ОЗБЕКБАЙ БАКЫТЖАН ОРЫНГАЛИУЛЫ

Симметриялық кеңістіктерде анықталған кейбір сингулярлы интегралдық операторлардың спектрі

8D05404 – Іргелі және қолданбалы математика білім беру бағдарламасы бойынша философия докторы (PhD) дәрежесін алуға ұсынылған диссертацияның

АҢДАТПАСЫ

Зерттеудің өзектілігі. Қазіргі функционалдық талдау мен операторлар теориясында әртүрлі функциялар кеңістіктерінде анықталған интегралдық және сингулярлы интегралдық операторлардың спектрлік қасиеттерін зерттеу негізгі бағыттардың бірі болып табылады. Оператордың спектрі оның кері операторының бар болуын, резольвентасының аналитикалық құрылымын, операторлық теңдеулердің шешілуін және функционалдық есептеудің қолданылу мүмкіндігін сипаттайды. Сондықтан спектрді анықтау жеке оператор туралы ғана емес, сол оператор әрекет ететін кеңістіктің геометриялық және интерполяциялық қасиеттері туралы да маңызды ақпарат береді.

Сингулярлы интегралдық операторлардың ішінде Гильберт түрлендіруі гармониялық талдаудың, Фурье талдауының, комплекс талдаудың және сингулярлы интегралдық теңдеулер теориясының классикалық объектісі болып табылады. Оның Лебег кеңістіктеріндегі шенелгендігі мен спектрі жақсы зерттелгенімен, Лебег кеңістіктерінен анағұрлым кең функциялық кластарға өткенде оператордың спектрлік табиғаты күрделене түседі. Атап айтқанда, толық, жарты өстегі және ақырлы аралықтағы Гильберт түрлендірулері бірдей типтегі ядро арқылы берілгенімен, олардың спектрлері әртүрлі геометриялық құрылымға ие болады. Бұл айырмашылық анықталу облысының геометриясымен, симметриялық кеңістіктің қасиеттері және оның Бойд индекстерімен байланысты.

Симметриялық кеңістіктер Лебег, Лоренц, Орлич және басқа да көптеген классикалық кеңістіктерді бір ортақ теориялық қасиетке біріктіреді. Мұндай кеңістіктерде операторлардың шенелгендігін ғана емес, олардың спектрін зерттеу белгілі нәтижелерді жеке кеңістіктерден тұтас функциялық кластарға жалпылауға мүмкіндік береді. Сонымен қатар, симметриялық кеңістіктің төменгі және жоғарғы Бойд индекстері созу операторларының асимптотикалық әрекетін сипаттайды және сингулярлы интегралдық операторлардың резольвентасын бағалауда негізгі рөл атқарады. Осы себепті Гильберт түрлендіруінің спектрін симметриялық және Лоренц кеңістіктерінде зерттеу қазіргі операторлар теориясындағы өзекті есептердің бірі болып табылады.

Жұмыста қарастырылатын екінші операторлар класы – классикалық Чезаро операторын жалпылайтын жалпыланған Чезаро операторлары. Бұл операторлар интегралдық операторлар теориясында, Харди типті теңсіздіктерде, орташа мән алу процестерінде және операторлық жартытоптар теориясында кездеседі. Олардың Лебег және кейбір Соболев кеңістіктеріндегі қасиеттері белгілі

болғанымен, Лоренц және жалпы симметриялық кеңістіктердегі спектрлік сипаттамалары толық зерттелмеген. Жалпыланған Чезаро операторларын арнайы күшті үзіліссіз топтар мен жартытоптар арқылы өрнектеу, олардың генераторларын анықтау және функционалдық есептеу көмегімен спектрді сипаттау осы есепке жаңа әрі тиімді тәсіл береді.

Диссертациялық жұмыстың өзектілігі екі маңызды операторлар класын – Гильберт түрлендіруі мен жалпыланған Чезаро операторларын – симметриялық және Лоренц кеңістіктерінде зерттеу. Мұнда спектрдің оператор анықталған облысқа, кеңістіктің құрылымына және Бойд индекстеріне тәуелділігі айқындалып, Банах алгебралары, интерполяция теориясы, күшті үзіліссіз топтар мен жартытоптар және функционалдық есептеу арасындағы байланыс пайдаланылады.

Зерттеудің мақсаты. Симметриялық Банах функциялық кеңістіктерде және Лоренц кеңістіктерінде анықталған Гильберт түрлендіруі мен жалпыланған Чезаро операторларының спектрлік және резольвенталық қасиеттерін зерттеу, олардың спектрін анықталу облысы мен кеңістіктің құрылымдық параметрлері арқылы сипаттау.

Зерттеу міндеттері. Қойылған мақсатқа жету үшін симметриялық кеңістіктер, Лоренц кеңістіктері, Бойд индекстері және оператор спектрі туралы қажетті ұғымдарды жүйелеу; толық және жарты өстегі Гильберт түрлендіруінің Лоренц кеңістіктеріндегі спектрі мен резольвентасын анықтау; жарты өстегі салмақталған Гильберт түрлендіруінің симметриялық кеңістіктердегі шенелгендігін зерттеу; симметриялық кеңістіктегі Гильберт түрлендіруінің резольвенттік формуласын алу; жалпыланған Чезаро операторларын күшті үзіліссіз топтар мен жартытоптар арқылы өрнектеу; сәйкес генераторлардың спектрін анықтау; функционалдық есептеу мен спектрлік бейнелеу теоремалары көмегімен жалпыланған Чезаро операторларының спектрін сипаттау міндеттері қойылды.

Зерттеу нысаны. Толық өсте, жарты өсте және ақырлы аралықта анықталған Гильберт түрлендіруі мен жалпыланған Чезаро операторлары, сондай-ақ олармен байланысты салмақталған сингулярлы интегралдық операторлар, күшті үзіліссіз топтар мен жартытоптар және олардың генераторлары.

Зерттеу пәні. Аталған операторлардың симметриялық кеңістіктердегі және Лоренц кеңістіктеріндегі шенелгендігі, спектрі, нүктелік спектрі, резольвенттік жиыны, резольвентасының айқын формулалары және спектрдің Бойд индекстерімен байланысы.

Зерттеу әдістері. Жұмыста Банах алгебралары мен сызықтық операторлардың спектрлік теориясы, симметриялық кеңістіктер теориясы, субмажорлану әдістері, интерполяция теориясы, созу операторлары мен Бойд индекстерінің бағалаулары, күшті үзіліссіз топтар мен жартытоптар теориясы,

генераторлардың спектрін зерттеу әдістері, Хилл–Филлипс және секторлық операторларға арналған функционалдық есептеу, спектрлік бейнелеу теоремалары, Бета және Гамма-функциялармен байланысты интегралдық түрлендірулер, сондай-ақ аналитикалық жалғастыру және резольвентаның шекаралық мәндерін салыстыру әдістері қолданылды.

Теориялық және практикалық маңыздылығы. Диссертация теориялық сипатқа ие. Алынған нәтижелер симметриялық кеңістіктеріндегі интегралдық және сингулярлы интегралдық операторлардың спектрлік теориясын дамытуға үлес қосады. Лоренц кеңістіктерінде алынған спектрлік формулалар классикалық Лебег кеңістіктеріндегі нәтижелерді кеңейтеді, ал Бойд индекстері арқылы берілген сипаттамалар бір мезгілде көптеген симметриялық кеңістіктерді қамтиды. Жұмыста пайдаланылған тәсілдер басқа сингулярлы интегралдық операторларды, Харди типті операторларды зерттеуге қолданылады. Нәтижелерді функционалдық таладау, гармониялық талдау, операторлар теориясы және спектрлік теория бойынша арнайы курстарда пайдалануға болады.

Ғылыми жаңалығы және қорғауға ұсынылатын негізгі нәтижелер. Диссертациялық жұмыста Гильберт түрлендіруі мен жалпыланған Чезаро операторларының спектрлік қасиеттері Лоренц және симметриялық кеңістіктерде біртұтас әдістемелік негізде зерттеліп, келесі нәтижелер алынды:

- толық өстегі Гильберт түрлендіруінің Лоренц кеңістіктеріндегі алгебралық қасиеті анықталып, оның спектрі мен нүктелік спектрінің {-1, 1} жиынына тең екені және резольвентасының айқын формуласы алынды;
- жарты өстегі Гильберт түрлендіруінің жарты өстегі Лоренц кеңістіктеріндегі спектрі шеңбер доғасы түрінде сипатталып, резольвента логарифмдік параметр мен салмақталған Гильберт түрлендіруі арқылы өрнектелді;
- жарты өстегі Гильберт түрлендіруі үшін резольвенттік формула және спектрдің Бойд индекстері арқылы анықталатын облыспен байланысы көрсетілді;
- жалпыланған Чезаро операторларының күшті үзіліссіз топтар мен жартытоптар арқылы интегралдық көріністері алынып, олардың Лоренц кеңістіктеріндегі шенелгендігі және спектрі Гамма-функциялар қатынасы арқылы сипатталды;
- тривиалды емес Бойд индекстері бар симметриялық кеңістіктерде жалпыланған Чезаро операторлары функционалдық есептеу көмегімен зерттеліп, (0,1) және (0,∞) облыстарындағы спектрлерінің кеңістіктің төменгі және жоғарғы Бойд индекстеріне тәуелді формулалары алынды.

Ғылыми тұжырымдардың, қорытындылар мен нәтижелердің сенімділігі мен негізділігі. Нәтижелердің сенімділігі функционалдық талдау мен операторлар теориясының қалыптасқан әдістерін қолданумен, барлық негізгі тұжырымдардың қатаң дәлелденуімен, алынған формулалардың белгілі дербес

жағдайлармен сәйкестігімен және нәтижелердің рецензияланатын ғылыми басылымдарда жариялануымен қамтамасыз етіледі. Лоренц кеңістіктері үшін алынған нәтижелер q=p болғанда классикалық Лебег кеңістіктеріндегі белгілі спектрлік сипаттамалармен үйлеседі, ал симметриялық кеңістіктерге қатысты формулалар Бойд индекстерінің классикалық мәндерінде бұрын алынған нәтижелермен беттеседі.

Апробация. Диссертациялық жұмыстың жекелеген нәтижелері Ғалымдар күніне арналған дәстүрлі халықаралық математикалық сәуір конференцияларында (Алматы, 2023–2025), EMJ-2025 халықаралық конференциясында (Астана, 2025), 15th ISAAC Congress халықаралық конгресінде (Астана, 21–25 шілде 2025), Centre de Recerca Matemàtica орталығында өткен «Modern Trends in Fourier Analysis» халықаралық конференциясында (Барселона, 2–6 маусым 2025), сондай-ақ Математика және математикалық модельдеу институты мен әл-Фараби атындағы Қазақ ұлттық университетінің ғылыми семинарларында баяндалып, талқыланды.

Жарияланымдар. Диссертация тақырыбы бойынша негізгі нәтижелер үш ғылыми мақалада жарияланған:

1. M. E. Akhymbek, R. A. Tastankul, B. O. Ozbekbay. Spectrum of the Hilbert Transform on Orlicz Spaces over R. Journal of Mathematics, Mechanics and Computer Science, 121 (2024), no. 1, 3–11. DOI: 10.26577/JMMCS202412111. Квартиль:Q2, Процентиль: 37, Индекс цит.: 1.0, SJR: 0.275.

2. M. Akhymbek, K. Tulenov, B. Ozbekbay. Spectrum of the Hilbert Transform on Lorentz Spaces Lp,q. Complex Variables and Elliptic Equations, 70 (2025), no. 9, 1555–1566. DOI: 10.1080/17476933.2024.2413126. Квартиль: Q3, Процентиль: 56, Индекс цит.: 1.9, SJR: 0.493.

3. K. Tulenov, B. Ozbekbay. Spectrum of the Generalized Cesàro Operator on the Lorentz Spaces. Journal of Mathematics, Mechanics and Computer Science, 125 (2025), no. 1, 66–80. DOI: 10.26577/JMMCS2025125106. Квартиль: Q2, Процентиль: 37, Индекс цит.: 1.0, SJR: 0.275.

Диссертацияның құрылымы. Диссертациялық жұмыс кіріспеден, үш тараудан, қорытындыдан және қолданылған әдебиеттер тізімінен тұрады.

Диссертацияның мазмұны. Кіріспеде зерттеу тақырыбының өзектілігі негізделіп, жұмыстың мақсаты мен міндеттері, зерттеу нысаны мен пәні, қолданылған әдістер, ғылыми жаңалығы және теориялық маңызы тұжырымдалады.

Бірінші тарауда диссертацияның негізгі нәтижелерін дәлелдеуге қажетті теориялық ұғымдар жүйеленеді. Симметриялық Банах функциялық кеңістіктер, үлестірім функциясы, өспейтін алмастыру функциясы, Харди–Литтлвуд–Поля субмажорлануы, фундаментал функция, созу операторлары және Бойд индекстері енгізіледі. Лебег, Лоренц және Орлич кеңістіктері симметриялық кеңістіктердің негізгі мысалдары ретінде қарастырылады. Сонымен бірге Банах алгебралары,

алгебралық операторлар, минимал көпмүше, оператор спектрі мен резольвентасы, нүктелік, үзіліссіз және қалдық спектр ұғымдары беріледі. Тараудың соңғы бөлімдерінде күшті үзіліссіз топтар мен жартытоптар, олардың генераторлары, өсу шегі және секторлық операторларға арналған функционалдық есептеу туралы қажетті нәтижелер баяндалады.

Екінші тарау Гильберт түрлендіруінің спектрлік қасиеттеріне арналған. Алдымен толық және жарты өсте анықталған Гильберт түрлендіруі қарастырылып, олардың функциялық кеңістікке және анықталу облысына тәуелді ерекшеліктері сипатталады. Лоренц кеңістіктерінде толық өстегі Гильберт түрлендіруінің квадратын бірлік операторымен байланыстыратын алгебралық теңдік пайдаланылады. Жарты өстегі жағдайда резольвента логарифмнің таңдалған тармағымен анықталатын $w(\lambda)$ параметрі және салмақталған Гильберт түрлендіруі арқылы беріледі. Лоренц кеңістіктеріндегі интерполяциялық қасиеттер көмегімен резольвенттік формула кеңейтіліп, спектрдің геометриялық орны -1 және 1 нүктелерін қосатын шеңбер доғасы ретінде сипатталады.

Үшінші тарауда жалпыланған Чезаро операторларының спектрі зерттеледі. Алдымен Лоренц кеңістіктерінде дәрежелік функциялардың тиесілілік шарттары анықталып, арнайы созу операторлардың күшті үзіліссіз топ және жартытоп құрайтыны дәлелденеді. Олардың генераторлары дифференциалдық өрнектер арқылы жазылып, нүктелік және толық спектрлері сипатталады. Жалпыланған Чезаро операторы сәйкес топ немесе жартытоп бойынша алынған операторлық интеграл түрінде өрнектеледі. Бұл әдіс оператордың шенелгендігін дәлелдеуге және спектрін генератор спектрінің Гамма-функциялар қатынасы арқылы алынған бейнесі ретінде сипаттауға мүмкіндік береді.

Тараудың келесі бөлімінде осы тәсіл тривиалды емес Бойд индекстері бар симметриялық кеңістіктерге жалпыланады. Созу операторларының нормалары арқылы күшті үзіліссіз топтар мен жартытоптардың өсу қасиеттері зерттеліп, генераторлардың спектрлері анықталады. Жалпыланған Чезаро операторлары Хилл–Филлипс типті функционалдық есептеу арқылы генераторлардың функциялары ретінде қарастырылады.

Қорытындыда диссертацияда алынған негізгі нәтижелер жинақталып, Гильберт түрлендіруі мен жалпыланған Чезаро операторларының Лоренц және симметриялық кеңістіктердегі спектрлік табиғаты салыстырылады.