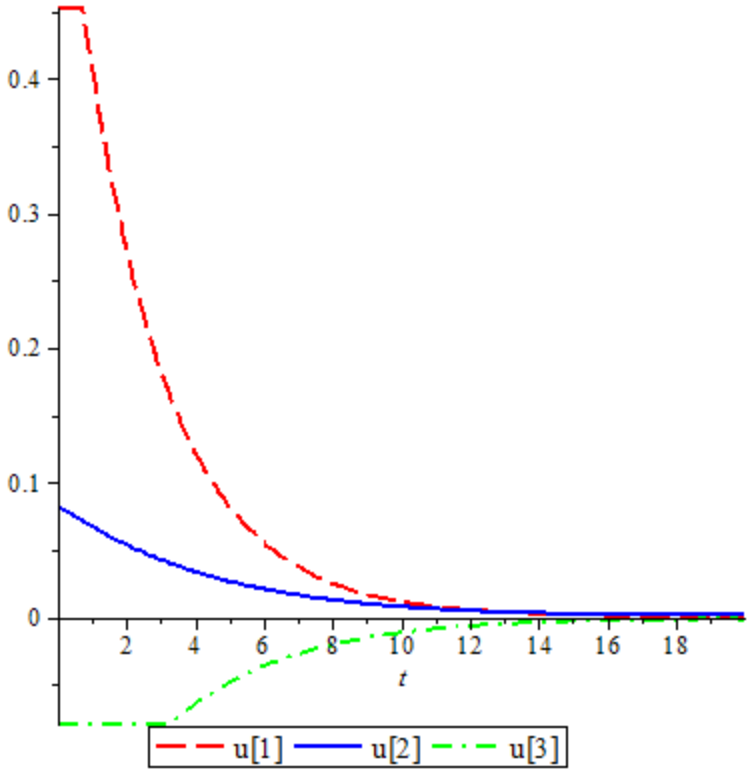
Сонымен қатар есептеу барысында (1.2.19)-(1.2.21) формулаларының көмегімен (1.4.2)-(1.4.4) баланстық ара-қатынастар шартын қанағаттандыратын $(\theta_0(t), \theta_1(t), \theta_2(t))$ еңбек және $(s_0(t), s_1(t), s_2(t))$ инвестиция ресурстарының тиімді үлестірімі табылды (4.2.4 және 4.2.5 суреттер).



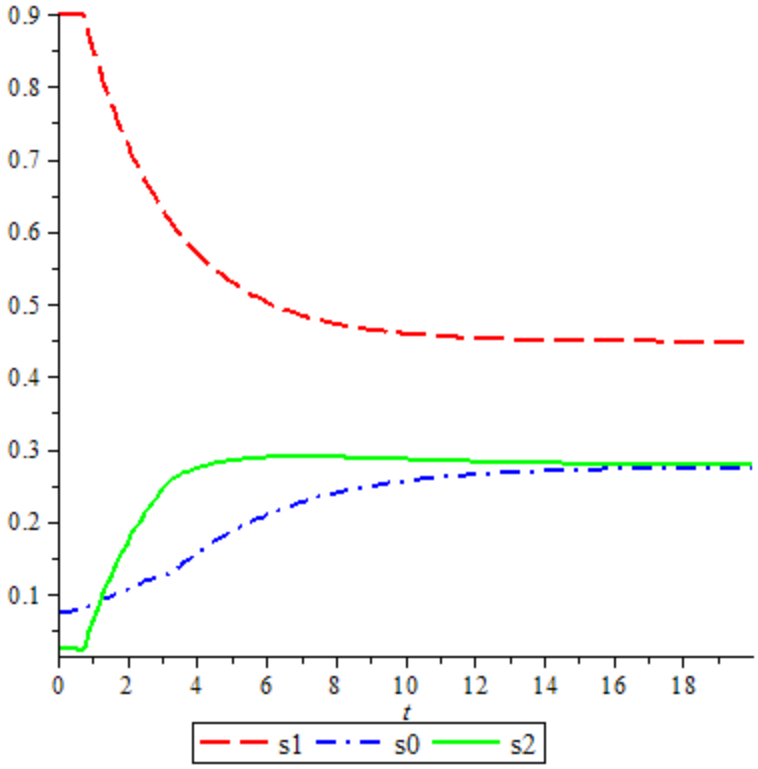
4.2.1–Сурет. $y_i(t)\ (i = 0,1,2)$ траекториясының графигі



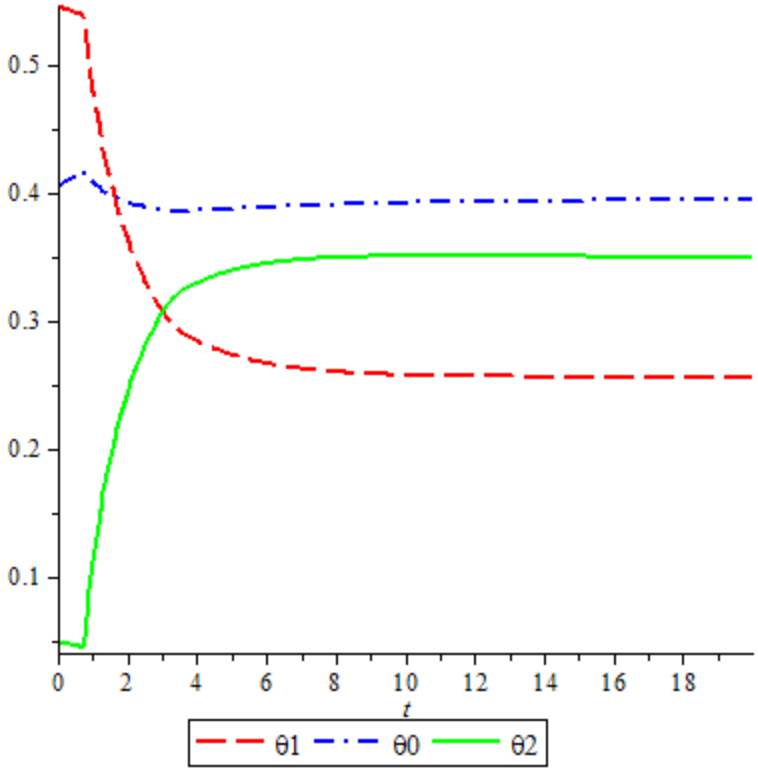
4.2.2–Сурет. $k_i(t)\ (i=0,1,2)$ траекториясының графигі



4.2.3–Сурет. Тиімді басқарудың графигі



4.2.4–Сурет. (1.4.2)-(1.4.4) баланстық ара-қатынастар үшін инвестициялық ресурстарды тиімді үлестірудің графигі



4.2.5–Сурет. (1.4.2)-(1.4.4) баланстық ара-қатынастар үшін еңбек ресурстарын тиімді үлестірудің графигі

4.3 Ақырлы уақыт интервалында, басқару парамерлері шектеулермен берілген КҮСЭМ-нің сызықты емес моделі үшін синтездеуші басқаруды тұрғызудың сандық есептеулері

Арнайы түрдегі Лагранж көбейткіштері әдісінің көмегімен (2.3.1), (2.3.2) және (2.3.4) ТБЕ-нің сандық шешімін және тиімді траектория мен басқаруың графиктерін тұрғызу үшін, модель парамерлерінің мәндерін 4.1 және 4.3 кестелерінен аламыз.

Есептеу барысында мақсатты (2.3.4) функцианалын минимумдау және (2.3.1) жүйесін $[t_0, T]$ уақыт аралығында $y(t_0) = y_0$ бастапқы күйінен $y(T) = 0$ соңғы күйіне жеткізу есебі қарастырылды.

Жоспарлау шегінің интервалы $T = 20$ тең деп алынды. Жүйенің бастапқы күйі мен басқаруға қойылған шектеулер төмендегідей түрде берілген:

$$y(t_0) = \left(-700,\ -300,\ 300\right)^*,$$

$$-0.3476 \le u_1 \le 0.4523,\ \ -0.1024 \le u_2 \le 0.6975,\ \ -0.0794 \le u_3 \le 0.7205. \qquad (4.3.1)$$

Сондай–ақ, осы есептеулер үшін $A(t),\ B(t),\ Q(t),\ R(t)$ және K_T матрицалары төмендегідей түрде берілген:

$$A(t) = \begin{pmatrix} -0.016 & 0 & 0 \\ 0.0153 & -0.05 & 0 \\ 0.0136 & 0 & -0.05 \end{pmatrix},\quad B(t) = \begin{pmatrix} 269.306 & 0 & 0 \\ 0 & 269.306 & 0 \\ 0 & 0 & 269.306 \end{pmatrix},\quad R(t) = \begin{pmatrix} 0.8 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix},$$

$$Q(t) = \begin{pmatrix} 0.2\cdot 10^{-5} & 0 & 0 \\ 0 & 1.1\cdot 10^{-5} & 0 \\ 0 & 0 & 1.1\cdot 10^{-5} \end{pmatrix},\quad K_T = \begin{pmatrix} 4.59\cdot 10^{-6} & 4.48\cdot 10^{-7} & 3.97\cdot 10^{-7} \\ 4.48\cdot 10^{-7} & 2.44\cdot 10^{-5} & 1.99\cdot 10^{-8} \\ 3.97\cdot 10^{-7} & 1.99\cdot 10^{-8} & 2.44\cdot 10^{-5} \end{pmatrix}.$$

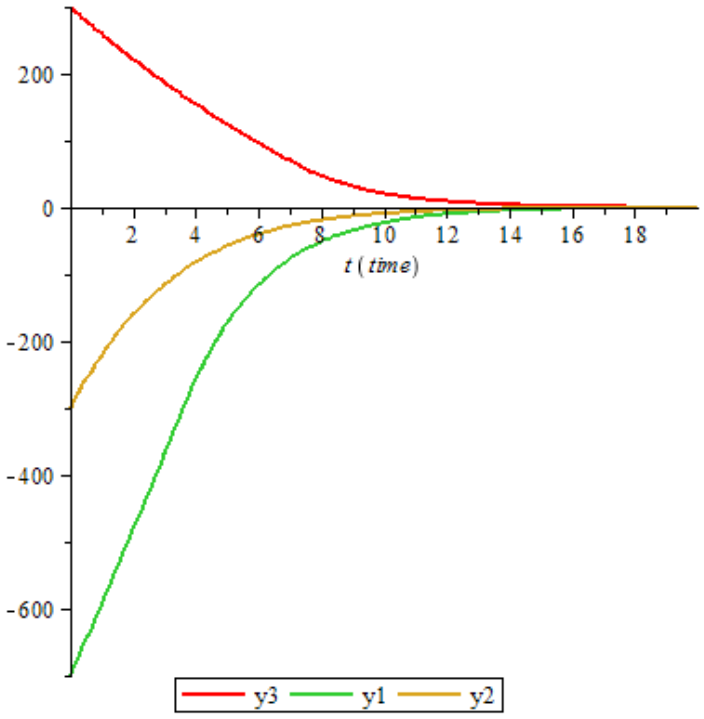
Берілген мәндерге байланысты сандық септеудің нәтижелері 4.3.1 – 4.3.5 суреттерде көрсетілген. 4.3.1–суретте тиімді траекторияның графигі жүйенің тепе-теңдік күйінен ауытқуы ($y_1(t) = k_1(t) - k_1^s,\ y_2(t) = k_2(t) - k_2^s,\ y_3(t) = k_0(t) - k_0^s$) түрінде көрсетілген. Осындай графикті тұрғызудың басты себебі, соңғы уақытта ауытқу нөлге ұмтылады. Яғни, соңғы уақыт моментінде жүйе траекториясы тепе-теңдік күйге тура жетуі керек. Есептеу машинасында жүргізілген сандық эксперименттер, қойылған есепті шешуде қарастырылып отырған алгоритмнің тиімді екенін көрсетті. Оны есептеу барысында алынған жүйенің соңғы уақытта тепе-теңдік күйінен ауытқу шамасынан көруге болады:

$$y_1(T) = -1.4304\cdot 10^{-7},\ \ y_2(T) = -4.1306\cdot 10^{-8},\ \ y_3(T) = -3.8532\cdot 10^{-8}.$$

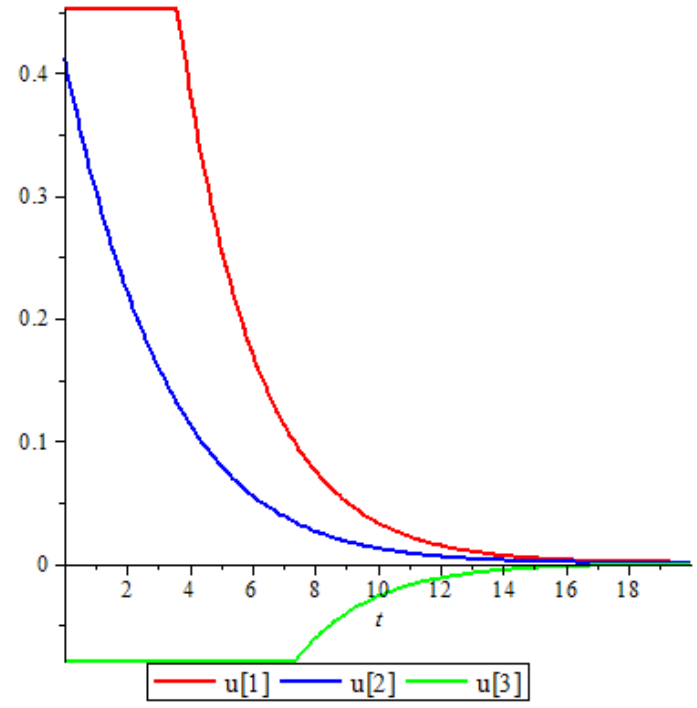
Ал 4.3.2–сурет тиімді басқарудың графигі. Суреттен көрініп тұрғандай тиімді басқару (4.3.1) шектеулерімен берілген U аймағынан шықпайды.

Бұнда $u_1(t)$ мен $u_3(t)$ басқару компоненттері сәйкесінше $[0, t_1]$ және $[0, t_2]$ уақыт аралығында U аймағының шекарасында жатады да, $t \in (t_1, T],\ \ t \in (t_2, T]$

уақытында U-дың ішкі аймағына кіреді. $u_1(t)$ компоненті үшін ауысу уақыты $t_1 = 3.615$ тең болса, $u_3(t)$ компоненті үшін ауысу уақыты $t_2 = 7.349$ тең болды.



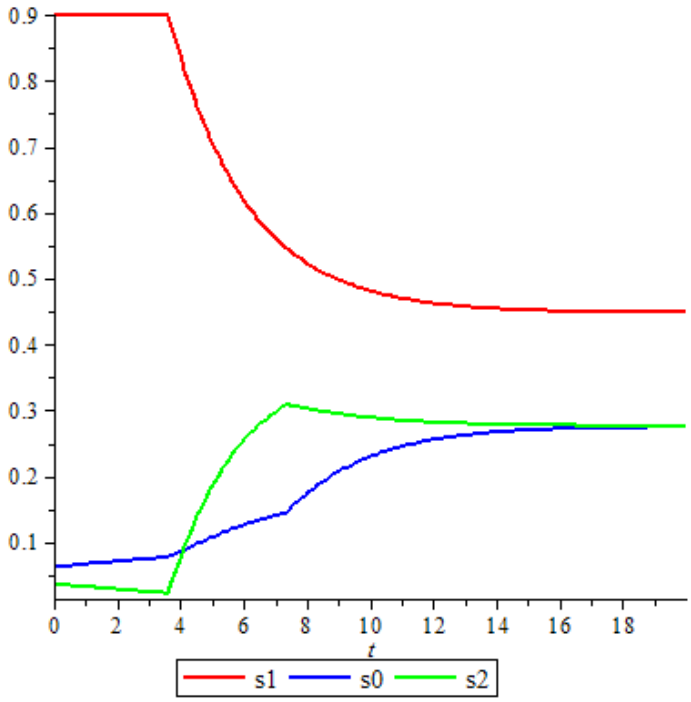
4.3.1–Сурет. $y_i(t)$ $(i = 1,2,3)$ тиімді траекторияның графигі



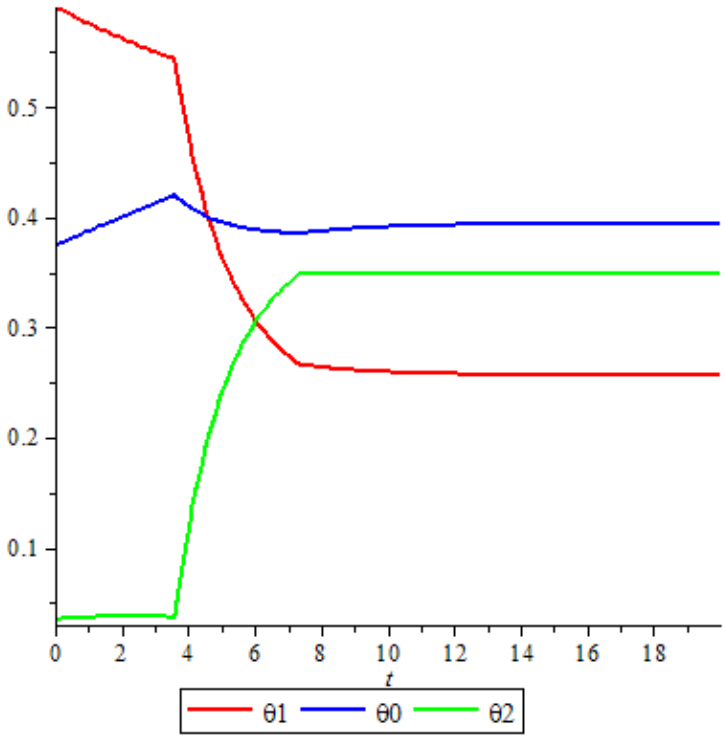
4.3.2–Сурет. Тиімді басқарудың графигі

Сонымен қатар есептеу барысында (1.2.21)-(1.2.23) формулаларының көмегімен (1.4.2)–(1.4.4) баланстық ара-қатынастар шартын қанағаттандыратын

$(\theta_0(t), \theta_1(t), \theta_2(t))$ еңбек және $(s_0(t), s_1(t), s_2(t))$ инвестиция ресурстарының тиіміді үлестірімі табылды (4.3.3 және 4.3.4 суреттер).



4.3.3–Сурет. (1.4.2)–(1.4.4) баланстық ара-қатынастар үшін инвестициялық ресурстарды тиімді үлестірудің графигі



4.3.4–Сурет. (1.4.2)–(1.4.4) баланстық ара-қатынастар үшін еңбек ресурстарын тиімді үлестірудің графигі

4.4 Шексіз уақыт интервалында, басқару парамерлері шектеулермен берілген КҮСЭМ сызықты емес моделі үшін тиімді тұрақтылықты іздеудің сандық есептеулері

Бұл жерде 2.4 бөлімде қарастырған шексіз уақыт интервалында сызықты емес моделімен берілген ТБЕ-нің сандық есептеулері жүргізіледі.

Зерттеу жұмысының 2.4 бөлімінде сипатталған алгоритм бойынша $\lambda_0(y,t)=K(t)y(t)$ түрдегі Лагранж көбейткішін қолданып, (2.4.8) екі жақты шектеуімен берілген (2.4.7) сызықты емес жүйені (2.4.9) функционалын минимумдай отырып, $[t_0,\infty)$ уақыт интервалында $y(t_0)=y_0$ берілген бастапқы күйден $y(\infty)=0$ қалаулы соңғы күйге ауыстыратын ТБЕ-нің сандық шешімін алудың процесін қарастырайық.

Қойылған есептің тиімді траекториясы мен тиімді басқаруының графиктерін тұрғызу үшін, модель парамерлерінің мәндерін 4.1 және 4.3 кестелерден аламыз.

Бұл есепте $T=50$ тең деп қарастырамыз. Жүйенің бастапқы күйі мен басқаруға қойылған шектеулер төмендегідей түрде берілген:

$$y(t_0)=\left(-700,\ -300,\ 300\right)^*,$$

$$-0.3476\le u_1\le 0.4523,\ \ -0.1024\le u_2\le 0.6975,\ \ -0.0794\le u_3\le 0.7205. \qquad (4.4.1)$$

Сондай–ақ, осы есептеулер үшін $A(t),\ B(t),\ Q(t),\ R(t)$ және K_T матрицалары төмендегідей түрде берілген:

$$A(t)=\begin{pmatrix}-0.016 & 0 & 0\\ 0.0153 & -0.05 & 0\\ 0.0136 & 0 & -0.05\end{pmatrix},\quad B(t)=\begin{pmatrix}269.306 & 0 & 0\\ 0 & 269.306 & 0\\ 0 & 0 & 269.306\end{pmatrix},\quad R(t)=\begin{pmatrix}4 & 0 & 0\\ 0 & 16 & 0\\ 0 & 0 & 12\end{pmatrix},$$

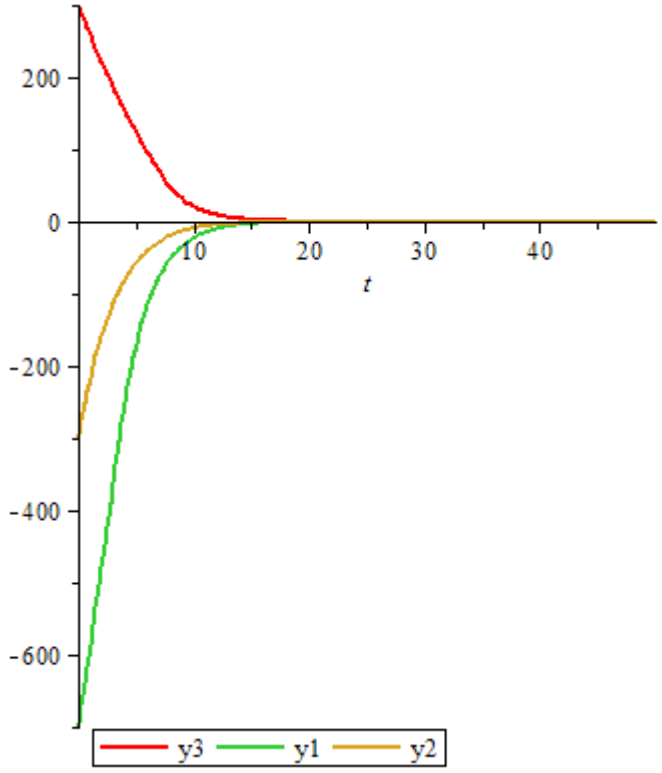
$$Q(t)=\begin{pmatrix}0.2\cdot10^{-5} & 0 & 0\\ 0 & 1.1\cdot10^{-5} & 0\\ 0 & 0 & 1.1\cdot10^{-5}\end{pmatrix},\quad K_T=\begin{pmatrix}9.9\cdot10^{-6} & 1.43\cdot10^{-6} & 1.04\cdot10^{-6}\\ 1.43\cdot10^{-6} & 3.96\cdot10^{-5} & -5.51\cdot10^{-8}\\ 1.04\cdot10^{-6} & -5.51\cdot10^{-8} & 3.53\cdot10^{-5}\end{pmatrix}.$$

Берілген мәндерге байланысты сандық септеудің нәтижелері 4.4.1 – 4.4.5 суреттерде көрсетілген. 4.4.1–суретте тиімді траекторияның графигі жүйенің тепе-теңдік күйінен ауытқуы ($y_1(t)=k_1(t)-k_1^s,\ y_2(t)=k_2(t)-k_2^s,\ y_3(t)=k_0(t)-k_0^s$) түрінде көрсетілген. Есептеу барысында алынған жүйенің шексіз уақыттағы тепе-теңдік күйінен ауытқу шамасы төмендегідей:

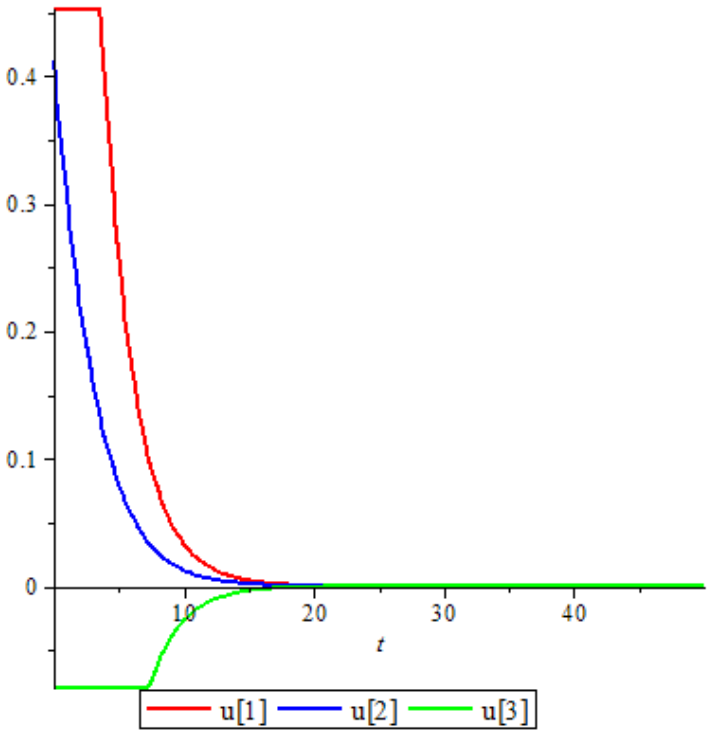
$$y_1(50)=-8.1980\cdot10^{-7},\ \ y_2(50)=-1.3574\cdot10^{-6},\ \ y_3(50)=1.4837\cdot10^{-6}.$$

4.4.2–сурет тиімді басқарудың графигі. Суреттен көрініп тұрғандай тиімді басқару (4.4.1) шектеулерімен берілген U аймағынан шықпайды. Бұнда $u_1(t)$ мен $u_3(t)$ басқару компоненттері сәйкесінше $[0,t_1]$ және $[0,t_2]$ уақыт аралығында U аймағының шекарасында жатады да, $t\in(t_1,T]$, $t\in(t_2,T]$ уақытында U-дың ішкі

аймағына кіреді. $u_1(t)$ компоненті үшін ауысу уақыты $t_1 = 3.615$ тең болса, $u_3(t)$ компоненті үшін ауысу уақыты $t_2 = 7.349$ тең болды.

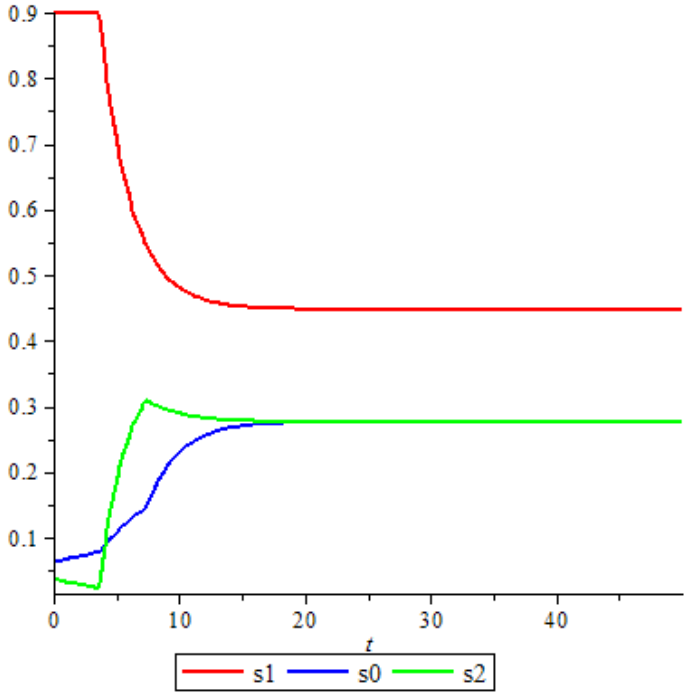


4.4.1–Сурет. $y_i(t)$ $(i = 1,2,3)$ тиімді траекторияның графигі

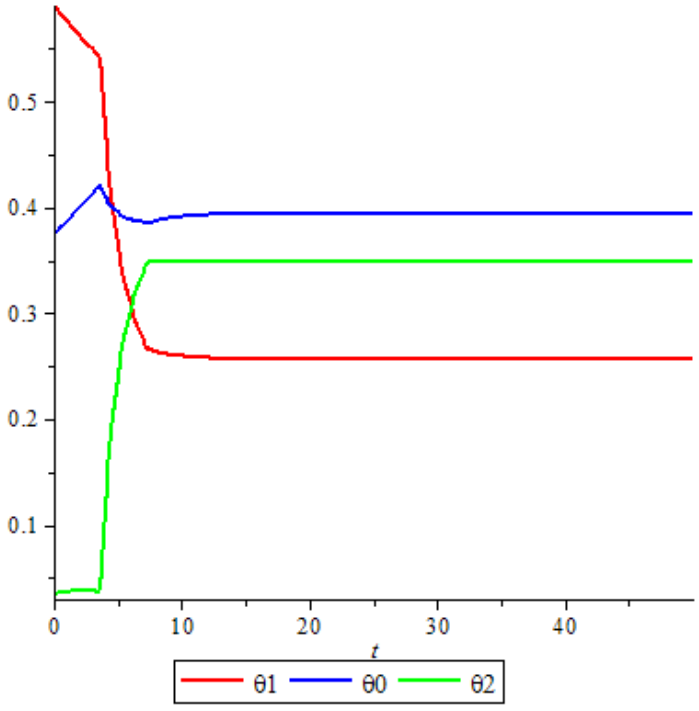


4.4.2–Сурет. Тиімді басқарудың графигі

Сонымен қатар есептеу барысында (2.4.18)-(2.4.20) формулаларының көмегімен (2.4.3)-(2.4.5) баланстық ара-қатынастар шартын қанағаттандыратын $(\theta_0(t), \theta_1(t), \theta_2(t))$ еңбек және $(s_0(t), s_1(t), s_2(t))$ инвестиция ресурстарының тиіміді үлестірімі табылды (4.4.3 және 4.4.4 суреттер).



4.4.3–Сурет. (3.4.3)-(3.4.5) баланстық ара-қатынастар үшін инвестициялық ресурстарды тиімді үлестірудің графигі



4.4.4–Сурет. (3.4.3)-(3.4.5) баланстық ара-қатынастар үшін еңбек ресурстарын тиімді үлестірудің графигі

Ғылыми жұмыстың 2.3 және 2.4 бөлімдерінде басқару параметрлері шектеулермен берілген КҮСЭМ-нің сызықты емес моделі үшін ТБЕ ақырлы және шексіз уақыт интервалдарында қарастырылды. Есепті шығаруда фазалық координат пен уақытан тәуелді Лагранж көбейткіштері қолданылды.

Ақарлы уақыт интервалында берілген ТБЕ шешімін есептеу барысында Лагранж көбейткіші $K(t)y(t)+q(t)$ түрінде таңдалса, шексіз уақыт интервалында берілген дәл осы есеп үшін $K(t)y(t)$ түріндегі көбейткіш таңдап алынды. Көбейткіштерді осындай түрде таңдау, кері байланыс қағидасы бойынша тиімді басқаруды тұрғызуға мүмкіндік туғызды.

2.3 және 2.4 бөлімдерінде сипатталған алгоритмдер бойынша жүргізілген 4.3 және 4.4 бөлімдеріндегі сандық есептеулерден: $[0, T]$ уақыт мерзімінде секторлар арасында еңбек және инвестиция ресурстарының үлестірімінің бірқалыпты болатындығы көрсетіліп, $T=20$ соңғы уақытта жүйе $y_1(T) = -1.4304 \cdot 10^{-7}$, $y_2(T) = -4.1306 \cdot 10^{-8}$, $y_3(T) = -3.8532 \cdot 10^{-8}$ дәлділіктерімен тепе-теңдік күйіне жеткендігін аңғарсақ, $t \in [0, \infty)$ уақыт мерзімінде ($T=50$) жүйе өзінің тепе-теңдік күйіне $y_1(50) = -8.1980 \cdot 10^{-7}$, $y_2(50) = -1.3574 \cdot 10^{-6}$, $y_3(50) = 1.4837 \cdot 10^{-6}$ дәлділіктерімен жеткендігін байқаймыз.

Сондай-ақ, екі нұсқада да басқарулар өздерінің тұрақты күйлеріне $s^c = (s_0^c, s_1^c, s_2^c)^*$, $\theta^c = (\theta_0^c, \theta_1^c, \theta_2^c)^*$ жеткізілетіндігі график түрінде дәлелденді (4.3.3, 4.3.4 және 4.4.3, 4.4.4 суреттер).

4.5 Басқару параметрлері шектеулермен берілген экономиканың сызықты емес жүйесі үшін тиімді тұрақтылық есебін шешу

Басқару объектісінің күйінен тәуелді коэффициенттерімен берілген сызықты емес жүйелердің бір класы үшін ТБЕ қарастырайық. Алгебралық және дифференциалдық теңдеулерімен берілген сызықты емес экономиканың үш секторлы моделі берілсін:

$$\dot{k}_i(t) = -\lambda_i k_i(t) + (s_i(t)/\theta_i(t))x_1, \quad k_i(0) = k_i^0, \quad \lambda_i > 0, \quad (i = 0, 1, 2), \tag{4.5.1}$$

$$x_i = \theta_i(t) A_i k_i(t)^{\alpha_i}, \quad A_i > 0, \quad 0 < \alpha_i < 1, \quad (i = 0, 1, 2),$$

Баланстық арақатынастар:

$$s_0(t) + s_1(t) + s_2(t) = 1, \quad s_0(t) \geq 0, \quad s_1(t) \geq 0, \quad s_2(t) \geq 0, \tag{4.5.2}$$

$$\theta_0(t) + \theta_1(t) + \theta_2(t) = 1, \quad \theta_0(t) \geq 0, \quad \theta_1(t) \geq 0, \quad \theta_2(t) \geq 0, \tag{4.5.3}$$

$$(1-\beta_0)x_0 = \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2, \quad 0 < \beta_i < 1, \ i = 0, 1, 2. \tag{4.5.4}$$

Бұнда (k_0, k_1, k_2) экономикалық жүйенің күйін анықтайтын вектор; $(s_0, s_1, s_2, \theta_0, \theta_1, \theta_2)$ инвестиция мен еңбек ресурстарын бөлгендегі секторлардың үлестері сипаттайтын басқару векторы; x_i – меншікті өнім; β_i – i- ші сектордағы өнімді шығаруға кеткен материалдық шығындар.

Жүйенің бастапқы күйі (k_0^0, k_1^0, k_2^0) тең деп қарастырамыз. $k_i^0 = k_i(0)$ $-t=0$ болғандағы i - ші сектордың қормен жарақтандырылуы $(i=0,1,2)$.

Осыған байланысты $[0,T]$ уақыт аралығында берілген сызықты емес жүйені бастапқы күйден (k_0^0, k_1^0, k_2^0) қалаулы соңғы күйге (k_0^s, k_1^s, k_2^s) жеткізу есебі қарастырылады. Бұндағы қалаулы соңғы күйді (k_0^s, k_1^s, k_2^s) жүйенің тепе– теңдік күйінен, яғни (4.5.1) теңдеуді нөлге теңестіру арқылы табамыз.

$$k_1^s = \left(\frac{s_1 A_1}{\lambda_1}\right)^{\frac{1}{1-\alpha_1}}, \quad k_0^s = \frac{s_0\theta_1 A_1 (k_1^s)^{\alpha_1}}{\lambda_0\theta_0}, \quad k_2^s = \frac{s_2\theta_1 A_1 (k_1^s)^{\alpha_1}}{\lambda_2\theta_2}. \tag{4.5.5}$$

(4.5.5) тепе –теңдік күйіндегі k_i^s $(i=0,1,2)$ қормен жабдықтандырудың мәні $(s_0, s_1, s_2, \theta_0, \theta_1, \theta_2)$ басқаруларынан тәуелді. $x_2 \to \max$ меншікті тұтынудың максимум мәнін беретін сызықты емес бағдарламалау есебін шеше отырып $(s_0^s, s_1^s, s_2^s, \theta_0^s, \theta_1^s, \theta_2^s)$ тұрақты мәндерін табуға болады [79].

Басқару объектісінің математикалық моделін векторлық формадағы дифференциалдық теңдеулер жүйесі түрінде төмендегідей белгілеулер енгізе отырып жазайық:

$$\dot{y}(t) = Ay(t) + BD(y)u(t) + B(D(y) - D(k^s))v^s, \quad y(t_0) = y_0, \quad t \in [t_0, \infty). \tag{4.5.6}$$

$$y_1 = k_1 - k_1^s, \;\; y_2 = k_2 - k_2^s, \;\; y_3 = k_0 - k_0^s,$$

$$u_1 = s_1 - v_1^s, \; u_2 = s_2\theta_1/\theta_2 - v_2^s, \; u_3 = s_0\theta_1/\theta_0 - v_3^s,$$

$$v_1^s = s_1^s, \; s_2^s\theta_1^s/\theta_2^s = v_2^s, \; s_0^s\theta_1^s/\theta_0^s = v_3^s,$$

$$f_1(y_1) = (y_1 + k_1^s)^{\alpha_1}, \;\; f_2(y_2) = (y_2 + k_2^s)^{\alpha_2}, \;\; f_3(y_3) = (y_3 + k_0^s)^{\alpha_0},$$

$$Ak^s + BD(k^s)v^s = 0,$$

$$A = \begin{pmatrix} -\lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda_0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} A_1 & 0 & 0 \\ 0 & A_1 & 0 \\ 0 & 0 & A_1 \end{pmatrix}, \quad D(k^s) = \begin{pmatrix} (k_1^s)^{\alpha_1} & 0 & 0 \\ 0 & (k_1^s)^{\alpha_1} & 0 \\ 0 & 0 & (k_1^s)^{\alpha_1} \end{pmatrix},$$

$$D(y) = \begin{pmatrix} (y_1 + k_1^s)^{\alpha_1} & 0 & 0 \\ 0 & (y_1 + k_1^s)^{\alpha_1} & 0 \\ 0 & 0 & (y_1 + k_1^s)^{\alpha_1} \end{pmatrix}.$$

Бұндағы $y = (y_1, y_2, y_3)^*$ объект күйінің векторы, $u = (u_1, u_2, u_3)^*$ басқару векторы. $u = (u_1, u_2, u_3)^*$ басқару векторының компаненттері келесі түрде берілген екі жақты шектеуді қанағаттандырады:

$$u(t) \in U(t) = \left\{u \,|\, \gamma_1(t) \le u(t) \le \gamma_2(t), t \in [t_0, \infty); \;\; \gamma_1, \gamma_2 \in C[t_0, \infty)\right\}. \tag{4.5.7}$$

(4.5.6) жүйесі басқарылатын жүйе деп ұйғарайық. A, B матрицалары басқарылу шартын қанағаттандырады, яғни бұл матрицалар үшін

$rang[B, AB, ...A^{n-1}B] = n$ шарты орындалады. $\Delta(t_0)$ арқылы $u(t) \in U(t),\ t \in [t_0, \infty)$ шартын қанағаттандыратын барлық мүмкін болатын басқарулар жиыны мен (4.5.6) жүйесінің $y(t,u)$ сәйкесінше траекторияларын белгілейміз.

Осы $\Delta(t_0)$ жынында басқару мен объект күйінен тәуелді келесі түрдегі функционал берілсін:

$$J(u) = \frac{1}{2}\int_{t_0}^{\infty}[y^*(t)Qy(t) + (D(y)u(t) + (D(y) - D(k^s))v^s)^* R(D(y)u(t) + (D(y) - D(k^s))v^s)]dt, \qquad (4.5.8)$$

бұнда Q – жартылай оң анықталған, ал $R,\ D(y)$ – оң анықталған матрицалар.

Есептің қойылымы. (4.5.7) берілген екі жақты шектеуді қанағаттандыратын және (4.5.6) жүйесін $[t_0, \infty)$ уақыт аралығында $y(t_0) = y_0$ бастапқы күйден $y(\infty) = 0$ тепе-теңдіктің қалаулы күйіне жеткізетін, сондай-ақ (4.5.8) функцияналын минимумдайтын $u(y,t)$ тұрақтандырушы басқаруды табу керек.

(4.5.6)-(4.5.8) ТБЕ үшін тұйықталған жүйедегі тепе-теңдік жағдай Ляпунов бойынша асимптотикалық орнықты болатын $u(y,t)$ басқаруды іздеу жүзеге асырылады. Ол үшін арнайы түрдегі Лагранж көбейткіштеріне негізделген әдіс қолданылады [50, 51, 54].

Есептің шешімі. Қойылған есепті шешу үшін, (4.5.6) дифференциалдық теңдеулер жүйесін $\lambda_0(y,t) = K(t)y(t)$ көбейткішіне көбейтіп (4.5.8) функционалына қосамыз. Сондай-ақ, бұған төмендегі (4.5.9) өрнекті де қосамыз:

$$\lambda_1^*(t)[\gamma_1 - u(t)] + \lambda_2^*(t)[u(t) - \gamma_2], \qquad (4.5.9)$$

бұндағы $\lambda_1(t) \geq 0,\ \lambda_2(t) \geq 0$. Нәтижесінде келесі функционалды аламыз:

$$L(y,u) = \int_{t_0}^{\infty}\{\frac{1}{2}y^*(t)Q(t)y(t) + \frac{1}{2}(D(y(t))u(t) + (D(y(t)) - D(k^s))v^s)^* R(t)(D(y(t))u(t) +$$
$$B(D(y(t)) - D(k^s))v^s) + (K(t)y(t))^*(Ay(t) + BD(y(t))u(t) + B(D(y(t)) - D(k^s))v^s - \dot{y}(t)) + \qquad (4.5.10)$$
$$+\lambda_1^*(y,t)[\gamma_1 - u(t)] + \lambda_2^*(y,t)[u(t) - \gamma_2]\}dt,$$

бұндағы $K(t)$ –оң анықталған симметриялық матрица.

Келесі функционалды қарастырайық:

$$V(y,t) = \frac{1}{2}y^*(t)K(t)y(t), \quad \frac{\partial V(y,t)}{\partial y} = K(t)y(t), \qquad (4.5.11)$$

$$M(y,u,t) = \frac{1}{2}y^*(t)\left(Q(t) + \dot{K}(t)\right)y(t) + \frac{1}{2}(D(y(t))u(t) + (D(y(t)) - D(k^s))v^s)^* R(t)(D(y(t))u(t) +$$
$$+(D(y(t)) - D(k^s))v^s) + (K(t)y(t))^*(Ay(t) + BD(y(t))u(t) + B(D(y(t)) - D(k^s))v^s) + \qquad (4.5.12)$$
$$+\lambda_1^*(y,t)[\gamma_1 - u(t)] + \lambda_2^*(y,t)[u(t) - \gamma_2]$$

Онда (4.5.10) функционалын келесі түрде жазамыз:

$$L(y,u)=V(y_0,t_0)+\int_{t_0}^{\infty}M(y,u,t)dt. \qquad (4.5.13)$$

Бірінші ретті экстремумнің қажетті шартын қолданып келесі теңдеуді аламыз:

$$D^*(y)R(D(y)u(t)+(D(y)-D(k^s))v^s)=-D^*(y)B^*K(t)y+(\lambda_1-\lambda_2), \qquad (4.5.14)$$

Бұндағы $K(t)$ матрицасы симмертиялы, оң анықталған және ол $t\in[t_0,\infty)$ интервалында келесі дифференциалдық теңдеуді қанағаттандырады:

$$\dot{K}+KA+A^*K-KB(t)R^{-1}B^*(t)K+Q(t)=0,\ K(t_0)=K_0, \qquad (4.5.15)$$

Ары қарай (4.5.14) қатынасынан тиімді басқаруды келесідей түрде табамыз:

$$u(y,t)=\omega(y,t)+\varphi(y,t). \qquad (4.5.16)$$

Онда (4.5.6) жүйесінің қозғалыс заңдылығын анықтайтын дифференциалдық теңдеу төмендегі формада болады:

$$\dot{y}=A_1(t)y(t)+BD(y)\phi(y,t),\qquad y(t_0)=y_0. \qquad (4.5.17)$$

Бұл теңдеулерде төмендегідей белгілеулер қолданылған:

$$\begin{aligned}
&A_1(t)=A-BR^{-1}B^*K(t),\quad B_1=BR^{-1}B^*,\\
&\varphi(y,t)=D^{-1}R^{-1}(D^{-1})^*[\lambda_1(y,t)-\lambda_2(y,t)],\\
&\lambda_1(y,t)=D^*RD\max\{0;\gamma_1-\omega(y,t)\}\ge 0,\\
&\lambda_2(y,t)=D^*RD\max\{0;\omega(y,t)-\gamma_2\}\ge 0,\\
&\omega(y,t)=-D^{-1}(y)(D(y)-D_s)v_s-D^{-1}(y)R^{-1}(t)B^*K(t)y(t).
\end{aligned} \qquad (4.5.18)$$

$\lambda_1(t)\ge 0,\ \lambda_2(t)\ge 0$ Лагранж көбейткіштерін қатаңдықты толықтыру шарты орындалатындай түрде таңдаймыз, яғни:

$$\lambda_1^*(y,t)[\gamma_1-u(t)]=0,\ \ \lambda_2^*(y,t)[u(t)-\gamma_2]=0. \qquad (4.5.19)$$

(4.5.6)-(4.5.8) ТБЕен алынған нәтижелерді төмендегі теоремамен тұжырымдауға болады.

4.5.1 Теорема. $Q(t)$–жартылай оң анықталған матрица, ал $R(t),\ D(y(t))$ – $[t_0,\infty)$ интервалында оң анықталған матрицалар болсын. t_0 уақытында (4.5.6) жүйесі басқарылатын жүйе деп болжайық. Онда (4.5.6)-(4.5.8) есебіндегі $(y(t),u(t))$ жұбының тиімді болуы үшін келесі екі пуктің орындалуы жеткілікті:

1. $y(t)$ траекториясы келесі дифференциалдық теңдеуді қанағаттандырады:

$$\dot{y}(t)=A_1(t)y(t)+BD(y(t))\varphi(y,t),\qquad y(t_0)=y_0; \qquad (4.5.20)$$

2. $u(t)$ басқару төмендегідей түрде анықталады:

$$u(y,t)=\omega(y,t)+\phi(y,t). \qquad (4.5.21)$$

Бұндағы $K(t)$ матрицасы (4.5.15) теңдеуінің шешімі болып табылады, ал $\varphi(y(t),t)$ вектор-функциясы (4.5.7) шектеулерінің орындалуын қамтамасыз ететіндей түрде (4.5.18) формуласынан анықталады.

Тиімді тұрақтандыру есебінің шешу алгоритмі. (4.5.6)-(4.5.8) түріндегі тиімді тұрақтандыру есебін шешудің компьютерде есептеудің алгоритмін сипаттайық:

1. $K(t)$ матрицасын анықтау үшін $[t_0,\infty)$ аралығында $K(t_0)=K_0$, шартымен берілген (4.5.15) дифференциалдық теңдеулер жүйесін интегралдаймыз.

2. (4.5.20) дифференциалдық теңдеулерін $[t_0,\infty)$ аралығында $y(t_0)=y_0$, бастапқы шартымен Рунге–Кутт әдісін қолданып интегралдаймыз. Осы теңдеуді интегралдау нәтижесінде $y(t)$ тиімді траектория мен $u(t)$ тиімді басқарудың графиктерін аламыз.

3. Жүйе күйі $y(t)$ мен тиімді басқару $u(t)$ табылсын делік, онда:

$$f_i(y_i)=(y_i+k_i^s)^{\alpha_i}$$

$$v=\frac{\beta_1 A_1 f_1(y_1)+\beta_2 A_2 f_2(y_2)(1-u_1-v_1^s)/(u_2+v_2^s)}{(1-\beta_0)A_0 f_3(y_3)(1-u_1-v_1^s)/(u_3+v_3^s)+\beta_2 A_2 f_2(y_2)(1-u_1-v_1^s)/(u_2+v_2^s)} \qquad (4.5.22)$$

(4.5.4) баланыстық ара-қатынастың орындалуын қамтамасыз етеді;

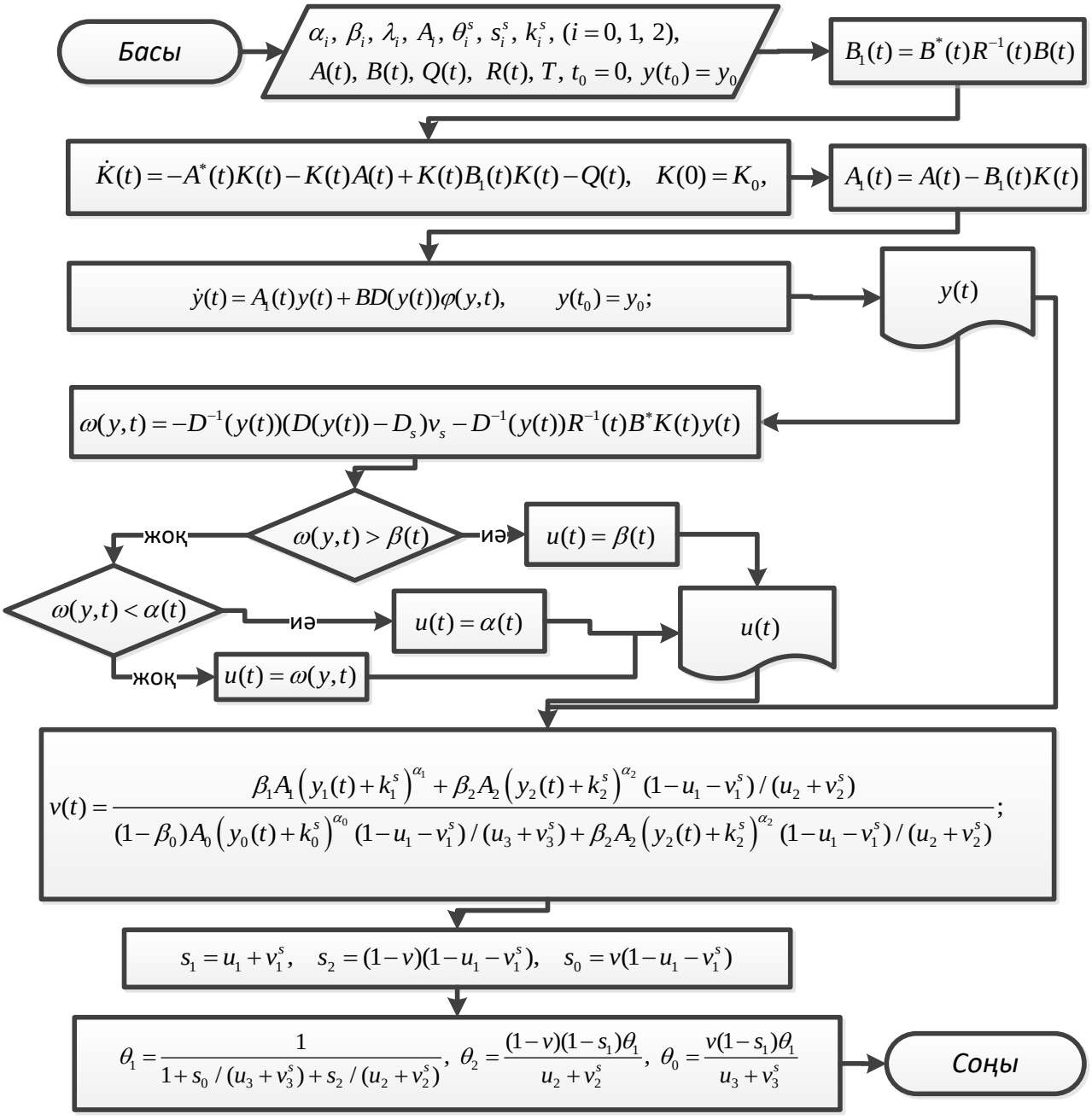
$$s_1=u_1+v_1^s,\quad s_2=(1-v)(1-u_1-v_1^s),\quad s_0=v(1-u_1-v_1^s) \qquad (4.5.23)$$

(4.5.2) шартының орындалуын қамтиды;

$$\theta_1=\frac{1}{1+s_0/(u_3+v_3^s)+s_2/(u_2+v_2^s)},\ \theta_2=\frac{(1-v)(1-s_1)\theta_1}{(u_2+v_2^s)},\ \theta_0=\frac{v(1-s_1)\theta_1}{(u_3+v_3^s)} \qquad (4.5.24)$$

(4.5.3) шартының орындалуын қамтиды.

Сипатталған алгоритмнің блоктық–сызбасы төмендегі суретте көрсетілген (4.5.1–сурет).



4.5.1–Сурет. Сызықты емес жүйемен берілген КҮСЭМ үшін тиімді траектория мен тұрақтандырғыш басқаруды тұрғызу алгоритмінің блок–схемасы

Басқару параметрлері шектеулермен берілген экономиканың сызықты емес жүйесі үшін тиімді тұрақтылық есебінің сандық есептеулері. (4.5.6)-(4.5.8) тиімді тұрақтандыру есебінің үш секторлы экономиканың сызықты емес моделі үшін тиімді траектория мен басқаруды анықтауға арналған сандық есептеулері үшін жүйе парамерлерінің мәндері 4.1 және 4.3 кестелерде көрсетілген.

Есептеу барысында мақсатты (4.5.8) функцианалын минимумдау және (4.5.6) жүйесін $[t_0,\infty)$ уақыт аралығында $y(0)=y_0$ бастапқы күйінен $y(\infty)=0$ соңғы күйіне жеткізу есебі қарастырылды. Жоспарлау шегінің интервалы

$T = 50$ тең деп алынды. Басқаруға қойылған шектеулер төмендегідей түрде берілген:

$$-0.3476 \le u_1 \le 0.4523, \quad -0.1024 \le u_2 \le 0.6976, \quad -0.0794 \le u_3 \le 0.7205. \tag{4.5.25}$$

Жүйенің бастапқы күйі келесі түрде таңдалынып алынды:

$$y(t_0) = (-600, -200, 200)^*, \tag{4.5.26}$$

$R(t)$, $Q(t)$ және K_0 матрицаларының мәндері:

$$R = \begin{pmatrix} 8100^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & 1600^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & 1250^{-1} \end{pmatrix}, \quad Q = \begin{pmatrix} 0.027 \cdot 10^{-4} & 0 & 0 \\ 0 & 0.25 \cdot 10^{-4} & 0 \\ 0 & 0 & 0.25 \cdot 10^{-4} \end{pmatrix},$$

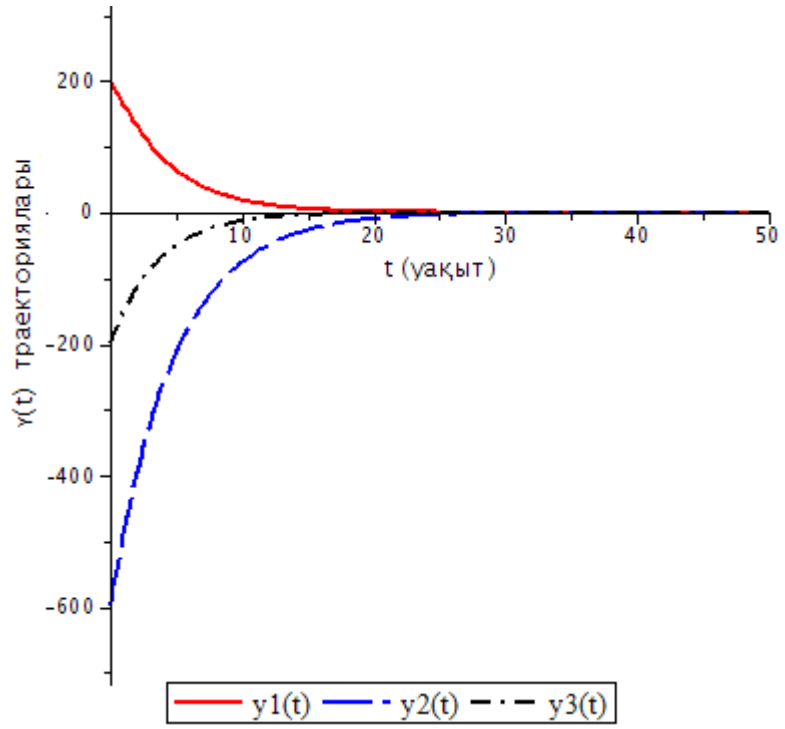
$$K_0 = \begin{pmatrix} 0.107 \cdot 10^{-4} & 0 & 0 \\ 0 & 0.77 \cdot 10^{-4} & 0 \\ 0 & 0 & 0.85 \cdot 10^{-4} \end{pmatrix}.$$

Берілген мәндерге байланысты сандық септеудің нәтижелері 4.5.2– 4.5.6 суреттерде көрсетілген. 4.5.2–суретте жүйе күйінің тиімді траекторясы көрсетілсе, 4.5.3.–суретте осы траекторяның тепе-теңдік күйінен ауытқуы, яғни $z_1(t) = y_1(t) - k_1^s$, $z_2(t) = y_2(t) - k_2^s$, $z_3(t) = y_3(t) - k_0^s$. көрсетілген. Есептеу барысында алынған жүйенің соңғы уақытта тепе-теңдік күйінен ауытқу шамасы:

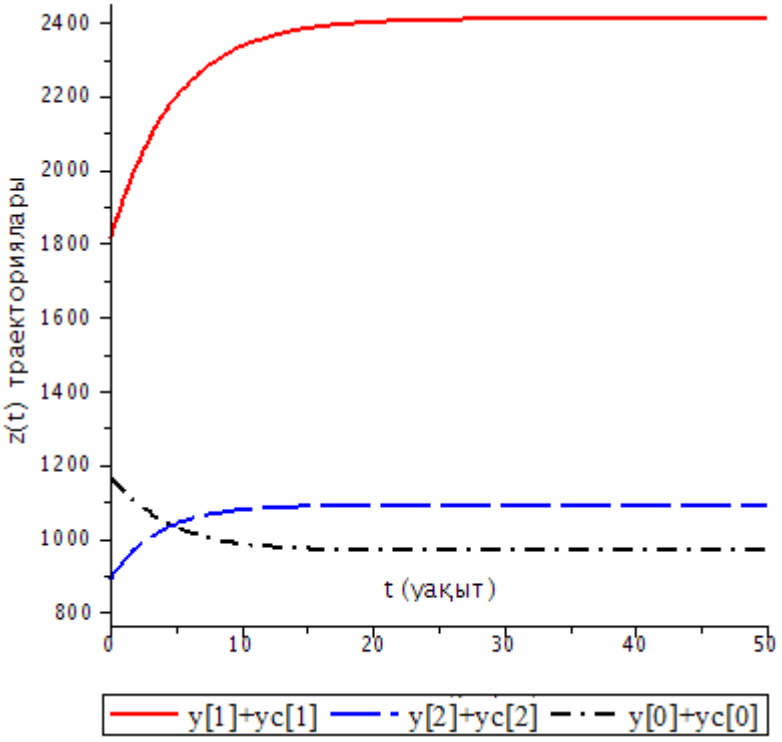
$$z_1(T) = -0.1790 \cdot 10^{-2}, \quad z_2(T) = -0.2179 \cdot 10^{-3}, \quad z_3(T) = 0.1098 \cdot 10^{-2}.$$

Ал 4.5.4–суретте тиімді басқару графигі, суреттен көрініп тұрғандай тиімді басқару берілген U аймағынан шықпайды. Яғни суретте басқарудың $u_1(t)$ мен $u_3(t)$ компоненттері $[0, t_1]$ және $[0, t_2]$ уақыт аралығында (4.5.25) аралықта берілген U аймағының шекарасынан өтеді де, $t \in (t_1, \infty)$, $t \in (t_2, \infty)$ аралығында U аймағының ішкі жағына кіреді. Басқару компоненттерінің ауысуы $u_1(t)$ үшін $t_1 = 0.6344$ уақытында, ал $u_3(t)$ үшін $t_2 = 2.2334$ уақытында болады.

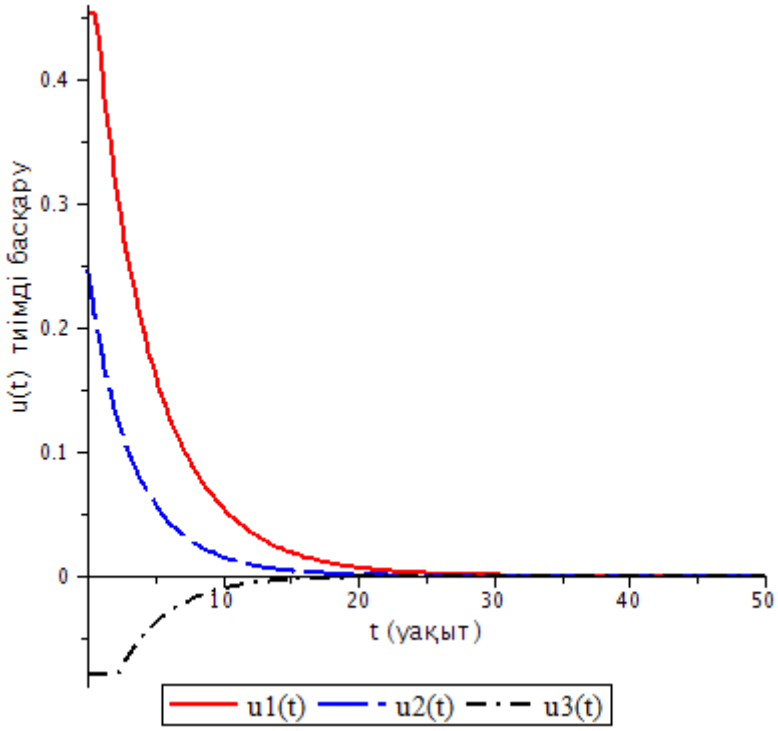
Сонымен қатар есептеу барысында (4.5.22)-(4.5.24) формулаларының көмегімен (4.5.2)-(4.5.4) баланстық ара-қатынастар шартын қанағаттандыратын $(\theta_0(t), \theta_1(t), \theta_2(t))$ еңбек және $(s_0(t), s_1(t), s_2(t))$ инвестиция ресурстарының тиіміді үлестірімі табылды (4.5.5 және 4.5.6 суреттер).



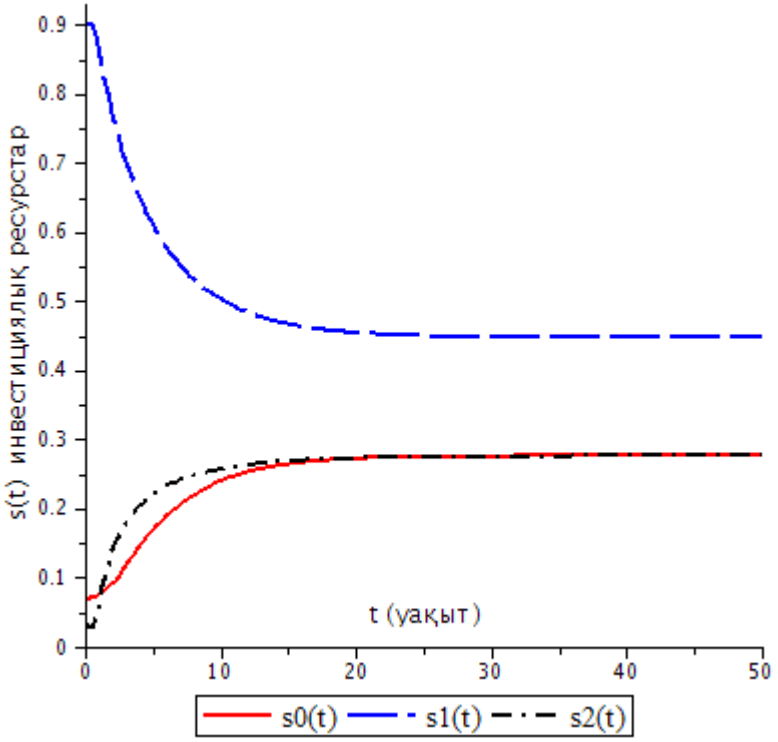
4.5.2–Сурет. $y_i(t)\ (i=0,1,2)$ траекториясының графигі



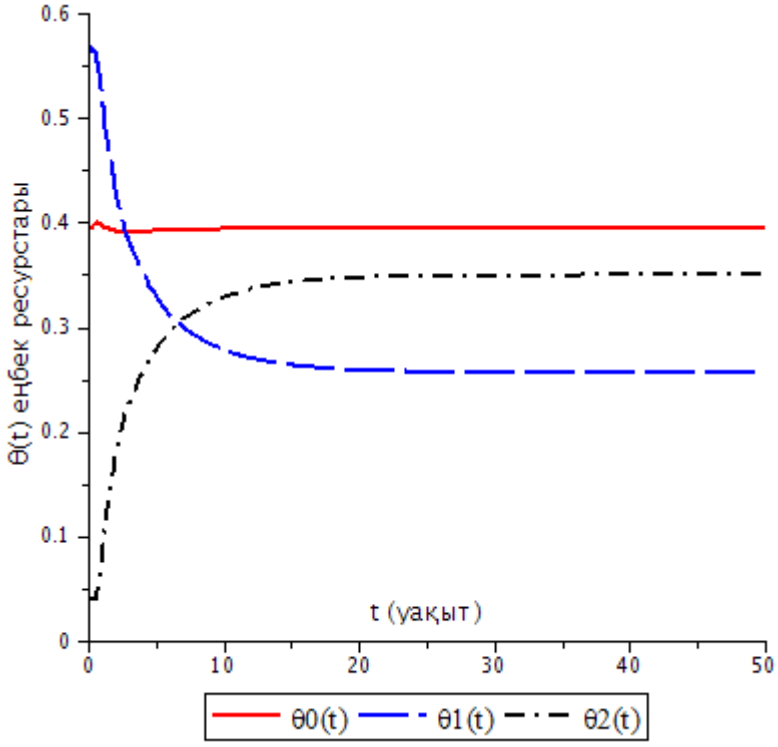
4.5.3–Сурет. $z_i(t)\ (i=0,1,2)$ траекториясының графигі



4.5.4–Сурет. Тиімді басқарудың графигі



4.5.5–Сурет. (4.5.2)-(4.5.4) баланстық ара-қатынастар үшін инвестициялық ресурстарды тиімді үлестірудің графигі



4.5.6–Сурет. (4.5.2)-(4.5.4) баланстық ара-қатынастар үшін еңбек ресурстарын тиімді үлестірудің графигі

4.6 Еңбек және инвестиция ресурстарының үзіліссіз өзгерісіндегі тиімді басқару есебін шешу алгоритмі

Басқару параметрлері шектеулермен берілген сызықты емес жүйелердің бір класына арналған тімді басқару есебін қарастырайық. КҮСЭМ үшін ТБЕ (4.5.1) – (4.5.4) жүйесімен берілсін.

(4.5.1) дифференциалдық теңдеулер жүйесін векторлық түрде төмендегідей белгілеулер енгізе отырып жазайық:

$$\dot{y}(t) = Ay(t) + BD(y(t))u(t), \quad y(0) = y_0, \quad t \in [0, T], \tag{4.6.1}$$

Бұнда келесідей белгілеулер қолданылған:

$$y_1(t) = k_1(t), \; y_2(t) = k_2(t), \; y_3(t) = k_0(t)$$

$$u_1(t) = s_1(t), \; u_2(t) = \frac{s_2(t)\theta_1(t)}{\theta_2(t)}, \; u_3(t) = \frac{s_0(t)\theta_1(t)}{\theta_0(t)},$$

$$f_1(y_1) = k_1(t)^{\alpha_1}, \quad f_2(y_2) = k_2(t)^{\alpha_2}, \quad f_3(y_3) = k_0(t)^{\alpha_0},$$

$$A = \begin{pmatrix} -\lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda_0 \end{pmatrix}, \; B = \begin{pmatrix} A_1 & 0 & 0 \\ 0 & A_1 & 0 \\ 0 & 0 & A_1 \end{pmatrix}, \; D(y) = \begin{pmatrix} y_1(t)^{\alpha_1} & 0 & 0 \\ 0 & y_1(t)^{\alpha_1} & 0 \\ 0 & 0 & y_1(t)^{\alpha_1} \end{pmatrix}.$$

Бұндағы $y=(y_1(t),y_2(t),y_3(t))^*$ объект күйінің векторы, ал $u=(u_1(t),u_2(t),u_3(t))^*$ басқару векторы. Жүйенің бастапқы және соңғы күйлері төмендегідей түрде берілген:

$$y(0)=y^0,\quad y(T)=y_c. \tag{4.6.2}$$

$u=(u_1(t),u_2(t),u_3(t))^*$ басқару векторының компаненттері бастапқы (4.5.2)–(4.5.4) баланстық шектеулерінен алынған келесі түрдегі екі жақты шектеуді қанағаттандырады:

$$0<\gamma_1\le u_1\le\gamma_2<1,\quad 0<\gamma_1\le u_2\le\gamma_2<1,\quad 0<\gamma_1\le u_3\le\gamma_2<1, \tag{4.6.3}$$

(4.6.1) түріндегі сызықты емес жүйелердің орнықтылығы А.П. Афанасьев және т.б. [77] пен С.М. Лобанов және т.б. [78] ғылыми мақалаларында зерттелінген.

Осыған байланысты **есептің қойылымы** келесідей болады: $[t_0,T]$ уақыт аралығында (4.6.1) жүйесін $y(t_0)=y_0$ бастапқы күйден y^s тепе-теңдіктің қалаулы күйіне жеткізетін және төмендегі функцияналды минимумдайтын $u(y,t)$ синтездеуші басқаруды табу керек.

$$J(y,u,t)=\frac{1}{2}\int_0^T[(y(t)-y_s)^*Q(y(t)-y_s)+(D(y(t))u(t)-D_su_s)^*R(D(y(t))u(t)-D_su_s)]dt+ \\ +\frac{1}{2}(y(T)-y_s)^*F(y(T)-y_s), \tag{4.6.4}$$

бұндағы Q $-(n\times n)$ өлшемді жартылай оң анықталған матрица, ал R, F, $D(y(t))-$ $(n\times n)$ өлшемді оң анықталған матрицалар, $D_s=D(y_s)$.

Есепті шешу үшін, (4.6.4) функционалына (4.6.1) дифференциалдық теңдеулер жүйесін $\lambda=K(t)(y(t)-y_s)+q(t)$ көбейткішіне көбейтіп қосамыз және төмендегі өрнекті де қосмыз:

$$\lambda_1^*(y,t)D^*(y(t))RD(y(t))[\gamma_1-u(t)]+\lambda_2^*(y,t)D^*(y(t))RD(y(t))[u(t)-\gamma_2]+ \\ +\lambda_3^*(t)[y(t)-y_s-W(t,T)q(t)], \tag{4.6.5}$$

бұндағы $\lambda_1(t)\ge 0,\ \lambda_2(t)\ge 0$. Нәтижесінде келесі функционалды аламыз:

$$L(y,u,t)=\int_{t_0}^T\{\frac{1}{2}(y(t)-y_s)^*Q(y(t)-y_s)+\frac{1}{2}(D(y(t))u(t)-D_su_s)^*R(D(y(t))u(t)-D_su_s)+ \\ +(K(t)(y(t)-y_s)+q(t))^*(A(y(t)-y_s)+B(D(y(t))u(t)-D_su_s)-\dot{y}(t))+ \\ +\lambda_1^*(y,t)D^*(y(t))RD(y(t))[\gamma_1-u(t)]+\lambda_2^*(y,t)D^*(y(t))RD(y(t))[u(t)-\gamma_2]+ \\ +\lambda_3^*(y,t)[y(t)-y_s-W(t,T)q(t)]\}dt+\frac{1}{2}(y(T)-y_s)^*F(y(T)-y_s), \tag{4.6.6}$$

бұндағы $q(t)$ $-(n\times 1)$ өлшемді вектор; $K(t)$ $-(n\times n)$ өлшемді оң анықталған

симметриялы матрица.

Қарастырылып отырған есепке Лагранж көбейткіштер әдісін қолданудың мәні шектеулерімен берілген бастапқы ТБЕ шектеулері жоқ есепке түрлендіруде болып табылады. Сонымен бірге ескере кететін жайт, жаңа есептің шешімі бастапқы берілген есептің де шешімі болатындай болып құрылады [51].

Келесі функцианалды қарастырайық:

$$v(y,t)=\frac{1}{2}(y(t)-y_s)^*K(t)(y(t)-y_s)+(y(t)-y_s)^*q(t),$$

$$\frac{\partial v(y,t)}{\partial y(t)}=K(t)(y(t)-y_s)+q(t), \tag{4.6.7}$$

$$\begin{aligned}M(y,u,t)&=\frac{1}{2}(y(t)-y_s)^*[Q+\dot{K}(t)](y(t)-y_s)+\\&+\frac{1}{2}(D(y(t))u(t)-D_su_s)^*R(D(y(t))u(t)-D_su_s)+\\&+(K(t)(y(t)-y_s)+q(t))^*(A(y(t)-y_s)+B(D(y(t))u(t)-D_su_s))+\\&+(y(t)-y_s)\dot{q}(t)+\lambda_1^*(y,t)D^*(y(t))RD(y(t))[\gamma_1-u(t)]+\\&+\lambda_2^*(y,t)D^*(y(t))RD(y(t))[u(t)-\gamma_2]+\lambda_3^*(y,t)[y(t)-y_s-W(t,T)q(t)].\end{aligned} \tag{4.6.8}$$

Онда (4.6.6) функцианалын келесі түрде жазуға болады:

$$L(y,u,t)=v(y_0,t_0)+\int_{t_0}^{T}M(y,u,t)dt-v(y(T),T)+\frac{1}{2}(y(T)-y_s)^*F(y(T)-y_s). \tag{4.6.9}$$

Ізделініп отырған басқаруды келесі теңдеуден аламыз:

$$D(y(t))u(t)-D_su_s=-R^{-1}B^*(K(t)(y(t)-y_s)+q(t))-D(y(t))(\lambda_2(y,t)-\lambda_1(y,t)), \tag{4.6.10}$$

бұндағы $K(t),\ W(t,T)$ матрицалары мен $q(t)$ векторы $t\in[t_0,T]$ уақыт аралығында келесі дифференциалдық теңдеулерді қанағаттандырады:

$$\dot{K}(t)+K(t)A+A^*K(t)-K(t)BR^{-1}B^*K(t)+Q=0,\ K(T)=K_T, \tag{4.6.11}$$

$$\dot{W}=WA_1^*(t)+A_1(t)W-B_1,\quad W(T,T)=(F-K_T)^{-1}, \tag{4.6.12}$$

$$\dot{q}=-A_1^*(t)q(t)+W^{-1}(t,T)BD(y(t))\varphi(y,t),\quad q(T)=(F-K(T))[y(T)-y_s]. \tag{4.6.13}$$

Бұнда келесідей белгілеулер қолданылған:

$$\begin{aligned}A_1(t)&=A-BR^{-1}B^*K(t),\\B_1&=BR^{-1}B^*,\\\varphi(y,t)&=[\lambda_1(y,t)-\lambda_2(y,t)],\end{aligned} \tag{4.6.14}$$

$$\begin{aligned}\lambda_1(y,t)&=\max\{0;\gamma_1-\omega(y,t)\}\geq 0,\\\lambda_2(y,t)&=\max\{0;\omega(y,t)-\gamma_2\}\geq 0,\\\omega(y,t)&=D^{-1}(y)[D_su_s-R^{-1}B^*(K(t)(y(t)-y_s)+q(t))].\end{aligned} \tag{4.6.15}$$

(4.6.11), (4.6.12) теңдеулерінің шешімдері бар болсын делік, онда жүйенің қозғалыс заңдылығын анықтайтын дифференциалдық теңдеулерді келесі түрде береміз:

$$\dot{y} = A_1(t)(y(t) - y_s) - B_1 q(t) + BD(y(t))\varphi(y,t), \qquad y(t_0) = y_0. \tag{4.6.16}$$

(4.6.13) дифференциалдық теңдеуінің бастапқы шарты төмендегі ара – қатынастан алынады:

$$y(t) - y_s = W(t,T)q(t), \quad t \in [t_0, T]. \tag{4.6.17}$$

(4.6.1) – (4.6.4) жүйесімен берілген ТБЕ үшін алынған нәтижелерді келесі тоеремамен тұжырымдаймыз.

4.6.1 – теорема. $t_0 \le t \le T$ аралығында Q – жартылай оң анықталған матрица, ал R, F, $D(y(t))$–оң анықталған матрицалар болсын делік және $W_0 = W(t_0, T)$ – матрицасы оң анықталған болсын. t_0 уақытында (4.6.1) жүйесі басқарылатын жүйе деп ұйғарайық. Онда (4.6.1) – (4.6.4) есебіндегі $(y(t), u(t))$ жұбының тиімді болуы үшін келесі екі пуктің орындалуы қажетті және жеткілікті:

1. $y(t)$ келесі дифференциалдық теңдеуді қанағаттандыруы:

$$\dot{y} = A_1(t)(y(t) - y_s) - B_1 q(t) + BD(y(t))\varphi(y,t), \quad y(t_0) = y_0; \tag{4.6.18}$$

2. Ал $u(t)$ басқаруының келесідей анықталуы:

$$u(y,t) = D^{-1}(y(t))[D_s u_s - R^{-1}B^*(K(t)(y(t) - y_s) + q(t))] + \varphi(y,t). \tag{4.6.19}$$

Бұндағы $K(t)$, $W(t,T)$ матрицалары (4.6.11) және (4.6.12) теңдеулерінің шешімдері болып табылса, $q(t)$ функцияы (4.6.13) дифференциалдық теңдеуін қанағаттандырады, $\varphi(y,t)$ вектор-функциясы (4.6.14) формуласынан анықталады [79].

Есептің шешу алгоритмі. (4.6.1)–(4.6.4) түріндегі ТБЕ шешудің компьютерде есептеу алгоритмін сипаттайық.

1. $K(t)$ және $W(t,T)$ матрицаларын анықтау үшін $[t_0, T]$ аралығында $K(T) = K_T$, $W(T,T) = (F - K_T)^{-1}$. шарттарынмен берілген (4.6.11) мен (4.6.12) дифференциалдық теңдеулер жүйесін интегралдаймыз.

Бұл жерде K_T $-(n \times n)$ өлшемді, оң анықталған симметриялық матрица. (4.6.11) матрицалық дифференциалдық теңдеуіндегі $K(T) = K_T$ соңғы шартының әр-түрлі берілуіне байланысты $K(t)$ мен $W(t,T)$ матрицаларының да әр-түрлі мәндерін аламыз. Бірақ, соған қарамастан (4.6.19) түріндегі $u(t)$ вектор–функциясын аламыз;

2. $y(t_0) = y_0$, $y(T) = y_c$ шарттарын беріп $q(t_0) = W^{-1}(t_0, T)(y_0 - y_c)$ есептейміз;

3. (4.6.16) және (4.6.13) дифференциалдық теңдеулерін $[t_0, T]$ аралығында $y(t_0) = y_0$, $q(t_0) = q_0$ бастапқы шарттарымен Рунге–Кутт әдісін қолданып

интегралдаймыз. Осы екі теңдеуді интегралдау нәтижесінде $y(t)$ тиімді траектория мен $u(t)$ тиімді басқарудың графиктерін аламыз;

4. Жүйе күйі $y(t)$ мен $u(t)$ тиімді басқару табылсын делік, онда:

$$f_i(y_i) = (y_i)^{\alpha_i}, \quad v(t) = \frac{\beta_1 A_1 f_1(y_1(t)) + \beta_2 A_2 f_2(y_2(t)) \dfrac{(1-u_1(t))}{u_2(t)}}{(1-\beta_0) A_0 f_3(y_3(t)) \dfrac{(1-u_1(t))}{u_3(t)} + \beta_2 A_2 f_2(y_2(t)) \dfrac{(1-u_1(t))}{u_2(t)}}; \quad (4.6.20)$$

(4.5.4) баланыстық ара-қатынастың орындалуын қамтамасыз етеді;

$$s_1(t) = u_1(t), \quad s_2(t) = (1-v(t))(1-u_1(t)), \quad s_0(t) = v(t)(1-u_1(t)) \qquad (4.6.21)$$

(4.5.2) шартының орындалуын қамтиды;

$$\theta_1(t) = \frac{1}{1 + \dfrac{s_0(t)}{u_3(t)} + \dfrac{s_2(t)}{u_2(t)}}, \quad \theta_2(t) = \frac{(1-v(t))(1-s_1(t))\theta_1(t)}{u_2(t)}, \quad \theta_0(t) = \frac{v(t)(1-s_1(t))\theta_1(t)}{u_3(t)}, \qquad (4.6.22)$$

(4.5.3) шартының орындалуын қамтиды.

Сипатталған алгоритмнің блоктық сызбасы төмендегі суретте көрсетілген (4.6.1–сурет).

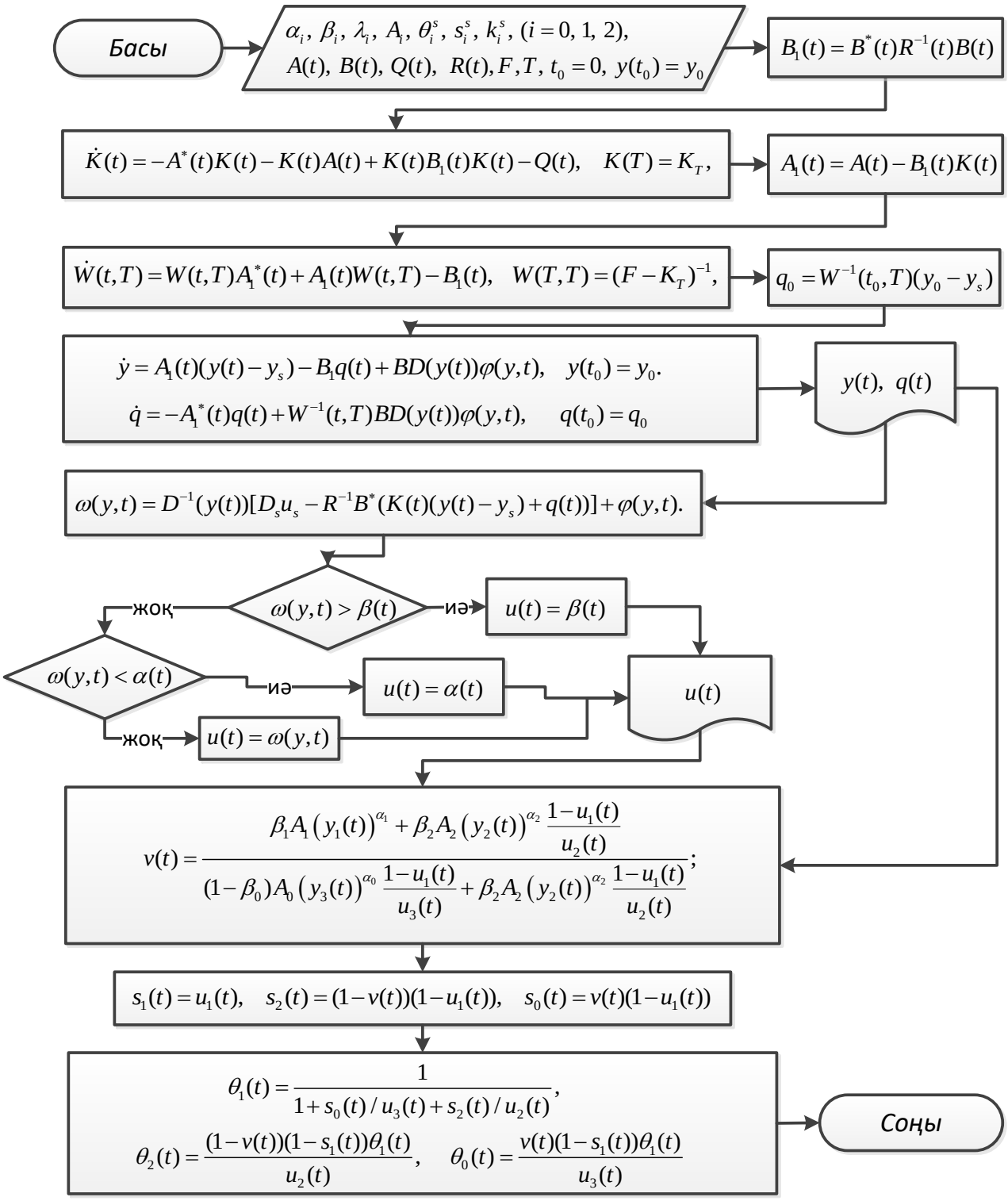
Еңбек және инвестиция ресурстарын тиімді үлестіудің сандық есептеулері. ТБЕ (4.6.1)-(4.6.4) сызықты емес моделі үшін тиімді траектория мен басқаруды анықтауға арналған сандық есептеулер жүргізілді. Есептеулер нәтижесін жүйенің бастапқы күйіне байланысты екі нұсқада көрсетейік.

Жүйе парамерлерінің мәндері 4.1 және 4.3 кестелерінде көрсетілген және осы есептеулер үшін A және B матрицалары төмендегідей түрде берілген:

$$A = \begin{pmatrix} -0.05 & 0 & 0 \\ 0 & -0.05 & 0 \\ 0 & 0 & -0.05 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1.35 & 0 & 0 \\ 0 & 1.35 & 0 \\ 0 & 0 & 1.35 \end{pmatrix}.$$

Есептеу барысында мақсатты (4.6.4) функцианалын минимумдау және (4.6.1) жүйесін $[0, T]$ уақыт аралығында $y(0) = y_0$ бастапқы күйінен $y(T) = y_s$ соңғы күйіне жеткізу есебі қарастырылды. Жоспарлау шегінің интервалы $T = 20$ тең деп алынды. Басқаруға қойылған шектеулер төмендегідей түрде берілген:

$$0.1 \le u_i \le 0.9, \quad (i = 1, 2, 3). \qquad (4.6.28)$$



4.6.1–Сурет. Сызықты емес КҮСЭМ үшін тиімді траектория мен синтездеуші басқаруды тұрғызу алгоритмінің блок-схемасы

І–нұсқа. Жүйенің бастапқы күйі келесі түрде таңдалынып алынды:

$$y(t_0)=(-200,\ -100,\ -100)^*,$$

$Q(t)$, $R(t)$ және K_T матрицаларының мәндері:

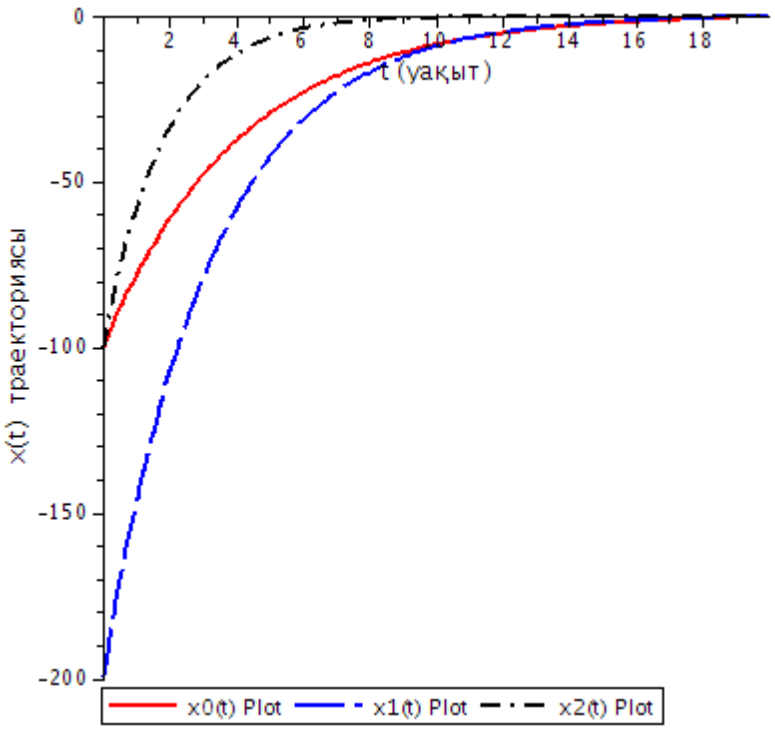
$$R=\begin{pmatrix} 8100^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & 1600^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & 1250^{-1} \end{pmatrix},\quad Q=\begin{pmatrix} 0.25\cdot 10^{-4} & 0 & 0 \\ 0 & 10^{-4} & 0 \\ 0 & 0 & 10^{-4} \end{pmatrix},\quad K_T=\begin{pmatrix} 0.02\cdot 10^{-3} & 0 & 0 \\ 0 & 0.16\cdot 10^{-3} & 0 \\ 0 & 0 & 0.08\cdot 10^{-3} \end{pmatrix}.$$

Берілген мәндерге байланысты сандық септеудің нәтижелері 4.6.2 – 4.6.5 суреттерде көрсетілген. 4.6.2–суретте тиімді траекторияның графигі жүйенің тепе-теңдік күйінен ауытқуы, яғни $y_1(t)=k_1(t)-k_1^s$, $y_2(t)=k_2(t)-k_2^s$, $y_3(t)=k_0(t)-k_0^s$. түрінде көрсетілген. Осындай графикті тұрғызудың басты себебі, соңғы уақытта ауытқу нөлге ұмтылады. Яғни, соңғы уақыт моментінде жүйе траекториясы тепе-теңдік күйге тура жетуі керек. Есептеу машинасында жүргізілген сандық эксперименттер, қойылған есепті шешуде қарастырылып отырған алгоритмнің тиімді екенін көрсетті. Оны есептеу барысында алынған жүйенің соңғы уақытта тепе-теңдік күйінен ауытқу шамасынан көруге болады:

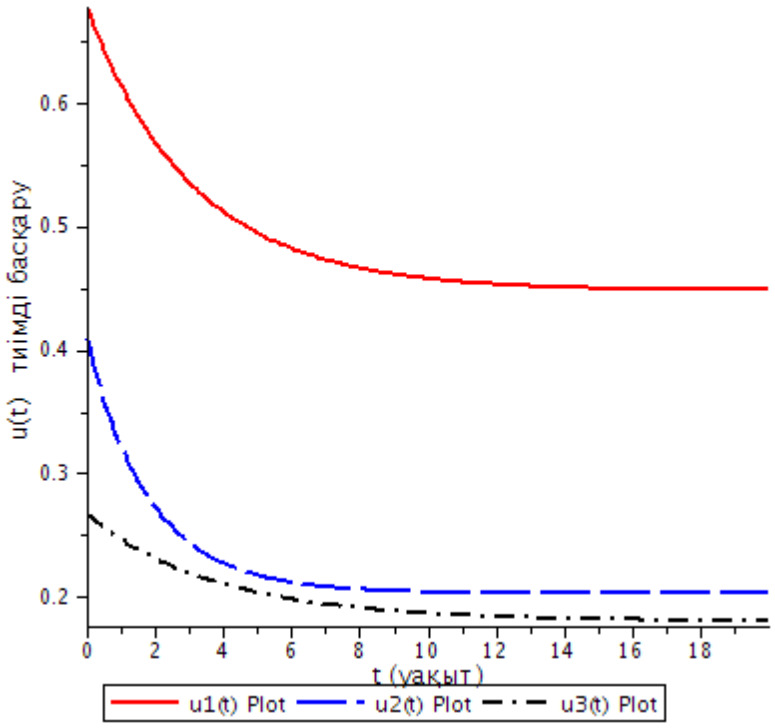
$$y_1(T)=9.4173\cdot 10^{-7},\quad y_2(T)=4.4095\cdot 10^{-7},\quad y_3(T)=2.4055\cdot 10^{-7}.$$

Ал 4.6.3–суретте тиімді басқару графигі, суреттен көрініп тұрғандай тиімді басқару (4.6.28) шектеулерімен берілген U аймағынан шықпайды.

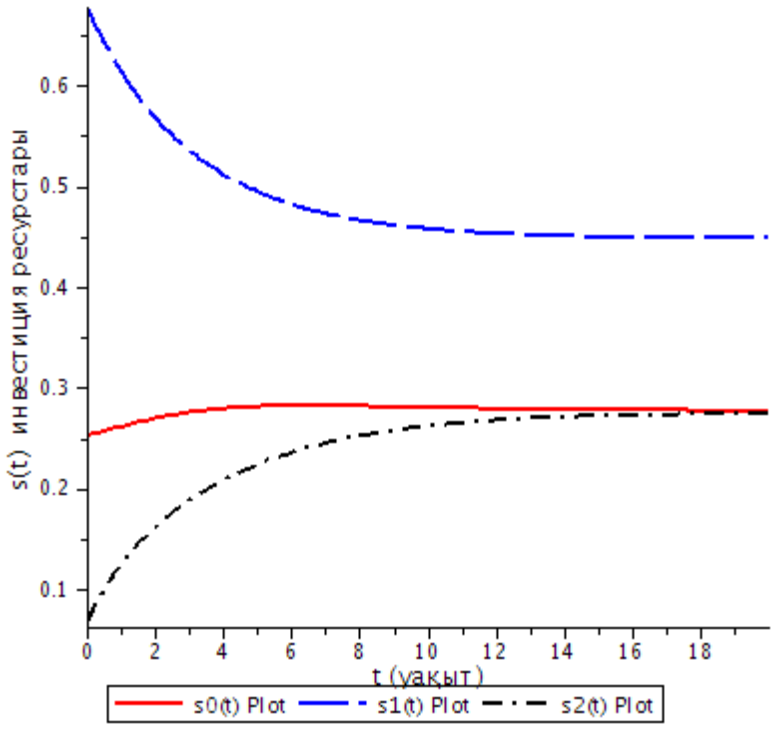
Сонымен қатар есептеу барысында (4.6.20)-(4.6.22) формулаларының көмегімен (4.5.2)-(4.5.4) баланстық ара-қатынастар шартын қанағаттандыратын $(\theta_0(t), \theta_1(t), \theta_2(t))$ еңбек және $(s_0(t), s_1(t), s_2(t))$ инвестиция ресурстарының тиіміді үлестірімі табылды (4.6.4 және 4.6.5 суреттер).



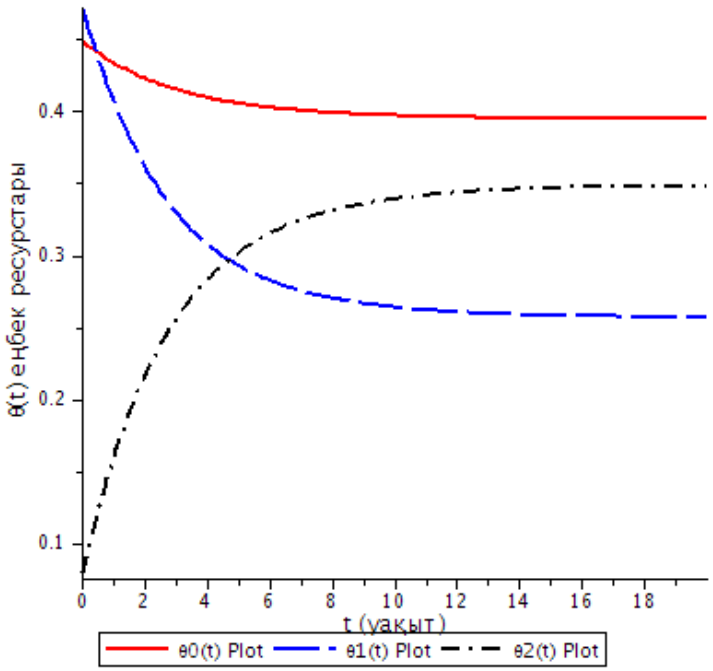
4.6.2–Сурет. $y_i(t)\ (i=0, 1, 2)$ траекториясының графигі



4.6.3–Сурет. Тиімді басқарудың графигі



4.6.4–Сурет. (4.5.2)-(4.5.4) баланстық ара-қатынастар үшін инвестициялық ресурстарды тиімді үлестірудің графигі



4.6.5–Сурет. (4.5.2)-(4.5.4) баланстық ара-қатынастар үшін еңбек ресурстарын тиімді үлестірудің графигі

II–нұсқа. Бұл жолы жүйенің бастапқы күйі келесі түрде таңдалынып алынды:

$$y(t_0) = (-700, -300, 300)^*,$$

Осыған байланысты $Q(t)$, $R(t)$ және K_T матрицалары келесідей түрде табылады:

$$R = \begin{pmatrix} 8100^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & 1600^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & 1250^{-1} \end{pmatrix}, \quad Q = \begin{pmatrix} 0.02\cdot 10^{-4} & 0 & 0 \\ 0 & 0.11\cdot 10^{-4} & 0 \\ 0 & 0 & 0.11\cdot 10^{-4} \end{pmatrix}, \quad K_T = \begin{pmatrix} 0.08\cdot 10^{-4} & 0 & 0 \\ 0 & 0.47\cdot 10^{-4} & 0 \\ 0 & 0 & 0.51\cdot 10^{-4} \end{pmatrix}.$$

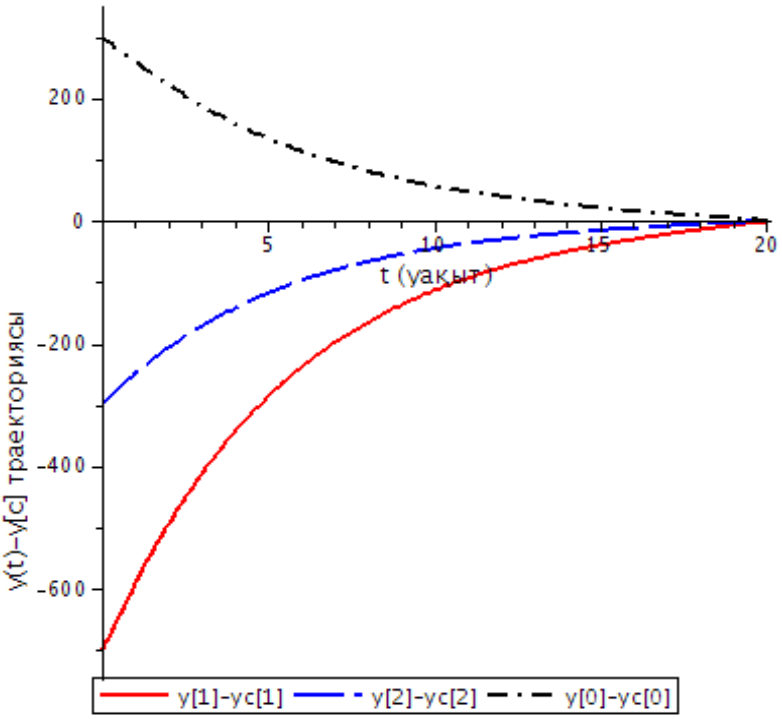
Есептеу нәтижелері 4.6.1 – 4.6.9 суреттерде көрсетілген. 4.6.1–суретте тиімді траекторияның графигі жүйенің тепе-теңдік күйінен ауытқу формасы түрінде көрсетілген. Жүйенің соңғы уақыттағы тепе-теңдік күйінен ауытқу шамасы төмендегідей:

$$y_1(T) = -0.0679, \quad y_2(T) = -0.0262, \quad y_3(T) = 0.0362.$$

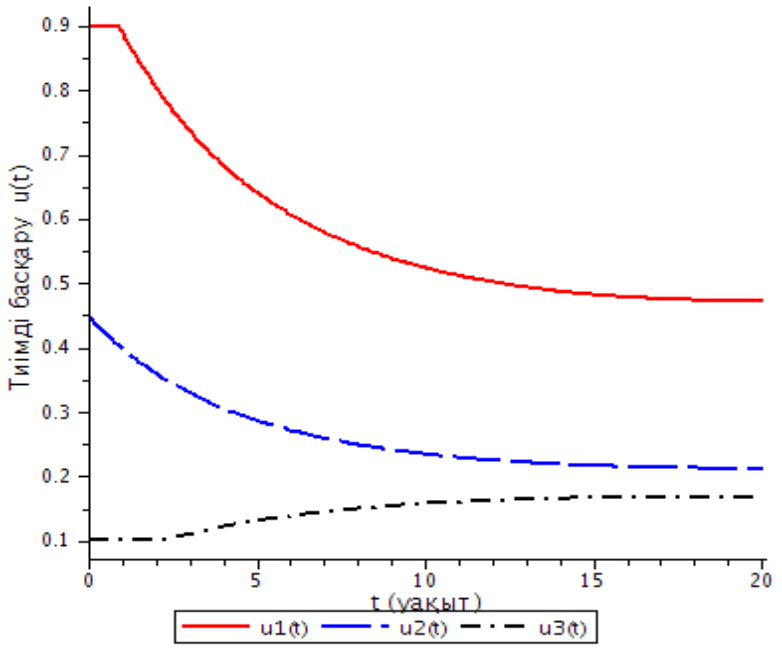
Ал 4.6.7–суретте тиімді басқару графигі, суреттен көрініп тұрғандай тиімді басқару (4.6.28) шектеулерімен берілген U аймағынан шықпайды.

Бұнда $u_1(t)$ мен $u_3(t)$ басқару компоненттері сәйкесінше $[0, t_1]$ және $[0, t_2]$ уақыт аралығында U аймағының шекарасында жатады да, $t \in (t_1, T]$, $t \in (t_2, T]$ уақытында U-дың ішкі аймағына кіреді. $u_1(t)$ компоненті үшін ауысу уақыты $t_1 = 0.637$ тең болса, $u_3(t)$ компоненті үшін ауысу уақыты $t_2 = 2.234$ тең болды.

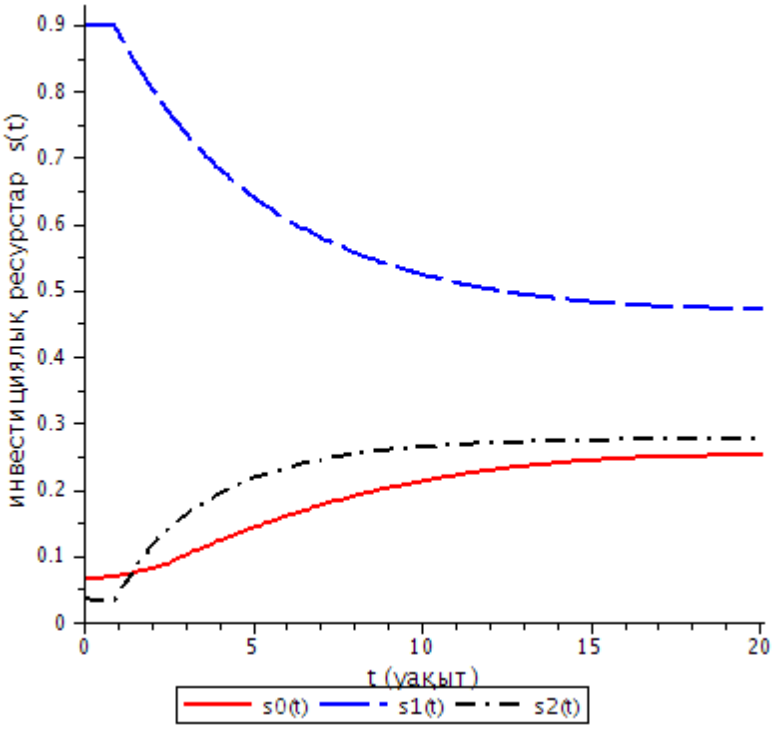
Сонымен қатар есептеу барысында (4.6.20)-(4.6.22) формулаларының көмегімен (4.5.2)-(4.5.4) баланстық ара-қатынастар шартын қанағаттандыратын $(\theta_0(t), \theta_1(t), \theta_2(t))$ еңбек және $(s_0(t), s_1(t), s_2(t))$ инвестиция ресурстарының тиіміді үлестірімі табылды (4.6.8 және 4.6.9 суреттер).



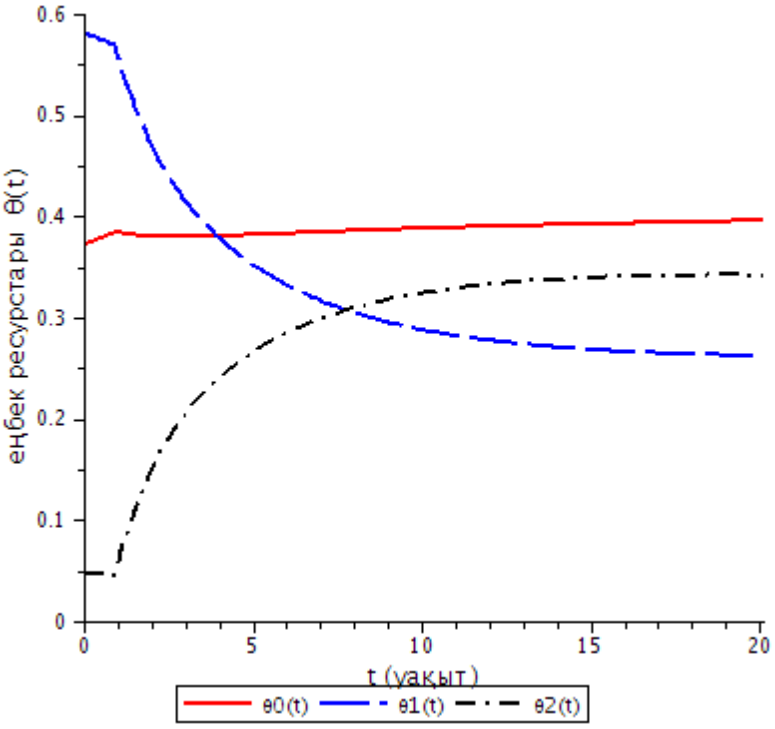
4.6.6–Сурет. $y(t)-y_s$ траекториясының графигі



4.6.7–Сурет. Тиімді басқарудың графигі



4.6.8–Сурет. (4.5.2)-(4.5.4) баланстық ара-қатынастар үшін инвестициялық ресурстарды тиімді үлестірудің графигі



4.6.9–Сурет. (4.5.2)-(4.5.4) баланстық ара-қатынастар үшін еңбек ресурстарын тиімді үлестірудің графигі

4-ші бөлім бойынша тұжырымдар

Бұл бөлімде «Секторлар арасында еңбек және инвестиция ресурстарын тиімді үлестіруді модельдеу және жоспарлау» модулі базасында сызықты және сызықты емес жүйемен сипатталған КҮСЭМ үшін кері байланыс қағидасы негізінде синтездеуші басқаруды тұрғызу және тиімді тұрақтылықты іздеу есептерінің 2-ші бөлімде сипатталған алгоритмдері бойынша сандақ есептеулер ақырлы және шексіз уақыт аралықтарында, басқару параметрлері шектеулерсіз және шектеулермен берілген ТБЕ үшін жүргізілген.

Есептеулер нәтижесінде анықталған әрбір алгоритм бойынша жүйелердің күйі мен ағымдағы уақыттан тәуелді сызықты емес басқарулары табылып, сәйкесінше графиктері тұрғызылды.

Есептеу барысында $K(t)y(t)+q(t)$ және $K(t)y(t)$ түріндегі Лагранж көбейткіштерін таңдау, кері байланыс қағидасы бойынша тиімді басқаруды тұрғызуға мүмкіндік туғызды. Ұсынылып отырған бұл тәсілдің ерекшелігі – бастапқы сызықты емес жүйені коэффициенттері жүйе күйінен тәуелді болатын басқару бойынша сызықты жүйеге түрлендіруде икемді болатындығында, есепті шешу барысында басқару параметрлеріне қойылған шектеулерді ескеруге мүмкіндік береді. Сызықты және сызықты емес жүйелер үшін алынған бұл нәтижелер, ақырлы және шексіз уақыт аралықтарында берілген КҮСЭМ үшін басқарушы параметрлерді тұрғызуда қолданылады.

Сандық есептеулердің нәтижесінде $[t_0,T]$ және $[t_0,\infty)$ уақыт мерзімдерінде секторлар арасында еңбек және инвестиция ресурстарының үлестірімінің бірқалыпты болатындығы көрсетіліп, соңғы уақытта жүйе тепе-теңдік күйге, ал басқарулар өздерінің тұрақты күйлеріне $s^s=(s_0^s, s_1^s, s_2^s)^*$, $\theta^s=(\theta_0^s, \theta_1^s, \theta_2^s)^*$ жеткізілетіндігі график түрінде дәлелденді. Есептеу барысында табылған басқару параметрлері, инвеститция мен еңбек ресурстары бойынша қойылған баланыстық ара-қатынастар шарттарының орындалуын қамтамасыз ететіндей түрде таңдалынған.

ҚОРЫТЫНДЫ

Диссертациялық жұмысты зерттеу барысында экономика салаларын басқарудың ақпараттық жүйесі үшін «Секторлар арасында еңбек және инвестиция ресурстарын тиімді үлестіруді модельдеу және жоспарлау» модулі өңделді. Аталмыш модульді құру кластерлі экономиканы зерттеу және онда тиімді басқаруға байланысты есептерді шешу қажеттілігінен туындайды.

Экономикадағы өтпелі процестерді зерттеу мақсатында кластелі экономиканың математикалық моделі ретінде экономиканың үш секторлы моделі таңдап алынды. Бұл модельде әр сектор өз өнімін: *материалдық сектор* ($i=0$)–еңбек заттарын; еңбек жабдықтарымен қамтамасыз ететуші ($i=1$)–*қор құрушы сектор*; *тұтынушы сектор* ($i=2$)–тұтыну өнімдерін өндіреді. Секторлар кез-келген көлемдегі өнімді шығармайды, тек өзге секторлар мен қолданушыларға қажетті өнімді, қолда бар ресурстар жеткенше ғана көлемде өндіреді.

Өнім өндірісін және еңбек өнімін арттыру мақсатында кластердің үш секторлы экономикалық моделіне инвестиция және еңбек ресурстары түріндегі шектеулер қойылады. Осыған байланысты зерттеу жұмысында келесі класс еспетері шығарылды:

1. **Ақырлы уақыт** интервалында, **сызықты теңдеулер** жүйесімен және басқару параметрлері **шектеулерсіз** берілген кластердің үш секторлы экономикалық моделі үшін синтездеуші басқаруды іздеу;
2. **Ақырлы уақыт** интервалында, **сызықты теңдеулер** жүйесімен және басқару параметрлері **шектеулермен** берілген кластердің үш секторлы экономикалық моделі үшін синтездеуші басқаруды іздеу;
3. **Ақырлы уақыт** интервалында, **сызықты емес теңдеулер** жүйесімен және басқару параметрлері **шектеулермен** берілген кластердің үш секторлы экономикалық моделі үшін синтездеуші басқаруды іздеу;
4. **Шексіз уақыт** интервалында, **сызықты емес теңдеулер** жүйесімен және басқару мәндері **шектеулермен** берілген кластердің үш секторлы экономикалық моделі үшін тиімді тұрақтандыруды іздеу.

Экономикалық жүйені белгіленген уақыт аралығында белгілі бір бастапқы күйден қалаулы соңғы күйге ауыстыратын тиімді басқару есебін шешу үшін арнайы түрдегі Лагранж көбейткіштері әдісі қолданылған. Есепті шешуде осы әдісті қолдану басқару параметрлеріне қойылған шектеулерді ескеруге және синтездеуші басқаруды табуға мүмкіндік береді. Есептеу барысында жүйенің қалаулы немесе қажетті соңғы күйі ретінде тепе-теңдік күйі таңдалып алынады, себебі бұл күйде барлық секторларда өндірістің жыл сайынғы өнімдерді өндіруі қарқыны артады. Ал, тиімді басқару есебінің мақсатты функциясы ретінде терминалдық бөлігі жоқ квадраттық түрде берілген функционал таңдап алынған.

Қарастырып отырған тиімді басқару есептерінің ерекшеліктері:

– Есептер ақырлы уақыт аралығында шешіледі және жүйе траекториясының оң және сол жақ ұштары бекітілген, яғни берілген бастапқы

уақытта $t = t_0$, бастапқы нүктеден $y(0) = y_0$ шыққын траектория үшін оның соңғы уақытта T, соңғы нүктеден $y(T) = y_s$ өтуін қамтамасыз ету қажет.

– Қарастырған ТБЕ-нің басқару параметрлері екі жақты шектеулермен беріледі, яғни басқару векторының әрбір компоненті өздеріне қойылған шектеулерді қанағаттандыра отырып, бір-бірінен тәуелсіз өзгеріп отырады. Сондай-ақ, тиімді басқару ағымдағы уақыт t пен жүйе күйінен $y(t)$ тәуелді синтездеуші басқару түрінде ізделінеді және олардың сандық шешімдерін алу мақсатында компьютерге ыңғайлы болатын шешу алгоритмдері тұрғызылды.

«Секторлар арасында еңбек және инвестиция ресурстарын тиімді үлестіруді модельдеу және жоспарлау» модулінің программалық пакеті әзірленді және ол MAPLE ортасында жүзеге асырылды. Аталмыш модульде кластердің үш секторлы экономикалық моделі үшін әрбір тиімді басқару есебіне өңделген алгоритмдер бойынша сандық есептеулер жүргізілді. Нәтижесінде, есепті шешуде ұсынылып отырған алгоритмдердің $y(T) = 0$ шартының өте жоғарғы дәлділікпен нақты орындалуын қамтамасыз ететіндігі сандық және графикалық түрде дәлелденді. Модель коэффициенттері мен сандық есептеулер нәтижесін сақтау және оларға қол жеткізу үшін Microsoft SQLite ортасында мәліметтер қоры жасалды және енгізілді.

Диссертациялық жұмысты орындау барысында құрылған экономика салаларын басқарудың ақпараттық жүйесі үшін «Секторлар арасында еңбек және инвестиция ресурстарын тиімді үлестіруді модельдеу және жоспарлау» модулі – ел экономикасының теңгерімді өсуін қамтамасыз етуде шектеулі ресурстарды тиімді үлестіру үшін қажетті автоматтандырылған құрал болмақ, ал алынған теориялық нәтижелер кластерлік экономиканы жоспарлау мен модельдеуде ғылымға қосқан үлес болмақ.

ПАЙДАЛАНҒАН ӘДИБЕТТЕР ТІЗІМІ

1 Solow R.M. Contribution to the theory of economic growth // Quarterly Journal of Economics, 1956. – V.70. –P. 65–94.

2 Колемаев В.А. Экономико-математическое моделирование. – М.: Юнити-Дана, 2005. – 295 с.

3 Колемаев В.А. Оптимальный сбалансированный рост открытой трехсекторной экономики // Прикладная эконометрика. – 2008. – № 11(3). – С. 15–42.

4 Zhou Sh., Xue M. A model of optimal allocations of physical capital and human capital in three sectors // Wuhan University Journal of Natural Sciences. – 2007. – Vol. 12, No. 6. – P. 997-1002.

5 Джусупов А.А., Калимолдаев М.Н., Малишевский Е.В., Мурзабеков З.Н. Решение задачи стабилизации трехсекторной модели отрасли // Проблемы информатики.– 2011.– № 1. – С. 20–27.

6 Zhang J.Sh. The analytical solution of balanced growth of non-linear dynamic multi-sector economic model // Economic Modelling. – 2011. – Vol. 28, No. 1. – P. 410-421.

7 Dumitru, O., Loretti, D., Mihaela, N. Deterministic and Stochastic Three-Sector Dynamic Growth Model with Endogenous Labour Supply // Economic record, – 2013. № 89(284). –P. 99-111.

8 Sen P. Capital accumulation and convergence in a small open economy // Review of International Economics. – 2013. – Vol. 21, No. 4. – P. 690-704.

9 De S. Intangible capital and growth in the «new economy»: implications of a multi-sector endogenous growth model // Structural Change and Economic Dynamics. – 2014. – Vol. 28. –P. 25-42.

10 Қазақстан Республикасын индустриялық-инновациялық дамытудың 2015 – 2019 жылдарға арналған мемлекеттік бағдарламасы, Астана, 2014 ж.

11 Тюнен И. Изолированное государство, – Пер. с англ.: – М.: Экономическая жизнь, 1926. – 340 с.

12 Marshall A. Principles of Economics [1890], – London: Macmillan and Co. 8th ed., 1920. – P. 627.

13 Портер М. Конкуренция, – Пер. с англ.: – М.: Издательский дом «Вильямс», 2005. – 608 с.

14 Enright M.J. Why Clusters are theWay to Win the Game? // Word Link, 1992. –№5. –P. 24-25

15 Fujita M., Krugman P., Venables A. The spatial economy: Cities, regions and international trade. The MIT press. Cambridge, Massachusetts, London, England. 1999. July.

16 Butorin S.N., Bogoviz A.V. The innovational and production approach to management of economic subjects of the Agrarian sector // Advances in Intelligent Systems and Computing. –2019. –Vol 726. – P.758-773.

17 Сиразетдинов Т.К., Родионов В.В., Сиразетдинов Р.Т. Динамическое моделирование экономики регион. – Казань: «Фән» Академии Науки РТ, 2005. –320 с.

18 Сиразетдинов Р.Т., Бражкина А.А. Универсальная структурная модель типового экономического кластера// Управление большими системами сборник трудов. –2010. –С. 152-166.

19 John M.M, Harlan P.C. Cluster Analysis: An Application of Lagrangian Relaxation. // Management Science. – 1979. –Vol 25, №4. –P. 329-340.

20 Chincarini L., Asherie N. An analytical model for the formation of economic clusters // Regional Science and Urban Economics. – 2008. –Vol. 38, Issue 3, –P. 252-270.

21 Slaper T.F., Harmon K.M, Rubin B.M. Industry Clusters and Regional Economic Performance: A Study Across U.S. Metropolitan Statistical Areas // Economic Development Quarterly. – 2018. –Vol.32, Issue 1. –P. 44-59.

22 Rodionova E.A., Trifonova N.V., Epstein M.Z., Shvetsova O.A. Multicriterial approach to estimation of economic efficiency based on regional innovative cluster // Proceedings of 20th International Conference on Soft Computing and Measurements, SCM 2017. – Russian Federation, –2017. –P. 743-745.

23 Golikova N.V., Bezrukova T.L., Safonova N.A., Titareva V.A., Komov I.V. Formation of Cluster Policy in the IT Sector// Advances in Intelligent Systems and Computing. –2019. –Vol.726. –P. 546-553.

24 Azhimetova G. Current state of the cotton and textile industry in Kazakhstan // Perspectives of Innovations, Economics & Business. – 2010. – Vol.5, No. 2. – P. 37-40.

25 Eitzen H.C. Dilemmas of diversification: regional economic development and business-industrial clusters in China and Kazakhstan // Journal of Emerging Knowledge on Emerging Markets (JEKEM). – 2012. – Vol.4, Art. 2 – P. 1-26.

26 Kireyeva A.A., Mussabalina D.S, Tolysbaev B.S. Assessment and identification of the possibility for creating IT cluster in Kazakhstan regions // Economy of Region. –2018. –Vol.14, Issue 2. –P. 463-473.

27 Niyazbayeva A, Baizakov S, Maydirova A. Competitiveness of the tourism cluster of Kazakhstan: Comparative analysis of key indicators // Journal of Applied Economic Sciences. – 2017. –Vol.12, Issue 5. –P. 1443-1450

28 Тусупова К.Б. Экономикалық кластердегі өндіріс саласын үш секторлы үлгіге сәйкестендіру, ҚазҰТУ хабаршысы. Алматы, 2014. –№5(105). –Б. 435-440.

29 Ashimov A.A., Adilov Zh., Alshanov R., Borovskiy Yu. And Sultanov B. The theory of Parametric control of macroeconomic systems and its applications (II) // Advances in Systems Science and Applications. – 2014. – № 14(2). – P. 101–128.

30 Шараев Ю.В. Теория экономического роста. – М.: Изд. дом ГУ ВШЭ, 2006. – 254 с.

31 Интрилигатор М. Математические методы оптимизации и экономическая теория. – М.: Айрис-прес, 2002. – 576 с.

32 Леонтьев В. Межотраслевая экономика. –М.: Экономика, 1997. –479 с.

33 Федосеев А.В. Оптимальное управление в трехсекторной модели экономики слаборазвитой страны // Журнал вычислительной математики и математической физики, –1972, Том-12, №4. –С. 925-942.

34 Асеев С.М., Бесов К.О., Кряжимский А.В. Задачи оптимального управления на бесконечном интервале времени в экономике // Успехи математических наук. – 2012. – Том 67, вып. 2 (404). – С. 3-64.

35 Волгина О.А., Голодная Н.Ю., Одияко Н.Н., Шуман Г.И. Математическое моделирование экономических процессов и систем. – М.: КноРус, 2013. – 198 с.

36 Мельников Р.М. Эконометрика. – М .: Проспект, 2014. – 282 с.

37 Barro R.J., Sala-i-Martin X. Economic groth. – Cambridge, London: The MIT Press. – 2004. – 654 p.

38 Тусупова К.Б. Решение стационарной задачи трехсекторной модели экономики методом множителей Лагранжа // Материалы Международной научной конференции студентов и молодых ученых «Фараби әлемі»: - Алматы, Казахстан, 13-16 апрель, 2015. –С. 188.

39 Мурзабеков З.Н., Милош М., Тусупова К. Решение задачи поиска стационарного состояния в трехсекторной экономической модели кластера // Actual Problems of Economics. Национальная академия управления Украины. – 2015. – № 3 (165). – С. 443-452.

40 Тусупова К.Б. Оптимальное распределение инвестиций в трехсекторной модели экономики // Вестник КазНТУ. –Алматы, 2014. – №5(105). – С. 431-435.

41 Беллман Р., Калаба Р. Квазилинеаризация и нелинейные краевые задачи. – М.: Мир, 1968. – 186 с.

42 Айсагалиев С.А., Айпанов Ш.А., Злобина Е.Б. Прикладные задачи оптимального управления. – Алматы: Қазақ университеті, 2005. –127 с.

43 Мурзабеков З.Н. Синтез управляемых динамических систем. – Алматы: Қазақ университеті, 2004. – 346 с.

44 Асеев С.М., Кряжимский А.В. Принцип максимума Понтрягина и задачи оптимального экономического роста. – М.: Наука, 2007. – 271 с.

45 Лежнев А.В. Динамическое программирование в экономических задачах. – М.: БИНОМ. Лаборатория знаний, 2010. – 176 с.

46 Окулов С.М., Пестов О.А. Динамическое программирование. – М.: БИНОМ. Лаборатория знаний, 2012. – 296 с.

47 Афанасьев В. Н., Орлов П. В. Субоптимальное управление нелинейным объектом, линеаризуемым обратной связью // Известия РАН. Теория и системы управления. – 2011. – № 3. – С. 13-22.

48 Дмитриев М. Г., Макаров Д. А. Гладкий нелинейный регулятор в слабо нелинейной системе управления с коэффициентами, зависящими от состояния // Труды ИСА РАН. – 2014. – № 64(4). – С. 53-58.

49 Ashimov A.A., Adilov Zh., Alshanov R., Borovskiy Yu. And Sultanov B. The theory of Parametric control of macroeconomic systems and its applications (II) // Advances in Systems Science and Applications. – 2014. – № 14(2). – P. 101–128.

50 Murzabekov Z., Milosz M. and Tussupova K. Modeling and optimization of the production cluster // Proceedings of 36th International Conference on Information Systems and Architecture and Technology – ISAT-2015 / Part II, Advances in Intelligent Systems and Computing. – Karpacz, 2016. – P. 99–108.

51 Murzabekov Z., Milosz M. and Tussupova K. The optimal control problem with fixed-end trajectories for a three-sector economic model of a cluster //10th International scientific conferences on research and applications in the field of intelligent information and database systems, ACIIDS 2018. – Dong Hoi City, – P. 382–391

52 Murzabekov Z., Miłosz M., Tussupova K.B., Usubalieva S. Optimisation of Discrete Processes with Bounded Control // Journal of Informatio Technology and Control. –2018. – №3(47). – P. 684-690.

53 Шараев Ю.В. Теория экономического роста. – М.: Изд. дом ГУ ВШЭ, 2006. – 254 с.

54 Мурзабеков З. Н., Тусупова К.Б. Решение задачи оптимальной стабилизации одной нелинейной системы экономики с ограниченным управлением // III Международная научная конференция «Информатика и прикладная математика», Қазақстан, Алматы, 2018. – 332-341 с.

55 Понтрягин Л.С., Болтянский В.Г., Гамкрелидзе Р.В.. Теория оптимальных процессов. I. Принцип максимума // Изв. АН СССР. Серия математика, – 1960, – № 24(1)1, С. 3–42.

56 Понтрягин Л.С. Принцип максимума в оптимальном управлении. – М.: Едиториал УРСС, 2004. – 64 с.

57 Беллман Р.Э. Динамическое программирование (Dynamic programming, 1957), – Пер. с англ.: – М.: Иностранная литература, 1960. – 400 с.

58 Кротов В.Ф., Гурман В.И. Методы и задачи оптимального управления. – М.: Наука, 1973. – 389 с.

59 Красовский Н.Н. Управление динамической системой. –М.:Наука, 1985. –516 с.

60 Лагоша Б.А., Апалькова Т.Г. Оптимальное управление в экономике: теория и применение. – М.: Финансы и статистика, 2008. – 224 с.

61 Пантелеев А.В., Бортаковский А.С. Теория управления в примерах и задачах. – М.: Высшая школа, 2003. – 583 с.

62 Weber T.A. Optimal control theory with applications in economics. – Cambridge, London: The MIT Press. – 2011. – P. 376.

63 Athans M., Falb P.L. Optimal control: an introduction to the theory and its applications, – New York: Dover Publications, Inc., – 2006. – P. 894.

64 Куржанский А.Б. Дифференциальные уравнения в задачах синтеза управлений. 1. Обыкновенные системы // Дифференциальные уравнения. – 2005. –Т. 41, № 1. – С. 12-22.

65 Todorov E. Optimal control theory / In: K.Doya, et al. (eds), Bayesian brain: probabilistic approaches to neural coding. – Chap.12. – MIT Press, 2006, – P. 269-298.

66 Алексеев В.М., Тихомиров В.М., Фомин С.В. Оптимальное управление.

– М.: Физматлит, 2007. – 407 с.

67 Айсагалиев С.А. Оптимальное управление линейными системами с закрепленными концами траекторий и ограниченным управлением// Дифференц. уравнения, – 1996. – № 32(8). – С. 1011–1017

68 Aisagaliev S.A., Belogurov A.P. Controllability and speed of the process described by a parabolic equation with bounded control. // Siberian Mathematical Journal. –2012. –Vol.53, Issue 1. –P. 13–28.

69 Kalimoldayev M.N., Jenaliyev M.T., Abdildayeva A.A., Kopbosyn L.S. The optimal control problems of nonlinear systems // Informatics in Control, Automation and Robotics (ICINCO). –2015, 12th International Conference. Part II. –P.84-91

70 Aipanov Sh. A., Murzabekov Z. N. Analytical solution of a linear quadratic optimal control problem with control value constraints // Journal of Computer and Systems Sciences International. – 2014. – № 53(1). – P. 84–91.

71 Murzabekov Z.N. The synthesis of the proportional-differential regulators for the systems with fixed ends of trajectories under two-sided constraints on control values // Asian Journal of Control. – 2016. – № 18(2). – P. 494–501.

72 Чистов Д.Б. Информационные системы в экономик. –Москва: Инфра-М, 2018. – 234 с.

73 Vishal S. Lawpoint's Information Systems Control and Audit Simplified. Pablisher: Lawpoint Publication, 2017. – P. 350.

74 Кирсанов М. Н. Maple и Maplet. Решения задач механики. — СПб.: Издательство "Лань", –2012. – С. 512.

75 Paul E. Fishback Linear and Nonlinear Programming with Maple: An Interactive, Applications-Based Approach. Press: Chapman and Hall/CRC, 2009. –P. 413.

76 Kevin R.C., Brian R.H, Ronald L.L, John E.O, Garrett J.S. Differential Equations with Maple / Edition 2. Pablisher: Wiley, 1997. – P. 248.

77 Афанасьев А.П., Дзюба С.М., Емельянова И.И. Оптимальное управление с обратной связью одним классом нелинейных систем по квадратичному критерию // Вестник ТГУ. – 2015. – № 20(5). – С. 1024-1033.

78 Лобанов С.М., Затылкин В. В., Малонга О. Ш. Построение оптимального управления одним классом нелинейных систем по квадратичному критерию // Вестник ВГУИТ. – 2012. – № 3. – С. 54-58.

79 Мурзабеков З. Н., Тусупова К.Б. Решение задачи оптимального управления для нелинейной модели трехсекторного экономического кластера на конечном интервале времени // Вестник КазНИТУ. – Алматы, 2018. – №4(128). – С. 152-159.

ҚОСЫМШАЛАР

Ақырлы уақыт интервалында, **сызықты теңдеулер** жүйесімен және басқару параметрлері **шектеулерсіз** берілген КҮСЭМ үшін синтездеуші басқаруды іздеу алгоритмінің программалық коды:

```
restart; with(linalg); with(plots);
T := 20;
alpha0 := .46; alpha1 := .68; alpha2 := .49;
b0 := .39; b1 := .29; b2 := .52;
l0 := 0.5e-1; l1 := 0.5e-1; l2 := 0.5e-1;
A0 := 6.19; A1 := 1.35; A2 := 2.71;
k0 := 1166.5652760; k1 := 1911.160117; k2 := 890.166973;
kc0 := 966.5652760; kc1 := 2411.160117; kc2 := 1090.166973;
theta0 := .3943845169; theta1 := .2561828439; theta2 :=
.3494326394;
s0 := .2762635093; s1 := .4476602906; s2 := .2760761999;
l := .1-s0*theta1/theta0; m := .9-s0*theta1/theta0;
a := .1-s1; b := .9-s1;
c := .1-s2*theta1/theta2; d := .9-s2*theta1/theta2;
a33 := -l0; a31 := s0*theta1*A1*kc1^(alpha1-1)*alpha1/theta0; a32
:= 0;
a12 := 0; a11 := -l1+A1*s1*alpha1*kc1^(alpha1-1);
a13 := 0; a23 := 0; a21 := s2*theta1*A1*kc1^(alpha1-
1)*alpha1/theta2; a22 := -l2; b12 := 0; b11 := A1*kc1^alpha1; b13
:= 0;
b22 := A1*kc1^alpha1; b21 := 0; b23 := 0;
b31 := 0; b32 := 0; b33 := A1*kc1^alpha1;
Y0 := Vector([k1-kc1, k2-kc2, k0-kc0]);
R := Matrix([[1/.4^2, 0, 0], [0, 1/.1^2, 0], [0, 0, 1/.2^2]]);
Q := Matrix([[1/Y0[1]^2, 0, 0], [0, 1/Y0[2]^2, 0], [0, 0,
1/Y0[3]^2]]);
A := Matrix([[a11, a12, a13], [a21, a22, a23], [a31, a32, a33]]);
B := Matrix([[b11, b12, b13], [b21, b22, b23], [b31, b32, b33]]);
B1 := evalm(`&*`(`&*`(B, 1/R), transpose(B))):
KT := matrix([[kk1, 0, 0], [0, kk4, 0], [0, 0, kk6]])
`1` := matrix([[k11(t), k12(t), k13(t)], [k12(t), k22(t), k23(t)],
[k13(t), k23(t), k33(t)]]);
K2 := evalm(-`&*`(transpose(A), K1)-`&*`(transpose(K1),
A)+`&*`(`&*`(K1, B1), K1)-Q);
init0 := k11(T) = kk1, k12(T) = kk2, k13(T) = kk3, k22(T) = kk4,
k23(T) = kk5, k33(T) = kk6;
dsolk := dsolve({init0, diff(k11(t), t) = K2[1, 1], diff(k12(t),
t) = K2[1, 2], diff(k13(t), t) = K2[1, 3], diff(k22(t), t) = K2[2,
2], diff(k23(t), t) = K2[2, 3], diff(k33(t), t) = K2[3, 3]},
[k11(t), k12(t), k13(t), k22(t), k23(t), k33(t)], numeric, method
= dverk78, output = listprocedure);
k3 := subs(dsolk, k11(t)); k4 := subs(dsolk, k12(t)); k5 :=
subs(dsolk, k13(t)); k6 := subs(dsolk, k22(t)); k7 := subs(dsolk,
k23(t)); k8 := subs(dsolk, k33(t));
K := matrix([[k3(t), k4(t), k5(t)], [k4(t), k6(t), k7(t)], [k5(t),
k7(t), k8(t)]])
```

```
AA := evalm(A-`&*`(B1, KT));
W2 := evalm(`&*`(AA, W1)+`&*`(W1, transpose(AA))-B1); dsolw :=
dsolve({w11(T) = 0, w12(T) = 0, w13(T) = 0, w22(T) = 0, w23(T) =
0, w33(T) = 0, diff(w11(t), t) = W2[1, 1], diff(w12(t), t) = W2[1,
2], diff(w13(t), t) = W2[1, 3], diff(w22(t), t) = W2[2, 2],
diff(w23(t), t) = W2[2, 3], diff(w33(t), t) = W2[3, 3]}, [w11(t),
w12(t), w13(t), w22(t), w23(t), w33(t)], numeric, method = rkf45,
output = listprocedure);
w7 := subs(dsolw, w11(t)); w8 := subs(dsolw, w12(t)); w9 :=
subs(dsolw, w13(t)); w10 := subs(dsolw, w22(t)); w14 :=
subs(dsolw, w23(t)); w15 := subs(dsolw, w33(t));
W := matrix([[w7(t), w8(t), w9(t)], [w8(t), w10(t), w14(t)],
[w9(t), w14(t), w15(t)]]);

omega1 := evalm(-`&*`(`&*`(1/R, transpose(B)), `&*`(KT, Y1)+Q1));
l11 := max(0, a-omega1[1]); l21 := max(0, c-omega1[2]);
l31 := max(0, l-omega1[3]); l12 := max(0, omega1[1]-b);
l22 := max(0, omega1[2]-d); l32 := max(0, omega1[3]-m);
p1 := l11-l12; p2 := l21-l22; p3 := l31-l32;
`&varphi;1` := Vector([p1, p2, p3]);
U1 := evalm(omega1+`&varphi;1`);
Y2 := evalm(`&*`(AA, Y1)-`&*`(B1, Q1));
Q2 := evalm(-`&*`(transpose(AA), Q1));
eq0[0] := diff(y1(t), t) = Y2[1]; eq1[0] := diff(y2(t), t) =
Y2[2]; eq2[0] := diff(y0(t), t) = Y2[3];
eq3[0] := diff(q1(t), t) = Q2[1]; eq4[0] := diff(q2(t), t) =
Q2[2]; eq5[0] := diff(q0(t), t) = Q2[3];
dsoly0 := dsolve({eq0[0], eq1[0], eq2[0], eq3[0], eq4[0], eq5[0],
q0(0) = Q0[3], q1(0) = Q0[1], q2(0) = Q0[2], y0(0) = Y0[3], y1(0)
= Y0[1], y2(0) = Y0[2]}, [y1(t), y2(t), y0(t), q1(t), q2(t),
q0(t)], numeric, method = rkf45, output = listprocedure);
y3 := subs(dsoly0, y1(t)); y4 := subs(dsoly0, y2(t)); y5 :=
subs(dsoly0, y0(t)); q3 := subs(dsoly0, q1(t)); q4 := subs(dsoly0,
q2(t)); q5 := subs(dsoly0, q0(t));
Y3 := Vector([y3(t), y4(t), y5(t)]); Q3 := Vector([q3(t), q4(t),
q5(t)])
h1 := evalm(-`&*`(`&*`(1/R, transpose(B)), `&*`(KT, Y3)+Q3));
kt1 := y3(t)+kc1; kt2 := y4(t)+kc2; kt0 := y5(t)+kc0;
v := (b1*A1*kt1^alpha1+b2*A2*kt2^alpha2*(1-h1[1]-
s1)/(h1[2]+s2*theta1/theta2))/((1-b0)*A0*kt0^alpha0*(1-h1[1]-
s1)/(h1[3]+s0*theta1/theta0)+b2*A2*kt2^alpha2*(1-h1[1]-
s1)/(h1[2]+s2*theta1/theta2));
st1 := h1[1]+s1; st0 := v*(1-st1); st2 := (1-v)*(1-st1);
`&theta;t1` :=
1/(1+st0/(h1[3]+s0*theta1/theta0)+st2/(h1[2]+s2*theta1/theta2));
`&theta;t0` := st0*`&theta;t1`/(h1[3]+s0*theta1/theta0);
`&theta;t2` := st2*`&theta;t1`/(h1[2]+s2*theta1/theta2);
```

Ақырлы уақыт интервалында, **сызықты теңдеулер** жүйесімен және басқару параметрлері **шектеулермен** берілген КҮСЭМ үшін синтездеуші басқаруды іздеу алгоритмінің программалық коды:

```
restart; with(linalg); with(plots);
T := 20;
alpha0 := .46; alpha1 := .68; alpha2 := .49;
b0 := .39; b1 := .29; b2 := .52;
l0 := 0.5e-1; l1 := 0.5e-1; l2 := 0.5e-1;
A0 := 6.19; A1 := 1.35; A2 := 2.71;
k0 := 1166.5652760; k1 := 2000.160117; k2 := 990.166973
kc0 := 966.5652760; kc1 := 2411.160117; kc2 := 1090.166973;
theta0 := .3943845169; theta1 := .2561828439; theta2 :=
.3494326394;
s0 := .2762635093; s1 := .4476602906; s2 := .2760761999;
l := .1-s0*theta1/theta0; m := .9-s0*theta1/theta0;
a := .1-s1; b := .9-s1;
c := .1-s2*theta1/theta2; d := .9-s2*theta1/theta2;
a33 := -l0; a31 := s0*theta1*A1*kc1^(alpha1-1)*alpha1/theta0; a32
:= 0;
a12 := 0; a11 := -l1+A1*s1*alpha1*kc1^(alpha1-1);
a13 := 0; a23 := 0; a21 := s2*theta1*A1*kc1^(alpha1-
1)*alpha1/theta2; a22 := -l2; b12 := 0; b11 := A1*kc1^alpha1; b13
:= 0;
b22 := A1*kc1^alpha1; b21 := 0; b23 := 0;
b31 := 0; b32 := 0; b33 := A1*kc1^alpha1;
Y0 := Vector([k1-kc1, k2-kc2, k0-kc0]);
R := Matrix([[1/.4^2, 0, 0], [0, 1/.1^2, 0], [0, 0, 1/.2^2]]);
Q := Matrix([[1/Y0[1]^2, 0, 0], [0, 1/Y0[2]^2, 0], [0, 0,
1/Y0[3]^2]]);
A := Matrix([[a11, a12, a13], [a21, a22, a23], [a31, a32, a33]]);
B := Matrix([[b11, b12, b13], [b21, b22, b23], [b31, b32, b33]]);
B1 := evalm(`&*`(`&*`(B, 1/R), transpose(B))):
KT := matrix([[kk1, 0, 0], [0, kk4, 0], [0, 0, kk6]])
`1` := matrix([[k11(t), k12(t), k13(t)], [k12(t), k22(t), k23(t)],
[k13(t), k23(t), k33(t)]]);
K2 := evalm(-`&*`(transpose(A), K1)-`&*`(transpose(K1),
A)+`&*`(`&*`(K1, B1), K1)-Q);
init0 := k11(T) = kk1, k12(T) = kk2, k13(T) = kk3, k22(T) = kk4,
k23(T) = kk5, k33(T) = kk6;
dsolk := dsolve({init0, diff(k11(t), t) = K2[1, 1], diff(k12(t),
t) = K2[1, 2], diff(k13(t), t) = K2[1, 3], diff(k22(t), t) = K2[2,
2], diff(k23(t), t) = K2[2, 3], diff(k33(t), t) = K2[3, 3]},
[k11(t), k12(t), k13(t), k22(t), k23(t), k33(t)], numeric, method
= dverk78, output = listprocedure);
k3 := subs(dsolk, k11(t)); k4 := subs(dsolk, k12(t)); k5 :=
subs(dsolk, k13(t)); k6 := subs(dsolk, k22(t)); k7 := subs(dsolk,
k23(t)); k8 := subs(dsolk, k33(t));
K := matrix([[k3(t), k4(t), k5(t)], [k4(t), k6(t), k7(t)], [k5(t),
k7(t), k8(t)]])
AA := evalm(A-`&*`(B1, KT));
```

```
W2 := evalm(`&*`(AA, W1)+`&*`(W1, transpose(AA))-B1); dsolw :=
dsolve({w11(T) = 0, w12(T) = 0, w13(T) = 0, w22(T) = 0, w23(T) =
0, w33(T) = 0, diff(w11(t), t) = W2[1, 1], diff(w12(t), t) = W2[1,
2], diff(w13(t), t) = W2[1, 3], diff(w22(t), t) = W2[2, 2],
diff(w23(t), t) = W2[2, 3], diff(w33(t), t) = W2[3, 3]}, [w11(t),
w12(t), w13(t), w22(t), w23(t), w33(t)], numeric, method = rkf45,
output = listprocedure);

W := matrix([[w7(t), w8(t), w9(t)], [w8(t), w10(t), w14(t)],
[w9(t), w14(t), w15(t)]]);
Q0 := evalm(`&*`(inverse(W0), Y0));
Y1 := Vector([y1(t), y2(t), y0(t)]);
Q1 := Vector([q1(t), q2(t), q0(t)]);
omega1 := evalm(-`&*`(`&*`(1/R, transpose(B)), `&*`(KT, Y1)+Q1));
l11 := max(0, a-omega1[1]); l21 := max(0, c-omega1[2]);
l31 := max(0, l-omega1[3]); l12 := max(0, omega1[1]-b);
l22 := max(0, omega1[2]-d); l32 := max(0, omega1[3]-m);
p1 := l11-l12; p2 := l21-l22; p3 := l31-l32;
`&varphi;1` := Vector([p1, p2, p3]);
U1 := evalm(omega1+`&varphi;1`);
Y2 := evalm(`&*`(AA, Y1)-`&*`(B1, Q1)+`&*`(B, `&varphi;1`));
Q2 := evalm(-`&*`(transpose(AA), Q1)+`&*`(`&*`(inverse(W), B),
`&varphi;1`));

eq0[0] := diff(y1(t), t) = Y2[1];
eq1[0] := diff(y2(t), t) = Y2[2];
eq2[0] := diff(y0(t), t) = Y2[3];
eq3[0] := diff(q1(t), t) = Q2[1];
eq4[0] := diff(q2(t), t) = Q2[2];
eq5[0] := diff(q0(t), t) = Q2[3];
dsoly0 := dsolve({eq0[0], eq1[0], eq2[0], eq3[0], eq4[0], eq5[0],
q0(0) = Q0[3], q1(0) = Q0[1], q2(0) = Q0[2], y0(0) = Y0[3], y1(0)
= Y0[1], y2(0) = Y0[2]}, [y1(t), y2(t), y0(t), q1(t), q2(t),
q0(t)], numeric, method = rkf45, output = listprocedure);
y3 := subs(dsoly0, y1(t)); y4 := subs(dsoly0, y2(t)); y5 :=
subs(dsoly0, y0(t));
q3 := subs(dsoly0, q1(t)); q4 := subs(dsoly0, q2(t)); q5 :=
subs(dsoly0, q0(t));
Y3 := Vector([y3(t), y4(t), y5(t)]); Q3 := Vector([q3(t), q4(t),
q5(t)])
h1 := evalm(-`&*`(`&*`(1/R, transpose(B)), `&*`(KT, Y3)+Q3));
u1 := piecewise(h1[1] > b, b, h1[1] < a, a, a <= h1[1] and h1[1]
<= b, h1[1]);
u2 := piecewise(h1[2] > d, d, h1[2] < c, c, c <= h1[2] and h1[2]
<= d, h1[2]);
u3 := piecewise(h1[3] > m, m, h1[3] < l, l, l <= h1[3] and h1[3]
<= m, h1[3]);

kt1 := y3(t)+kc1; kt2 := y4(t)+kc2; kt0 := y5(t)+kc0;
v := (b1*A1*kt1^alpha1+b2*A2*kt2^alpha2*(1-u1-
s1)/(u2+s2*theta1/theta2))/((1-b0)*A0*kt0^alpha0*(1-u1-
s1)/(u3+s0*theta1/theta0)+b2*A2*kt2^alpha2*(1-u1-
s1)/(u2+s2*theta1/theta2));
```

```
st1 := u1+s1;
st0 := v*(1-st1);
st2 := (1-v)*(1-st1);
`&theta;t1` :=
1/(1+st0/(u3+s0*theta1/theta0)+st2/(u2+s2*theta1/theta2));
`&theta;t0` := v*(1-st1)*`&theta;t1`/(u3+s0*theta1/theta0);
`&theta;t2` := (1-v)*(1-st1)*`&theta;t1`/(u2+s2*theta1/theta2);
```

Ақырлы уақыт интервалында, **сызықты емес теңдеулер** жүйесімен және басқару параметрлері **шектеулермен** берілген КҮСЭМ үшін синтездеуші басқаруды іздеу алгоритмінің программалық коды:

```
restart; with(linalg); with(plots);
T := 20;
alpha0 := .46; alpha1 := .68; alpha2 := .49;
b0 := .39; b1 := .29; b2 := .52;
l0 := 0.5e-1; l1 := 0.5e-1; l2 := 0.5e-1;
A0 := 6.19; A1 := 1.35; A2 := 2.71;
k0 := 1266.5652760; k1 := 1711.160117; k2 := 790.166973;
kc0 := 966.5652760; kc1 := 2411.160117; kc2 := 1090.166973;
theta0 := .3943845169; theta1 := .2561828439; theta2 :=
.3494326394;
s0 := .2762635093; s1 := .4476602906; s2 := .2760761999;
l := .1-s0*theta1/theta0; m := .9-s0*theta1/theta0;
a := .1-s1; b := .9-s1;
c := .1-s2*theta1/theta2; d := .9-s2*theta1/theta2;
a33 := -l0; a31 := s0*theta1*A1*kc1^(alpha1-1)*alpha1/theta0; a32
:= 0;
a12 := 0; a11 := -l1+A1*s1*alpha1*kc1^(alpha1-1);
a13 := 0; a23 := 0; a21 := s2*theta1*A1*kc1^(alpha1-
1)*alpha1/theta2; a22 := -l2; b12 := 0; b11 := A1*kc1^alpha1; b13
:= 0;
b22 := A1*kc1^alpha1; b21 := 0; b23 := 0;
b31 := 0; b32 := 0; b33 := A1*kc1^alpha1;
Y0 := Vector([k1-kc1, k2-kc2, k0-kc0]);
R := Matrix([[1/(5*.5^2), 0, 0], [0, 1/(5*.2^2), 0], [0, 0,
1/(5*.2^2)]]);
Q := Matrix([[1/Y0[1]^2, 0, 0], [0, 1/Y0[2]^2, 0], [0, 0,
1/Y0[3]^2]]);
A := Matrix([[a11, a12, a13], [a21, a22, a23], [a31, a32, a33]]);
B := Matrix([[b11, b12, b13], [b21, b22, b23], [b31, b32, b33]]);
B1 := evalm(`&*`(`&*`(B, 1/R), transpose(B))):
KT := matrix([[kk1, 0, 0], [0, kk4, 0], [0, 0, kk6]])
`1` := matrix([[k11(t), k12(t), k13(t)], [k12(t), k22(t), k23(t)],
[k13(t), k23(t), k33(t)]]);
K2 := evalm(-`&*`(transpose(A), K1)-`&*`(transpose(K1),
A)+`&*`(`&*`(K1, B1), K1)-Q);
init0 := k11(T) = kk1, k12(T) = kk2, k13(T) = kk3, k22(T) = kk4,
k23(T) = kk5, k33(T) = kk6;
dsolk := dsolve({init0, diff(k11(t), t) = K2[1, 1], diff(k12(t),
t) = K2[1, 2], diff(k13(t), t) = K2[1, 3], diff(k22(t), t) = K2[2,
2], diff(k23(t), t) = K2[2, 3], diff(k33(t), t) = K2[3, 3]},
[k11(t), k12(t), k13(t), k22(t), k23(t), k33(t)], numeric, method
= dverk78, output = listprocedure);
k3 := subs(dsolk, k11(t)); k4 := subs(dsolk, k12(t)); k5 :=
subs(dsolk, k13(t)); k6 := subs(dsolk, k22(t)); k7 := subs(dsolk,
k23(t)); k8 := subs(dsolk, k33(t));
K := matrix([[k3(t), k4(t), k5(t)], [k4(t), k6(t), k7(t)], [k5(t),
k7(t), k8(t)]])
AA := evalm(A-`&*`(B1, KT));
```

```
W2 := evalm(`&*`(AA, W1)+`&*`(W1, transpose(AA))-B1); dsolw :=
dsolve({w11(T) = 0, w12(T) = 0, w13(T) = 0, w22(T) = 0, w23(T) =
0, w33(T) = 0, diff(w11(t), t) = W2[1, 1], diff(w12(t), t) = W2[1,
2], diff(w13(t), t) = W2[1, 3], diff(w22(t), t) = W2[2, 2],
diff(w23(t), t) = W2[2, 3], diff(w33(t), t) = W2[3, 3]}, [w11(t),
w12(t), w13(t), w22(t), w23(t), w33(t)], numeric, method = rkf45,
output = listprocedure);
w7 := subs(dsolw, w11(t)); w8 := subs(dsolw, w12(t));
w9 := subs(dsolw, w13(t)); w10 := subs(dsolw, w22(t));
w14 := subs(dsolw, w23(t)); w15 := subs(dsolw, w33(t));
W := matrix([[w7(t), w8(t), w9(t)], [w8(t), w10(t), w14(t)],
[w9(t), w14(t), w15(t)]]);
Q0 := evalm(`&*`(inverse(W0), Y0));
Y1 := Vector([y1(t), y2(t), y0(t)]);
Q1 := Vector([q1(t), q2(t), q0(t)]);
omega1 := evalm(-`&*`(`&*`(1/R, transpose(B)), `&*`(KT, Y1)+Q1));
l11 := max(0, a-omega1[1]); l21 := max(0, c-omega1[2]);
l31 := max(0, l-omega1[3]); l12 := max(0, omega1[1]-b);
l22 := max(0, omega1[2]-d); l32 := max(0, omega1[3]-m);
p1 := l11-l12; p2 := l21-l22; p3 := l31-l32;
`&varphi;1` := Vector([p1, p2, p3]);

f1 := A1*U1[1]*((y1(t)+kc1)^alpha1-
kc1^alpha1)+s1*A1*((y1(t)+kc1)^alpha1-kc1^alpha1-kc1^(alpha1-
1)*alpha1*y1(t));
f2 := A1*U1[2]*((y1(t)+kc1)^alpha1-
kc1^alpha1)+s2*theta1*A1*((y1(t)+kc1)^alpha1-kc1^alpha1-
kc1^(alpha1-1)*alpha1*y1(t))/theta2;
f3 := A1*U1[3]*((y1(t)+kc1)^alpha1-
kc1^alpha1)+s0*theta1*A1*((y1(t)+kc1)^alpha1-kc1^alpha1-
kc1^(alpha1-1)*alpha1*y1(t))/theta0;
Y2 := evalm(`&*`(A11, Y1)-`&*`(B1, Q1)+`&*`(B, `&varphi;1`)+F2);
Q2 := evalm(-`&*`(transpose(A11), Q1)+`&*`(`&*`(1/W, B),
`&varphi;1`)+`&*`(1/W, F2))

eq0[0] := diff(y1(t), t) = Y2[1];
eq1[0] := diff(y2(t), t) = Y2[2];
eq2[0] := diff(y0(t), t) = Y2[3];
eq3[0] := diff(q1(t), t) = Q2[1];
eq4[0] := diff(q2(t), t) = Q2[2];
eq5[0] := diff(q0(t), t) = Q2[3];
dsoly0 := dsolve({eq0[0], eq1[0], eq2[0], eq3[0], eq4[0], eq5[0],
q0(0) = Q0[3], q1(0) = Q0[1], q2(0) = Q0[2], y0(0) = Y0[3], y1(0)
= Y0[1], y2(0) = Y0[2]}, [y1(t), y2(t), y0(t), q1(t), q2(t),
q0(t)], numeric, method = rkf45, output = listprocedure);
y3 := subs(dsoly0, y1(t)); y4 := subs(dsoly0, y2(t)); y5 :=
subs(dsoly0, y0(t));
q3 := subs(dsoly0, q1(t)); q4 := subs(dsoly0, q2(t)); q5 :=
subs(dsoly0, q0(t));
Y3 := Vector([y3(t), y4(t), y5(t)]); Q3 := Vector([q3(t), q4(t),
q5(t)])
h1 := evalm(-`&*`(`&*`(1/R, transpose(B)), `&*`(KT, Y3)+Q3));
```

```
u1 := piecewise(h1[1] > b, b, h1[1] < a, a, a <= h1[1] and h1[1]
<= b, h1[1]);
u2 := piecewise(h1[2] > d, d, h1[2] < c, c, c <= h1[2] and h1[2]
<= d, h1[2]);
u3 := piecewise(h1[3] > m, m, h1[3] < l, l, l <= h1[3] and h1[3]
<= m, h1[3]);

kt1 := y3(t)+kc1; kt2 := y4(t)+kc2; kt0 := y5(t)+kc0;
v := (b1*A1*kt1^alpha1+b2*A2*kt2^alpha2*(1-u1-
s1)/(u2+s2*theta1/theta2))/((1-b0)*A0*kt0^alpha0*(1-u1-
s1)/(u3+s0*theta1/theta0)+b2*A2*kt2^alpha2*(1-u1-
s1)/(u2+s2*theta1/theta2));
st1 := u1+s1;
st0 := v*(1-st1);
st2 := (1-v)*(1-st1);
`&theta;t1` :=
1/(1+st0/(u3+s0*theta1/theta0)+st2/(u2+s2*theta1/theta2));
`&theta;t0` := v*(1-st1)*`&theta;t1`/(u3+s0*theta1/theta0);
`&theta;t2` := (1-v)*(1-st1)*`&theta;t1`/(u2+s2*theta1/theta2);
```

Шексіз уақыт интервалында, **сызықты емес теңдеулер** жүйесімен және басқару параметрлері **шектеулермен** берілген КҮСЭМ үшін синтездеуші басқаруды іздеу алгоритмінің программалық коды:

```
restart; with(linalg); with(plots);
T := 50;
alpha0 := .46; alpha1 := .68; alpha2 := .49;
b0 := .39; b1 := .29; b2 := .52;
l0 := 0.5e-1; l1 := 0.5e-1; l2 := 0.5e-1;
A0 := 6.19; A1 := 1.35; A2 := 2.71;
k0 := 1266.5652760; k1 := 1711.160117; k2 := 790.166973;
kc0 := 966.5652760; kc1 := 2411.160117; kc2 := 1090.166973;
theta0 := .3943845169; theta1 := .2561828439; theta2 :=
.3494326394;
s0 := .2762635093; s1 := .4476602906; s2 := .2760761999;
l := .1-s0*theta1/theta0; m := .9-s0*theta1/theta0;
a := .1-s1; b := .9-s1;
c := .1-s2*theta1/theta2; d := .9-s2*theta1/theta2;
a33 := -l0; a31 := s0*theta1*A1*kc1^(alpha1-1)*alpha1/theta0; a32
:= 0;
a12 := 0; a11 := -l1+A1*s1*alpha1*kc1^(alpha1-1);
a13 := 0; a23 := 0; a21 := s2*theta1*A1*kc1^(alpha1-
1)*alpha1/theta2; a22 := -l2; b12 := 0; b11 := A1*kc1^alpha1; b13
:= 0;
b22 := A1*kc1^alpha1; b21 := 0; b23 := 0;
b31 := 0; b32 := 0; b33 := A1*kc1^alpha1;
Y0 := Vector([k1-kc1, k2-kc2, k0-kc0]);
R := Matrix([[1/(5*.5^2), 0, 0], [0, 1/(5*.2^2), 0], [0, 0,
1/(5*.2^2)]]);
Q := Matrix([[1/Y0[1]^2, 0, 0], [0, 1/Y0[2]^2, 0], [0, 0,
1/Y0[3]^2]]);
A := Matrix([[a11, a12, a13], [a21, a22, a23], [a31, a32, a33]]);
B := Matrix([[b11, b12, b13], [b21, b22, b23], [b31, b32, b33]]);
B1 := evalm(`&*`(`&*`(B, 1/R), transpose(B))):
KT := matrix([[kk1, 0, 0], [0, kk4, 0], [0, 0, kk6]])
`1` := matrix([[k11(t), k12(t), k13(t)], [k12(t), k22(t), k23(t)],
[k13(t), k23(t), k33(t)]]);
K2 := evalm(-`&*`(transpose(A), K1)-`&*`(transpose(K1),
A)+`&*`(`&*`(K1, B1), K1)-Q);
init0 := k11(T) = kk1, k12(T) = kk2, k13(T) = kk3, k22(T) = kk4,
k23(T) = kk5, k33(T) = kk6;
dsolk := dsolve({init0, diff(k11(t), t) = K2[1, 1], diff(k12(t),
t) = K2[1, 2], diff(k13(t), t) = K2[1, 3], diff(k22(t), t) = K2[2,
2], diff(k23(t), t) = K2[2, 3], diff(k33(t), t) = K2[3, 3]},
[k11(t), k12(t), k13(t), k22(t), k23(t), k33(t)], numeric, method
= dverk78, output = listprocedure);

K := matrix([[k3(t), k4(t), k5(t)], [k4(t), k6(t), k7(t)], [k5(t),
k7(t), k8(t)]])
AA := evalm(A-`&*`(B1, KT));
W2 := evalm(`&*`(AA, W1)+`&*`(W1, transpose(AA))-B1); dsolw :=
dsolve({w11(T) = 0, w12(T) = 0, w13(T) = 0, w22(T) = 0, w23(T) =
```

```
0, w33(T) = 0, diff(w11(t), t) = W2[1, 1], diff(w12(t), t) = W2[1,
2], diff(w13(t), t) = W2[1, 3], diff(w22(t), t) = W2[2, 2],
diff(w23(t), t) = W2[2, 3], diff(w33(t), t) = W2[3, 3]}, [w11(t),
w12(t), w13(t), w22(t), w23(t), w33(t)], numeric, method = rkf45,
output = listprocedure);
w7 := subs(dsolw, w11(t)); w8 := subs(dsolw, w12(t));
w9 := subs(dsolw, w13(t)); w10 := subs(dsolw, w22(t));
w14 := subs(dsolw, w23(t)); w15 := subs(dsolw, w33(t));
W := matrix([[w7(t), w8(t), w9(t)], [w8(t), w10(t), w14(t)],
[w9(t), w14(t), w15(t)]]);

Q0 := evalm(`&*`(inverse(W0), Y0));

Y1 := Vector([y1(t), y2(t), y0(t)]);
Y2 := evalm(`&*`(A11, Y1)+`&*`(B, `&varphi;1`)+F2);
omega1 := evalm(-`&*`(`&*`(inverse(R), transpose(B)), `&*`(K1T,
Y1)));
l11 := max(0, a-omega1[1]); l21 := max(0, c-omega1[2]);
l31 := max(0, l-omega1[3]); l12 := max(0, omega1[1]-b);
l22 := max(0, omega1[2]-d); l32 := max(0, omega1[3]-m);
p1 := l11-l12; p2 := l21-l22; p3 := l31-l32;
`&varphi;1` := Vector([p1, p2, p3]);
U1 := evalm(omega1+`&varphi;1`);

f1 := A1*U1[1]*((y1(t)+kc1)^alpha1-
kc1^alpha1)+s1*A1*((y1(t)+kc1)^alpha1-kc1^alpha1-kc1^(alpha1-
1)*alpha1*y1(t));
f2 := A1*U1[2]*((y1(t)+kc1)^alpha1-
kc1^alpha1)+s2*theta1*A1*((y1(t)+kc1)^alpha1-kc1^alpha1-
kc1^(alpha1-1)*alpha1*y1(t))/theta2;
f3 := A1*U1[3]*((y1(t)+kc1)^alpha1-
kc1^alpha1)+s0*theta1*A1*((y1(t)+kc1)^alpha1-kc1^alpha1-
kc1^(alpha1-1)*alpha1*y1(t))/theta0;

F2 := Vector([f1, f2, f3]);

eq0[0] := diff(y1(t), t) = Y2[1];
eq1[0] := diff(y2(t), t) = Y2[2];
eq2[0] := diff(y0(t), t) = Y2[3];

dsoly0 := dsolve({eq0[0], eq1[0], eq2[0], y0(0) = Y0[3], y1(0) =
Y0[1], y2(0) = Y0[2]}, [y1(t), y2(t), y0(t)], numeric, output =
listprocedure)

y3 := subs(dsoly0, y1(t)); y4 := subs(dsoly0, y2(t)); y5 :=
subs(dsoly0, y0(t));
q3 := subs(dsoly0, q1(t)); q4 := subs(dsoly0, q2(t)); q5 :=
subs(dsoly0, q0(t));
Y3 := Vector([y3(t), y4(t), y5(t)]); Q3 := Vector([q3(t), q4(t),
q5(t)])
h1 := evalm(-`&*`(`&*`(1/R, transpose(B)), `&*`(KT, Y3)+Q3));
u1 := piecewise(h1[1] > b, b, h1[1] < a, a, a <= h1[1] and h1[1]
<= b, h1[1]);
```

```
u2 := piecewise(h1[2] > d, d, h1[2] < c, c, c <= h1[2] and h1[2]
<= d, h1[2]);
u3 := piecewise(h1[3] > m, m, h1[3] < l, l, l <= h1[3] and h1[3]
<= m, h1[3]);

kt1 := y3(t)+kc1; kt2 := y4(t)+kc2; kt0 := y5(t)+kc0;
v := (b1*A1*kt1^alpha1+b2*A2*kt2^alpha2*(1-u1-
s1)/(u2+s2*theta1/theta2))/((1-b0)*A0*kt0^alpha0*(1-u1-
s1)/(u3+s0*theta1/theta0)+b2*A2*kt2^alpha2*(1-u1-
s1)/(u2+s2*theta1/theta2));
st1 := u1+s1;
st0 := v*(1-st1);
st2 := (1-v)*(1-st1);
`&theta;t1` :=
1/(1+st0/(u3+s0*theta1/theta0)+st2/(u2+s2*theta1/theta2));
`&theta;t0` := v*(1-st1)*`&theta;t1`/(u3+s0*theta1/theta0);
`&theta;t2` := (1-v)*(1-st1)*`&theta;t1`/(u2+s2*theta1/theta2);
```