СӘБИТБЕК БОЛЫС МӘЖИТҰЛЫ

БІРТЕКТІ ТОПТАРДАҒЫ ХАРДИ-СОБОЛЕВ ТИПТЕГІ ТЕҢСІЗДІКТЕР ЖӘНЕ ОЛАРДЫҢ ҚОЛДАНЫСТАРЫ

«6D060100-Математика» мамандығы бойынша философия докторы (PhD) дәрежесін алу үшін дайындалған диссертацияға

АҢДАТПА

Зерттеу тақырыбының өзектігі. Харди теңсіздігі 100 жылдай зерттеліп келеді, 1918 – 2018 жылдары көптеген математиктердің үздіксіз зерттеу тақырыбы болып табылады. Бастапқы теңсіздікті Г.Н. Харди жариялады “Notes on some points in the integral calculus (51)”, Messenger of Mathematics, 48 (1918), 107-112 бет.

Соңғы 100 жылда Харди теңсіздігі мен онымен байланысты талдау қарқынды зерттелетін тақырыпқа айналды: Қазіргі таңда MathSciNet тізімінде «Hardy's Inequality» атауында 800-ден астам мақала және осы сөздерді қамтитын шамамен 3500 мақала бар. Харди теңсіздігі көптеген монографияларда және шолуларда сипатталған солардың ішінде жақсы жазылған монографияларды айта кетсек: Опек және Кюфнер 1990 ж., Дэвис 1999 ж., Эдмундс және Эванс 2004 ж., Мазияның екі кітабі, Гоусуб және Морадифам 2013 ж., Балинский, Эванс және Льюис 2015 ж., сондай-ақ Харди теңсіздігімен байланысты түрлі салалардағы кітаптар бар: уақыт бойынша тұрақты Харди теңсіздігі, ортақ ядролы Харди теңсіздігі, салмақталған Харди теңсіздігі, Харди теңсіздігі және тізбектер кеңістігі.

Дегенмен, барлық осы ұсынулар барлық бай ақпараты бойынша Евклидтік кеңістігімен жеткілікті дәрежеде шектеледі.

Сонымен қатар, субэллиптикалық дифференциалдық теңдеулермен байланысты мәселелерге қолдануға негізделген субэлипптикалық қатынастардағы Харди типіндегі функционалдық теңсіздіктерге қатысты қарқынды зерттеулердің тағы бір деңгейі бар. Бұл теорияның жалпы анизотроптық нұсқалары толықтырылған. Бұл бағытта Гейзенберг тобындағы талдаудың субэллиптикалық идеялары 1974 жылы Фолланд және Штейн арқылы айтарлықтай жақсарды, 1975 жылы Фолландтың дәйекті зерттеуі векторлық қатапрлы топтар бойынша талдаудың іргетасын қалады (немесе біртекті Карнот топтары). Одан бөлек, олардың "Hardy spaces on homogeneous groups" атты негізгі кітабы, Фоллэнд пен Штейн жалпы біртекті топтардағы «анизотропты» талдаудың негізін қалады, яғни, Ли топтарының

кеңейтілген үйлесімді үйірімен толықтырылған. Мұндай топтар міндетті түрде нильпотентті және біртекті топтардың домені барлық нильпотент Ли топтарының барлық классы, соның ішінде векторлық қатпарлар тобы және тұтастай алғанда градуирленген тобы алынып тасталынады. Көптеген топтардың арасында біртекті топтарды талдаудың себептерінің бірі «идеяларды көшіру мен гармоникалық талдаудың нәтижелерін тек топ пен тілдік құрылымдарға байланысты беру» болып табылады. Харди типті теңсіздік және біртекті топтар - математиканың керемет саласы болып табылады, ол PhD диссартация түрінде қарастырылмаған. Докторлық диссертацияның негізгі мақсаты Харди типті теңсіздіктерді және Фолланд және Штейн біртекті топтары бойынша тығыз байланысты тақырыптарды терең түсіну болып табылады. Дегенмен жалпы стратифицирленген топтар жағдайында Харди, Рейлих, Кафарели-Кона-Ниренберг, Харди-Соболев және т.б. теңсіздіктерінің жалпы теориясын жасаймыз.

Бұл тақырыптар осы тақырыптармен тығыз байланысты материалдармен осы PhD диссартацияның негізін қалыптастырады, мысалы, белгісіздік қағидаттары, сызықты және сызықты емес суб-эллиптикалық құрылымды дифференциалдық теңдеулер және (анизотропты) функционалдық кеңістіктер теориясы.

Диссертация жұмысының мақсаты Харди, Харди-Соболев, Каффарелли-Кон-Ниренберг, Релих теңсіздіктері сияқты біртекті топтардағы субеллиптикалық функционалдық теңсіздікті зерттеу болып табылады.

Зерттеу міндеттері:

- Харди және Харди-Соболев геометриялық теңсіздіктерін стратифицирленген топтардың жартылай кеңістігінде орнату;
- Харди, Реллих, Каффарелли-Кона-Ниренберг, Харди-Релих теңсіздіктері сияқты көлденең функционалдық теңсіздіктерді алу;
- Суб-Лапласианның іргелі шешімі үшін шекаралық қалдығы бар салмақты Харди және Реллих теңсіздіктерін алу;
- Жалпыланған векторлық өрістер үшін салмақты Харди және Реллих теңсіздіктерін алу.

Зерттеу объектісі - сублиэлптикалық дифференциалдық теңдеулер үшін негізгі функционалдық теңсіздіктерді дәлелдеу, атап айтқанда Харди, Соболев, Каффарелли-Кон-Ниренберг, Релих, Харди-Соболев, теңсіздіктерінің субелептифтикалық кеңеюі, сондай-ақ сублиэлптикалық функционалдық кеңістіктерді зерттеу және салу теоремасы.

Зерттеу әдістері. Докторлық диссертациясын, классикалық есептеулер әдісін, Ли топтарының теориясын, ДДТ теориясы, сондай-ақ математика ғылымдарының жаңа идеяларын зерттеу үшін қолданылады.

Жұмыстың ғылыми жаңалығы. Диссертациялық жұмыста келесі жаңа нәтижелер алынды:

- *Стратифицирленген топтарда геометриялық Харди және Харди-Соболев теңсіздіктері.* Бұл бағытта біз Харди және Харли-Соболев геометриялық теңсіздіктерді жартылай кеңістікте аламыз. Біз L^2 және L^p нұсқаларын (субэллиптикалық) геометриялық Харди теңсіздіктерін жалпы стратифицирленген топтардағы жартылай кеңістіктер мен дөңес домендерде ұсындық. Соның салдарынан Гейзенберг тобындағы Харди-Соболев теңсіздігінен пайда болды. Сонымен қатар, жұлдызды облыстардағы Харди геометриялық теңсіздігі орнатамыз.

– *Стратифицирленген топтарда көлденең теңсіздіктер.* Екінші бағытта Хардидің теңсіздігінің көлденең нұсқасын қарастырамыз. Осы теңсіздіктің салдарынан стратифицирленген Ли топтарындағы Харди-Реллих түріндегі көлденең салмақталған теңсіздіктің нұсқасы алынды, оның үстіне Соболев типті стратифицирленген Ли топтары бойынша анықталатын және осы функционалдық кеңістіктер үшін теоремалар дәлелденген. Сонымен қатар, біз Пиконе түрді теңдік алдық, соның нәтижесінде біз анизотропты p-суб-Лапласиандар үшін Харди және Реллих типтерінің теңсіздіктерін дәлелдедік. Сонымен қатар, стратифицирленген топтарда Харди түріндегі теңдеулердің көптеген ерекшеліктері бар және көп-бөлшекті Харди типіндегі теңсіздіктері алынды.

- *Харди және Реллих типтегі теңсіздіктер мен суб-Лапластың іргелі шешімдері.* Стратифицирленген топтарда шекаралық қалдықты L^p-Харди, L^p-Реллих және L^p- Каффарелли-Кон-Ниренберг теңсіздіктері алынған. Нәтижесінде, Харди типіндегі және стратифицирленген топтарын Гейзенберг-Паули-Вайл типті анықталмаған принципі келтірілді. Сонымен қатар, шекаралық қалдық түріндегі салмақ теңсіздігі алынды. Біз Гейзенберг кватернион тобында іргелі шешімдер тұрғысынан сублапластар үшін Харди және Реллих теңсіздіктерін ұсынамыз.

- *Жалпыланған векторлық өрістері үшін салмақты Харди және Реллих типтегі теңсіздіктер.* Осы бағытта біз жалпыланған векторлық өрістер үшін Харди және Реллих салмақтық теңсіздіктерін зерттемейміз. Жалпы (нақты) векторлық өрістер үшін шекаралық қалдықты Харди және Реллих типтеріндегі салмақты анизотроптық теңсіздіктер белгіленді. Нәтижесінде, әртүрлі жағдайларда белгілі болып табылатын Харди және Реллих сияқты жаңа және көптеген іргелі теңсіздіктерді аламыз.

Нәтижелердің теориялық және тәжірибелік маңыздылығы. Бұл зерттеу негізінен іргелі болып табылады, нильпотент Ли топтарының функционалдық талдау теориясы мен дифференциалдық теңдеулер теориясы дамуына бағалы үлес қосады және ғылыми әлемдегі Қазақстан Республикасының имиджін көтеруге ықпал етеді. Нәтижелер теориялық физиканың әртүрлі мәселелерін шешу үшін қолданылатын болады.

Жарияланымдар. Диссертация тақырыбы бойынша 15 жұмыс, соның ішінде 3 жарияланым ғылыми қызметтің негізгі ғылыми нәтижелерін жариялау үшін ҚР БҒМ Білім және ғылым саласындағы бақылау комитетімен ұсынылған тізімге кіретін ғылыми басылымдарда, 4 жарияланым Thomson Reuters мәліметтер базасында индекстелетін рейтингтік журналда, 8 жарияланым халықаралық ғылыми конференция материалдарында, соның ішінде 1 жарияланым шетелдік халықаралық конференция материалында жарияланды.

Диссертация тақырыбы бойынша нәтижелер келесі жңымыстарда жарияланды:

Рейтенгі жоғары мақалалар

1 Sabitbek B., Suragan D. Horizontal Weighted Hardy–Rellich Type Inequalities on Stratified Lie Groups // Complex Analysis and Operator Theory. – 2018, - V. 12, - P. 1469-1480. (Scopus, Web of Science, Q2).

2 Sabitbek B., Suragan D. On green functions for Dirichelet sub-Laplacians on a Quaternion Heisenberg group // Mathematical Modelling of Natural Phenomena. – 2018 –V. 13, - No. 4. (Scopus, Web of Science, Q3).

3 Ruzhansky M., Sabitbek B., Suragan D. Weighted Lp-Hardy and Lp-Rellich inequalities with boundary terms on stratified Lie groups // Revista Matematica Complutense. – 2019, – Vol. 32, - Issue 1, - P. 19–35. (Scopus, Web of Science, Q1).

4 Ruzhansky M., Sabitbek B., Suragan D. Weighted anisotropic Hardy and Rellich type inequalities for general vector fields // Nonlinear Differential Equations and Applications (NoDEA). – 2019, - V. 26, - No. 13. (Scopus, Web of Science, Q1).

ҚҚСОН

1 Sabitbek B. Embedding theorem of Sobolev type spaces on stratified Lie groups // Mathematical Journal. – 2016, - V. 16, - No. 3(61), - P. 166-180.

2 Sabitbek B., Suragan D. Hardy and Rellich type inequalities on the complex affine group // Eurasian Mathematical Journal. – 2017. - V. 8, - No. 2. - P. 31-39.

3 Kalmenov T.Sh., Sabitbek B. On Hardy and Rellich type inequalities for the Grushin operator // Mathematical Journal. – 2018, - V. 18, - No. 2(68), - P. 133-142.

Халықаралық конференция материалында

1 Sabitbek B. Hardy and Rellich type inequalities on Complex Affine group // Конференция "Весомая оценка дифференциальных и интегральных операторов и их приложение", Евразиский национальный университет им. Л.Н.Гумилев, – 2017, С. 50-51.

2 Sabitbek B. On Hardy and Rellich type inequalities for Grushin operator // Тезисы докладов: ежегодная научная апрельская конференции института математики и математического моделирования, посвящённая дню науки и научный семинар “Дифференциальные операторы и моделирование сложных систем” посвящённый 70-летнему юбилею профессора Мувашархана Танабаевича Дженалиева. – 2017,- С. 166-167.

3 Sabitbek B. An embedding theorem of Sobolev type spaces on stratified Lie groups // International Conference on Analysis and Applied Mathematics (ICAAM 2016)", Almaty, 2016.

4 Sabitbek B. Horizontal weighted Hardy-Rellich type inequalities // Book of Abstracts, ISAAC Congress 2017, Векше, Швеция.

5 Sabitbek B. On Hardy and Rellich type inequalities for an Engel-type operator // AIP Conference Proceedings, - 2017.

6 Sabitbek B., Suragan D., Yesserkegenov N. Improved critical Hardy inequalities on 2-dimensional quasi-balls // AIP Conference Proceedings, - 2017.

7 Kalmenov T.Sh., Sabitbek B., Suragan D. An inequality for Schatten p-norms of compact operators // AIP Conference Proceedings, - 2016.

8 Kalmenov T.Sh., Sabitbek B. A Boundary Condition of the Volume Potential for Strongly Elliptic Differential Equations // Springer Proceedings in Mathematics and Statistics, - 2017.

Диссертацияның құрылымы мен көлемі. Диссертациялық жұмыста тақырыптық бет, мазмұн, кіріспе, төрт бөлім, қорытынды және 83 атаудан тұратын сілтемелер тізімі бар. Диссертацияның жалпы көлемі 105 бет.

Диссертацияның негізгі мазмұны. Кіріспе диссертация тақырыбының өзектілігін, мақсаты, объектісі, пәні, зерттеу мақсаттары, жұмыстың ғылыми жаңалығын негіздеу, оның теориялық және практикалық маңызы, қорғалатын ғылыми қағидалар, қол жетімді жарияланымдар саны негізделеді.

Тарау 1 де геометриялық Харди және Харди-Соболев теңсіздітері жартылай кеңістікте қарастырылған мына түрдегі формулада берілген

$$\int_{\mathbb{H}^+} |\nabla_H u|^2 d\xi \geq \frac{1}{4} \int_{\mathbb{H}^+} \frac{\mathcal{W}(\xi)^2}{dist(\xi, \partial\mathbb{H}^+)^2} |u|^2 d\xi,$$

және

$$\left(\int_{\mathbb{H}^+} |\nabla_H u|^2 d\xi - \frac{1}{4} \int_{\mathbb{H}^+} \frac{\mathcal{W}(\xi)^2}{dist(\xi, \partial\mathbb{H}^+)^2} |u|^2 d\xi \right)^{1/2} \geq C \left(\int_{\mathbb{H}^+} |u|^2 d\xi \right)^{\frac{Q-2}{2Q}},$$

бұл жердегі $dist(\xi, \partial\mathbb{H}^+)$ шекараға евклидтік қашықтық және бұрыштың функциясы

$$\mathcal{W}(\xi) := (\sum_{i=1}^{n} \langle X_i(\xi), \nu \rangle^2 + \langle Y_i(\xi), \nu \rangle^2)^{\frac{1}{2}}.$$

Тарау 2-де Хардидің теңсіздігінің келесі көлденең нұсқасын қарастырамыз.

$$\int_{\mathbb{G}} |\nabla_H u(x)|^2 dx \geq \left(\frac{N-2}{2} \right)^2 \int_{\mathbb{G}} \frac{|u(x)|^2}{|x'|^2} dx,$$

бұл жердегі $|\cdot|$ бұл евклидтік норма және ∇_H көлденең градиент.

Тарау 3-те Харди теңсіздігінің келесі түрін қарастырамыз.

$$\int_{\mathbb{G}} |\nabla_H u(x)|^2 \geq \left(\frac{Q-2}{2} \right)^2 \int_{\mathbb{G}} \frac{|u(x)|^2}{(d(x))^2} dx,$$

бұл жердегі Q стратифицирленген топтың бірыңғай өлшемі болып табылады $\mathbb{G}$ және $d(x)$ деп аталады $\mathcal{L}$-gauge, бұл суб-Лапласының іргелі шешімінен алынған ерекше біртекті квазинорм болып табылады.

Тарау 4-те топтық құрылымсыз жалпы векторлық өрістер үшін Харди және Реллих салмақтық теңсіздіктерін қарастырамыз келесі түрдегі

$$\int_\Omega W(x) |\nabla_X u|^p dx \geq \int_\Omega H(x) |u|^p dx, \ \forall u \in C_0^1(\Omega),$$

және

$$\int_\Omega W(x) |\mathcal{L}_X u|^p dx \geq \int_\Omega H(x) |u|^p dx, \ \forall u \in C_0^\infty(\Omega).$$