Әл Фараби атындағы Қазақ ұлттық университеті

ӘОЖ 517.91 (043) Қолжазба құқығында

Қуаныш Сәуле Қалдарбекқызы

Параболалық тектес интегралдық-дифференциалдық теңдеулер үшін бейлокал есептерді шешудің сандық-аналитикалық әдістері

8D05401-Математика
білім беру бағдарламасы

Философия докторы PhD
ғылыми дәрежесін алу үшін дайындалған диссертация

Отандық ғылыми кеңесшілер:
Асанова Анар Тұрмағанбетқызы,
ф-м.ғ.д., профессор

Кадирбаева Жазира Муратбековна,
ф-м.ғ.к., профессор

Шетелдік ғылыми кеңесші:
Liu Zhenhai, профессор,
Guangxi Minzu University,
Наньнин қаласы, Қытай

Қазақстан Республикасы
Алматы, 2026

Мазмұны

НОРМАТИВТІК СІЛТЕМЕЛЕР 3

БЕЛГІЛЕУЛЕР МЕН АНЫҚТАМАЛАР 4

КІРІСПЕ 5

1 ЖҮКТЕЛГЕН ПАРАБОЛАЛЫҚ ТЕҢДЕУЛЕР ҮШІН БЕЙЛОКАЛ ЕСЕП 16

1.1 Жүктелген параболалық теңдеулер үшін бейлокал есептің қойылымы және сыныктар әдісі көмегімен дискретті есепке келтіру 16

1.2 Жүктелген дифференциалдық теңдеу үшін дискреттелген есепті шешудің Джумабаев параметрлеу әдісінің классикалық нұсқасы және бірмәнді шешілімділік шарттары 19

1.3 Жүктелген параболалық теңдеулер үшін бейлокал есепке қолданылған сыныктар әдісінің жинақтылығы, орныктылығы, қателігі 29

1.4 Джумабаев параметрлеу әдісінің алгоритміне негізделген сандық мысалдар 35

1.5 Жүктелген параболалық теңдеулер үшін бастапқы-шеттік есептің қойылымы және сыныктар әдісі 43

1.6 Жүктелген параболалық теңдеулер үшін бастапқы-шеттік есебінің бірмәнді шешілімділігі 44

1.7 Дискреттелген есепті шешудің Джумабаев параметрлеу әдісі және бірмәнді шешілімділік шарттары 51

1.8 Сандық шешу алгоритмі және мысалдар 58

2 ПАРАБОЛАЛЫҚ ТЕКТЕС ИНТЕГРАЛДЫҚ-ДИФФЕРЕНЦИАЛДЫҚ ТЕҢДЕУЛЕР ҮШІН БЕЙЛОКАЛ ШЕТТІК ЕСЕП 66

2.1 Есептің қойылымы және параболалық тектес интегралдық-дифференциалдық теңдеулер үшін бейлокал есепке сыныктар әдісін қолдану 66

2.2 Интегралдық-дифференциалдық теңдеулер үшін дискреттелген бейлокал есепті шешуге арналған Джумабаев параметрлеу әдісі 69

2.3 Параболалық тектес интегралдық-дифференциалдық теңдеулер үшін бейлокал есепке қолданылған сыныктар әдісінің жинақтылығы және орныктылығы 78

2.4 Джумабаев параметрлеу әдісінің алгоритміне негізделген сандық мысалдар 85

3 ҚОРЫТЫНДЫ 93

4 ПАЙДАЛАНЫЛҒАН ӘДЕБИЕТТЕР 95

НОРМАТИВТІК СІЛТЕМЕЛЕР

Бұл диссертацияда төмендегі стандарттарға сілтемелер қолданылады:

ҚР МЖМБС 5.04.034-2011. Қазақстан Республикасының мемлекеттік жалпыға міндетті білім беру стандарты. Жоғары оқу орнынан кейінгі білім беру. Докторантура. Негізгі ережелер;

МЕМСТ 7.1-2003. Библиографиялық жазба. Библиографиялық сипаттама. Жалпы талаптары мен құрастыру ережелері;

МЕМСТ 7.32-2017. Ғылыми-зерттеу жұмысы туралы есеп. Құрылымы және пішімдеу ережелері.

БЕЛГІЛЕУЛЕР МЕН АНЫҚТАМАЛАР

- $\mathbb{R}$ - нақты сандар жиыны;
- $\mathbb{N}$ - натурал сандар жиыны;
- $\mathbb{R}^{N-1}$ - $N-1$ өлшемді векторлық кеңістік;
- $C^{1,2}\left(\overline{\Omega}\right)$ - $\overline{\Omega}$ тік төртбұрышында t бойынша бір рет, x бойынша екі рет үзіліссіз дифференциалданатын кеңістік;
- $C\left([0,T],\mathbb{R}^{N-1}\right)$ - үзіліссіз $u:[0,T]\to\mathbb{R}^{N-1}$ функциясынан тұратын және нормасы $\|u\|_1=\max\limits_{t\in[0,T]}\|u\|$ арқылы анықталатын кеңістік;
- $C([0,T],t_s,\mathbb{R}^{(N-1)(m+1)})$ - $u_s:[t_{s-1},t_s)\to\mathbb{R}^{N-1}$ функциялары $[t_{s-1},t_s)$ аралығында үзіліссіз және барлық $s=\overline{1,m+1}$ үшін $\lim\limits_{t\to t_s-0}u_s(t)$ сол жақты шегі бар және нормасы $\|u[\cdot]\|_2=\max\limits_{s=\overline{1,m+1}}\sup\limits_{t\in[t_{s-1},t_s)}\|u_s(t)\|$ арқылы анықталатын кеңістік;

- Гронуолл-Беллман леммасы. Егер $[0,T]$ аралығында анықталған оң және үзіліссіз $y(t)$ функциясы келесі теңсіздікті қанағаттандырса,

$$y(t)\le C_1+C_2\int_0^t y(\tau)d\tau,\ \ t\in[0,T],\ \ T>0,$$

онда келесі бағалау орындалады:

$$y(t)\le C_1e^{C_2t},\ \ t\in[0,T].$$

- Интегралдық Гронуолл теңсіздігі. $y(t)$, $f(t)\ge 0$ функциялары оң және $t\in[0,T]$ аралығында үзіліссіз болсын. Егер $y(t)\le C_1+C_2\int_0^t y(\tau)\,f(\tau)d\tau$, $t\in[0,T]$ теңсіздігі орындалса, онда $y(t)$ функциясы үшін $y(t)\le C_1e^{C_2\int_0^t f(\tau)d\tau}$ бағалауы орындалады, мұнда $C_1,C_2\ge 0$ тұрақтылар.

КІРІСПЕ

Параболалық тектес дербес туындылы теңдеулер ғылым мен техниканың көптеген салаларында маңызды рөл атқарады. Параболалық теңдеулер үшін қойылатын шеттік есептер инженерлік жылулық талдау, жер асты суларының қозғалысы, климаттық модельдеу, биологиялық процестер, химиялық реакциялар, экологиялық инженерия, материалтану және қаржы инженериясы сияқты қолданбалы есептерде жиі кездеседі [1-5].

Зерттеудің өзектілігі. Қазіргі уақытта математикалық физика, жылуөткізгіштік теориясы, диффузия процестері, гидродинамика, биология және басқару теориясында жады қасиеті бар процестерді зерттеу ерекше маңызға ие. Мұндай процестерді сипаттауда параболалық тектес интегралдық-дифференциалдық және жүктемелері бар теңдеулер кеңінен қолданылады. Бұл теңдеулерде жүйенің ағымдағы күйі тек уақыттың берілген мезетіндегі шамаларға ғана емес, сонымен қатар оның алдыңғы және кейінгі уақыттағы күйлеріне де тәуелді болады. Осыған байланысты жүктелген және интегралдық-дифференциалдық теңдеулер теориясы қарқынды дамып келеді.

Жүктелген теңдеулер көптеген қолданбалы есептерде пайда болады. Атап айтқанда, интегралдық-дифференциалдық теңдеулерді жуықтап шешу кезінде [6], үлкен аумақтарды жасанды суару кезінде жер асты сулары деңгейін басқару есептерінде, өсімдік тамырлары арқылы сіңірілетін топырақ ылғалдылығына байланысты қысымның таралуын сипаттайтын теңдеулерде, бейсызық теңдеулерді сызықтандыруда [6], кері есептерді зерттеуде [7], [8], бейсызық теңдеулерді сызықтандыру кезінде [9], [10], бейлокал шеттік есептерді сәйкес түрлендіру нәтижесінде [11], [12], оптималды басқару теориясында, фильтрация процестерін модельдеуде, жер асты сулары деңгейін басқаруда және бөлшектердің тасымалдану процестерінде қолданылады [13].

Жүктелген дифференциалдық теңдеулер теориясының қалыптасуына және дамуына А.М. Krall, А.М. Нахушев, В.М. Будак, М.Т. Дженалиев, А.Д. Искендеров, В.Н. Борисов, М.Х. Шхануков, А.В. Бородин, И.Н. Ланин, В.М. Казиев, З.А. Нахушева, И.С. Ломов, Х.Ж. Дикинов, А.А. Керефов, М.И. Рамазанов және басқа ғалымдар елеулі үлес қосты [14-19]. Осы бағыттағы алғашқы жұмыстардың бірі А.М. Krall еңбектерінде аралықтардың бекітілген нүктелеріндегі функция мәндері мен оның туындылары қатысатын операторларды «дифференциалдық шеттік операторлар» ретінде енгізілген болатын [16].

А.М. Нахушев жүктелген дифференциалдық теңдеулерді ізделінетін функцияның және оның туындыларының қосымша мәндері теңдеу құрамына енгізілетін дифференциалдық теңдеу деп жалпылама теориялық анықтама береді [14]. Ал А.Д. Искендеров жүктелген теңдеулердің құрамына функцияның немесе оның туындыларының облыстың белгіленген нүктелеріндегі мәндері кездесетін теңдеулер ретінде қарастырған [8]. И.С. Ломов жүктелген теңдеулер

теориясының дифференциалдық шекаралық операторлар теориясымен тығыз байланысын көрсеткен [15]. Ал М.Т. Дженалиев пен М.И. Рамазанов еңбектерінде жүктелген дифференциалдық теңдеулер дифференциалдық теңдеулердің ауытқуы ретінде қарастырған [17].

Жүктелген параболалық теңдеулер теориясының дамуына А.Д. Искендеров, А.М. Нахушев, М.Т. Дженалиев, Х.Ж. Дикинов, А.А. Керефов, А.П. Белогуров, С.Х. Геккиева, М.А. Керефов, Р.И. Паровик, В.М. Борок, Я.И. Житомирский, Liu Junyi, Xu Mingyu, М.Х. Шхануков және басқа зерттеушілер үлес қосты [8],[14],[20-32]. А.М. Нахушев пен В.Н. Борисов өз жұмыстарында бастапқы Буссинеск теңдеуін сызықтандыру нәтижесінде алынатын жүктелген параболалық теңдеулерді зерттеді [10]. Ал А.Д. Искендеров кейбір кері есептердің жүктелген параболалық теңдеулерге келтірілетінін көрсетті [8]. Сонымен қатар, Н.Н. Кочина суару процестеріндегі жер асты сулары деңгейін реттеу есептерінің жүктелген параболалық теңдеулерге келтірілетінін дәлелдеді [34]. Соңғы жылдары жүктелген параболалық теңдеулерді сандық шешу мәселелері де белсенді зерттелуде. М.Х. Шхануков жүктелген параболалық теңдеулер үшін айырымдық әдістерді қолданды [35]. В.М. Абдуллаев бейлокал шарттары бар жүктелген параболалық теңдеулердің сандық шешімділігін сынықтар әдісі арқылы зерттеді [36]. М.З. Худалов Ротэ әдісіне негізделген сандық схемаларды қарастырды [37]. Сонымен қатар, Shweta Kumari мен Mani Mehra уақыт бойынша бөлшекті туындысы бар жүктелген диффузия теңдеулерін сандық жуықтау мәселелерін зерттеді [38]. Ал З.В. Бештокова көпөлшемді жүктелген параболалық теңдеулер үшін локалды-бірөлшемді айырымдық схемаларды құрастырды [39]. Жүктелген параболалық теңдеулерді сандық шешудің әртүрлі әдістері [40-43] жұмыстарында кездеседі.

Практикада «уақыт» айнымалысының бекітілген мәндеріндегі ізделінді функцияның іздері кездесетін жүктелген теңдеулер жиі ұшырасады. Мұндай теңдеулерде шешімнің уақыттың белгілі бір мезеттеріндегі мәндері теңдеудің оң жағына немесе коэффициенттеріне тікелей енеді [44]. Осындай теңдеулер қатарына импульстік басқару есептері, «жадысы» бар тұтқыр-серпімділік механикасының есептері [45], сондай-ақ бейлокал есептерді локал есептерге пара-пар түрлендіру барысында пайда болатын мәселелер жатады [11, 46]. Сонымен қатар, жүктелген қарапайым дифференциалдық теңдеулерді де осы класқа енгізуге болады [15, 16, 47].

Математикалық талдау курсынан белгілі анықталған интегралды жуықтап есептеу үшін квадратуралық формулалар қолданылады: $\int_a^b f(x)dx \approx \sum_{k=0}^{N} c_k f(x_k)$, мұнда x_k - квадратура түйіндері, ал c_k - квадратура коэффициенттері. Жуықтау теориясындағы осы тәсілдер интегралдық-дифференциалдық теңдеулерді жүктелген теңдеулерге келтіруде жиі қолданылады [48].

Атап айтсақ, А.М.Нахушев еңбектерінде келесі параболалық тектес интегралдық-дифференциалдық теңдеулер қарастырылады:

$$\frac{\partial u(t,x)}{\partial t} = \Delta_x u(t,x) + \int_0^T k(t,s)u(s,x)\,ds,$$

мұнда Δ_x-Лаплас операторы, $k(t,s)$- өзек, ал интегралдық бөлік жүйенің уақыттық байланысын сипаттайды. $0 \le s \le T$ аралығында $0 \le t_0 < t_1 < \ldots < t_m < t_{m+1} = T$ нүктелері берілсін. Егер өзек белгілі аралықтарда тұрақты мән қабылдаса, яғни $k(t,s) = a_i(t)$, $t_i \le s \le t_{i+1}$, $i = 0,1,\ldots,m$, онда интегралдық бөлік $\int_0^T k(t,s)u(s,x)\,ds = \sum_{i=0}^{m} a_i(t) \int_{t_i}^{t_{i+1}} u(s,x)\,ds$ түрінде өрнектеледі. Демек, квадратуралық формула $\int_0^T k(t,s)u(s,x)\,ds \approx \sum_{j=0}^{m} b_j(t)u(t_j,x)$, $b_j(t)$-квадратуралық коэффициенттер, қолдану нәтижесінде бастапқы интегралдық-дифференциалдық теңдеуді келесі жүктелген параболалық теңдеуге келтіріледі:

$$\frac{\partial u(t,x)}{\partial t} = \Delta_x u(t,x) + \sum_{j=0}^{m} b_j(t)u(t_j,x).$$

Яғни осы түрлендіру көмегімен параболалық интегралдық-дифференциалдық теңдеулер модельдерін жүктелген параболалық теңдеулерге келтіру жолы негізделеді [14].

Осылайша, жүктелген параболалық теңдеулерді параболалық тектес Фредгольм интегралдық-дифференциалдық теңдеулердің дербес немесе жуықталған моделі ретінде қарастыруға болады.

Параболалық тектес Фредгольм интегралдық-дифференциалдық теңдеулер теориясы соңғы жылдары қарқынды дамып келе жатқан бағыттардың бірі болып табылады. Мұндай теңдеулер физикада, биологияда, жылуөткізгіштік теориясында, популяциялық динамикада, тұтқыр сұйықтар механикасында және басқару теориясында кеңінен қолданылады [49-53]. Бұл теңдеулердің ерекшелігі-шешімнің ағымдағы күйінің интегралдық оператор арқылы өткен уақыттағы немесе бүкіл облыстағы мәндерге тәуелді болуы. Параболалық Фредгольм интегралдық-дифференциалдық теңдеулер қолданбалы математиканың көптеген салаларында кездеседі. Атап айтқанда, олар популяция модельдерінде [50], зарядталған бөлшектер қозғалысын зерттеуде [52], [53], тұтқыр сұйықтардың ағу теориясында [54, 55], өздігінен қызу процестерінде [56],

жану теориясында және әралуан эпидемиялардың таралуының математикалық модельдерінде кеңінен қолданылады [49].

Параболалық тектес Фредгольм интегралдық-дифференциалдық теңдеулердің теориялық аспектілерін зерттеуге көптеген ғалымдардың еңбектері арналды. C.V. Pao сызықты емес параболалық Фредгольм интегралдық-дифференциалдық теңдеулердің кең класы үшін дәл салыстыру қағидаларын алған және олардың шешімдерінің қасиеттерін зерттеді [49]. M.I. Gil' өзінің жұмысында Банах кеңістігіндегі сызықтық уақытқа тәуелді интегралдық-дифференциалдық теңдеулер қарастырды. Арнайы скалярлық көбейтінді шарттарының негізінде шешімнің бар болуы мен орнықтылығының шарттары алынды. Сонымен қатар, параболалық Фредгольм интегралдық-дифференциалдық теңдеулерге қолданбалы мәселелер талқыланды. [50]. A. Lorenzi және A. Прилепко сызықты жағдайда жалғыз шешімнің бар болуы мен орнықтылығын қамтамасыз ететін жеткілікті шарттарды зерттеп, ал сызықты емес жағдайда орнықтылық мәселелерін қарастырды [57]. Интегралдық-дифференциалдық операторлардың аналитикалық қасиеттерін зерттеуде M.G. Garroni мен J.L. Menaldi еңбектері маңызды орын алады. Авторлар екінші ретті параболалық-эллиптикалық интегралдық-дифференциалдық операторлар үшін Грин функциясын құрып, оның негізгі қасиеттерін зерттеді. Мұнда шекаралық шарттар бірінші ретті оператор арқылы беріледі және барлық коэффициенттер Гельдер бойынша үзіліссіз деп қарастырылады [58].

Соңғы жылдары параболалық Фредгольм интегралдық-дифференциалдық теңдеулерін сандық шешу мәселелеріне де үлкен көңіл бөлінуде [59-72]. I. Borachok, R. Chapko, O. Palianytsia және J. Brown шектелген екі және үшөлшемді облыстардағы параболалық Фредгольм интегралдық-дифференциалдық теңдеулер үшін бастапқы-шеттік есептердің сандық шешуін RBF (radial basis function) әдісі арқылы зерттеді [64]. S. Elango, L. Govindarao және R. Vadivel кіші параметрлері мен интегралдық шекаралық шарттары бар Фредгольм интегралдық-дифференциалдық теңдеулер үшін әртүрлі сандық әдістердің салыстырмалы талдауын жүргізді [65]. Ал И. Боглаев сызықты емес Фредгольм интегралдық-дифференциалдық теңдеулерді шешуге арналған сандық әдіс ұсынды [66].

Зерттеу жұмысының өзектілігі - жүктелген және интегралдық-дифференциалдық теңдеулердің қазіргі қолданбалы математиканың, физиканың және инженерлік есептердің маңызды модельдері болып табылады.

Параболалық жүктелген және интегралдық-дифференциалдық теңдеулер үшін шеттік есептердің шешімін табу үшін алдымен сынықтар әдісі қолданылды [73-85]. Сынықтар әдісі дегеніміз кеңістік айнымалы x-ты дискреттеп, туындыларды ақырлы айырымдық сұлбаларымен ауыстыру тәсілі. Әдісті қолдану нәтижесінде жүктелген дифференциалдық және интегралдық-дифференциалдық теңдеулер үшін шеттік есептерден тұратын дискреттелген

есептер алынады. Шыққан дискреттелген есептерді матрицалық-векторлық түрде жазып, жүктелген дифференциалдық теңдеулер жүйесі үшін және интегралдық-дифференциалдық теңдеулер жүйесі үшін шеттік есептерге келтіріледі. Осы есептердің жуық және сандық шешімдерін табу үшін Джумабаевтың параметрлеу әдісі пайдаланылды [86-95]. Бұл әдістің тиімділігі есептің сандық-аналитикалық шешімінің дәл шешімге жоғары дәлдікпен жуықтауына және есептің бірмәнді шешілімділік шарттарын орнатуға мүмкіндік беретіндігінде деуге болады [96-106].

Параболалық тектес жүктелген және интегралдық-дифференциалдық теңдеулер үшін шеттік есептерге сынықтар әдісін қолданудың теориялық негіздемесі ретінде теоремалар дәлелденіп, аталған есептердің бірмәнді шешілімділік шарттары айқындалды. Зерттеу барысында параболалық жүктелген және интегралдық-дифференциалдық теңдеулер үшін шеттік есептер мен олардың сәйкес дискреттелген есептері арасындағы байланыстары зерттелді. Дискреттелген есептердің бірмәнді шешілімділігі мен аталған байланыстар параметрлеу әдісі көмегімен орнатылған теоремалар арқылы дәлелденді.

Зерттеу мақсаты. Диссертациялық жұмыстың мақсаты - жүктелген параболалық теңдеулер үшін бейлокал есептерді және параболалық тектес интегралдық-дифференциалдық теңдеулер үшін бейлокал есептердің бірмәнді шешілімділігін орнату және сандық-аналитикалық шешімдерін құру. Осы мақсатты жүзеге асыру үшін зерттелетін есептердің шешімдерін табуға сынықтар әдісі пайдаланылады. Сынықтар әдісі негізінде кеңістіктік айнымалы бойынша дискреттеуден шыққан жүктелген дифференциалдық және интегралдық-дифференциалдық теңдеулер жүйелері үшін шеттік есептердің бірмәнді шешілімділік шарттары және бастапқы есептермен байланысы көрсетіледі. Зерттелген есептердің сандық шешімдерін тұрғызуға арналған мысалдар келтіріледі және осы мысалдар арқылы әдістің тиімділігі көрсетіледі.

Зерттеу нысаны. Жүктелген параболалық теңдеулер мен параболалық тектес Фредгольм интегралдық-дифференциалдық теңдеулері үшін бейлокал есептерді шешудің сандық-аналитикалық әдістері.

Зерттеу әдістері. Диссертациялық жұмыста дифференциалдық және интегралдық-дифференциалдық теориясының әдістері, дербес туындылы дифференциалдық теңдеулер үшін бейлокал есептер теориясы, сынықтар әдісі, Джумабаев параметрлеу әдісі және сандық әдістер қолданылды.

Теориялық және практикалық құндылығы. Диссертациялық жұмыста жүктелген параболалық теңдеулер мен параболалық тектес Фредгольм интегралдық-дифференциалдық теңдеулері үшін бейлокал шеттік есептердің бірмәнді шешімділігі және сандық-аналитикалық шешімдерін құру мәселелері зерттелінді. Орнатылған нәтижелер жүктелген дифференциалдық және интегралдық-дифференциалдық теңдеулер теориясын, функционалдық-дифференциалдық теңдеулер теориясын дамытуға үлес қосады. Жұмыста

қолданылған әдістерді дербес туындылы дифференциалдық теңдеулер үшін бейлокал есептер теориясында, интегралдық-дифференциалдық теңдеулерді және жүктелген дифференциалдық теңдеулерді зерттеуде пайдалануға болады.

Диссертациялық жұмыстың нәтижелері жерасты сулары деңгейін болжау және басқару есептерінде, жылуөткізгіштік теориясында, тұтқыр-серпімді орталардағы процестерді модельдеуде, популяциялық динамика есептерінде және диффузиялық процестерді зерттеуде қолданылуы мүмкін. Ұсынылған сандық әдістер жүктелген параболалық теңдеулер және параболалық интегралдық-дифференциалдық теңдеулер үшін бейлокал шеттік есептердің жуық шешімдерін есептеуде пайдаланылуы мүмкін. Сонымен қатар, жұмыстың нәтижелері қолданбалы математика, математикалық физика және сандық талдау бағыттарындағы арнайы курстарда қолдануға жарамды.

Диссертациялық жұмыстың басқа ғылыми-зерттеу жұмыстарымен байланысы. Диссертациялық жұмыс «Тұрақты және айнымалы құрылымды жиындардағы динамикалық және интегралдық-динамикалық теңдеулер үшін шеттік есептер» (№AP23485618, 2024-2026 жж.) және «Үлестірілген параметрлері бар функционалдық-гиперболалық және функционалдық-параболалық теңдеулер үшін есептер» (№AP26194447, 2025-2027жж.) жобалары аясында қаржыландырып орындалды және докторант С.Қ. Қуаныш жоба орындаушысы ретінде қатысып келеді.

Ғылыми жаңалығы. Қорғауға ұсынылған негізгі нәтижелер. Диссертациялық жұмыста жүктелген параболалық теңдеулер мен параболалық тектес Фредгольм интегралдық-дифференциалдық теңдеулер үшін бейлокал шеттік есептер зерттелді. Жұмыстың ғылыми жаңалығы төмендегідей нәтижелермен сипатталады:

- Жүктелген параболалық теңдеулер үшін бейлокал шеттік есептерді шешуге сынықтар әдісі негізделді;
- Жүктелген параболалық теңдеулер үшін бейлокал шеттік есепке мысалдар қарастырылып, сандық шешімдері құрылды;
- Жүктелген параболалық теңдеулер үшін бастапқы-шеттік шеттік есептің бірмәнді шешілімділігі шарттары анықталды;
- Дискреттелген есеп - жүктелген дифференциалдық теңдеулер жүйесі үшін шеттік есепті шешудің Джумабаев параметрлеу әдісі негізделді және бірмәнді шешілімділік шарттары анықталды;
- Параболалық тектес Фредгольм интегралдық-дифференциалдық теңдеу үшін бейлокал шеттік есептерді шешуге сынықтар әдісі негізделді;
- Дискреттелген есеп - Фредгольм интегралдық-дифференциалдық теңдеулер жүйесі үшін шеттік есепті шешудің Джумабаев параметрлеу әдісі негізделді және бірмәнді шешілімділік шарттары анықталды;
- Параболалық тектес Фредгольм интегралдық-дифференциалдық теңдеулер үшін бейлокал шеттік есепке мысалдар қарастырылып, сандық шешімдері құрылды;

- Жүктелген параболалық теңдеулер және параболалық тектес Фредгольм интегралдық-дифференциалдық теңдеулер үшін бейлокал шеттік есептерге қолданылған сынықтар әдісінің жинақтылығы, орнықтылығы мен дәлдігі шарттары көрсетілді.

1. **Аппробация.** Диссертациялық жұмыстың негізгі нәтижелері халықаралық және республикалық ғылыми конференцияларда, ғылыми семинарларда баяндалып, талқыланды. Тізіп айтқанда, «Фараби әлемі» студенттер мен жас ғалымдардың халықаралық ғылыми конференциясында (Алматы, Қазақстан, 4-6 сәуір 2024 ж.), «Ғылым, техника және білімдегі есептеу және ақпараттық технологиялар (CITech–2024)» халықаралық конференциясында (Алматы, Қазақстан, 23-24 қазан 2024 ж.), «14th AIMS International Conference on Dynamical Systems, Differential Equations and Applications.» халықаралық конференциясында (Абу-Даби, БАӘ, 16-20 қараша 2024ж.), «Ғылым күніне орай математика және математикалық модельдеу институтының 80 жылдығына арналған дәстүрлі сәуір математикалық конференциясында (Алматы, Қазақстан, 1-4 сәуір 2025 ж.), «Фараби әлемі» студенттер мен жас ғалымдардың халықаралық ғылыми конференциясында (Алматы, Қазақстан, 3-5 сәуір 2025 ж.), «Математика, механика және ақпараттық технологиялар» Х-шы халықаралық ғылыми конференциясында (Алматы, Қазақстан, 24-26 қыркүйек, 2025 ж.), «Білім мен ғылымдағы қолданбалы мәселелерді шешудегі цифрлық технологиялар мен пәнаралық тәсілдер» халықаралық ғылыми-практикалық конференциясында (Атырау, Қазақстан, 3 қазан 2025 ж.), Қазақстан математиктерінің Бірінші Конгресі, “Ғалымдар күніне арналған дәстүрлі сәуірлік халықаралық математикалық конференция” атты халықаралық конференцияда (Шымкент, Қазақстан, 3-7 сәуір, 2026ж.), «Фараби әлемі» студенттер мен жас ғалымдардың халықаралық ғылыми конференциясында (Алматы, Қазақстан, 7-8 сәуір 2026 ж.), «Математика, механика және информатиканың іргелі және қолданбалы мәселелері» Халықаралық ғылыми конференциясында (Қарағанды, Қазақстан, 3-4 маусым 2026 ж.), «Функционалдық кеңістіктердегі интегралдық операторлар және гармониялық анализ» атты Халықаралық ғылыми конференциясында (Астана, Қазақстан, 11-14 маусым 2026 ж.), International CMMSE Conference and the Fourth Conference on High Performance Computing (CHPC) (Кадис, Испания, 2–9 шілде 2026 ж.), халықаралық конференциясында баяндалды.

   Сонымен қатар, диссертациялық жұмыстың нәтижелері Қ. Жұбанов атындағы Ақтөбе өңірлік университетінің физика-математика факультеті, математика кафедрасының «Қолданбалы математика және информатика проблемалары» атты ғылыми семинарында университет оқытушыларына баяндалып, талқыланды (Ақтөбе, Қазақстан, 17–18 қараша 2025 ж.). Сондай-ақ, 2026 жылғы 08–09 мамыр аралығында Қ. Жұбанов атындағы Ақтөбе өңірлік университетінің Физика-математика факультеті,

математика кафедрасында ұйымдастырылған «Функционалдық-дифференциалдық теңдеулер үшін шеттік есептердегі Джумабаев параметрлеу әдісі» атты воркшоп отырысында диссертациялық жұмысқа қатысты баяндама жасалды. Әл-Фараби атындағы ҚазҰУ, математика кафедрасының ғылыми семинарларында баяндама жасалынды және диссертация бойынша талқылаулар жүргізілді.

Ғылыми тұжырымдардың, қорытындылар мен нәтижелердің сенімділігі мен негізділігі. Зерттеу жұмысындағы алынған нәтижелер индекстелген халықаралық журналдардағы жарияланымдар мен конференция материалдары арқылы расталады.

Жарияланымдар. Диссертация нәтижелері бойынша 16 жұмыс жарияланды.

-Web of Science және Scopus деректер қорына енетін басылымдардағы жарияланымдар:

1. **Kuanysh S.K.,** Assanova A.T., Kadirbayeva Zh.M. "Method of lines for a loaded parabolic equation" Journal of Mathematics, Mechanics, Computer Science, 1(125), 2025, pp. 3–17. Scopus: 37%, Web of Science: Q3.

2. Assanova A.T., Kadirbayeva Zh.M., **Kuanysh S.K.** "Numerical-analytical method for solving initial-boundary value problem for loaded parabolic equation" Bulletin of the Karaganda University. Mathematics Series, 1(117), 2025, pp. 34–45. Scopus: 53%, Web of Science: Q2.

3. Assanova A.T., Liu Zh., **Kuanysh S.K.,** Kadirbayeva Zh.M. "Convergence, stability, and error analysis of the method of lines for solving loaded parabolic equation" AIMS Mathematics, 10(12), 2025, pp. 29454-29469. Scopus: 86%, Web of Science: Q1.

4. **S.K. Kuanysh,** Zh. M. Kadirbayeva, Analysis of Nonlocal Problem for Loaded Parabolic Equation via Numerical Method, Lobachevskii Journal of Mathematics. 46 (10) (2025) 5417-5427. Scopus: 56%, Web of Science: Q2.

5. S. M. Temesheva, Zh. M. Kadirbayeva**, S. K. Kuanysh**, Analysis of Semi-periodic Problem for Integro-differential Equations of Parabolic Type, Lobachevskii Journal of Mathematics. 46 (12) (2025) 6441-6454. Scopus: 56%, Web of Science: Q2.

6. Н.Б. Искакова, Ж.М. Кадирбаева, Э.А. Бакирова, **С.Қ. Қуаныш** «Параболалық теңдеу үшін шеттік есепті шешудің сандық әдісі», Қазақстан-Британ техникалық университетінің хабаршысы, 21-том, №3 (2024). 165-175.

- *Халықаралық ғылыми конференция еңбектеріндегі жарияланымдар:*

1. **Қуаныш С.Қ.** Параболалық теңдеу үшін қойылған бейлокал шеттік есепті шешудің бір әдісі туралы // «Фараби әлемі» студенттер мен жас ғалымдардың халықаралық ғылыми конференциясы. – Алматы: әл-Фараби атындағы ҚазҰУ, 4–6 сәуір 2024 ж.- 26 бет.

2. **Kuanysh S.** Algorithm for Solving the Two-Point Boundary Value Problem for Loaded Parabolic Equations // Proceedings of the CITech–2024

Conference “Computational and Information Technologies in Science, Engineering and Education”. – Almaty, Kazakhstan, October 23–24, 2024. – P. 93.

3. **Kuanysh S.** Solution of Nonlocal Problem for Loaded Parabolic Equations // Traditional International April Mathematical Conference in Honor of the Kazakhstan Day of Science Workers. – Almaty, Kazakhstan, April 1–4, 2025. – P. 160.

4. **Қуаныш С.Қ.** Жүктелген параболалық теңдеулер үшін екі нүктелі шеттік есеп // «Фараби әлемі» студенттер мен жас ғалымдардың халықаралық ғылыми конференциясы. – Алматы: әл-Фараби атындағы ҚазҰУ, 3–5 сәуір 2025 ж. - 4 бет.

5. **Қуаныш С.** Параболалық тектес интегралдық-дифференциалдық теңдеулер үшін периодтық есепті сандық шешу // «Білім мен ғылымдағы қолданбалы мәселелерді шешудегі цифрлық технологиялар мен пәнаралық тәсілдер» халықаралық ғылыми-практикалық конференциясы. – Атырау, Қазақстан, 3 қазан 2025 ж. – 342 бет.

6**. S.K. Kuanysh**, E.A. Bakirova. A Stable and Convergent Method of Lines for Fredholm-Type Parabolic Integro-Differential Equations // The First Congress of Kazakhstan Mathematicians. – Shymkent, Kazakhstan, April 3–7, 2025. – P. 238.

7. **S. K. Kuanysh,** N.B. Iskakova, P.B. Abdimanapova. Convergence, stability, and error analysis of the method of lines for solving loaded parabolic equations // The First Congress of Kazakhstan Mathematicians. – Shymkent, Kazakhstan, April 3–7, 2026. P.239.

8. **Қуаныш С.Қ,** Қуаныш Ж.Қ. Уақыт бойынша бейлокал шарттары бар параболалық интегро-дифференциалдық теңдеулердің классикалық шешімі // «Фараби әлемі» студенттер мен жас ғалымдардың халықаралық ғылыми конференциясы. – Алматы: әл-Фараби атындағы ҚазҰУ, 7–8 сәуір 2026 ж.

9. **Kuanysh S.** Numerical analysis of parabolic Volterra integro-differential equations // «Fundamental and Applied Issues in Mathematics, Mechanics, and Computer Science» International Scientific Conference. - Karaganda, Buketov Karaganda National Research University, June 3-4, 2026. - P.61.

10. **S.K. Kuanysh.** Classical Solutions of Parabolic Integro-Differential Equations with Nonlocal-in-Time Boundary Conditions// «Integral Operators in Function Spaces and Harmonic Analysis» International Scientific Conference. - Astana, L.N.Gumilyov Eurasian National University, June 11-14, 2026. - P.148.

Диссертацияның құрылымы. Диссертациялық жұмыс кіріспеден, екі бөлімнен, қорытынды және пайдаланылған әдебиеттер тізімінен тұрады. Диссертация көлемі 102 бет.

Диссертация мазмұны. Диссертациялық жұмыстың кіріспе бөлімінде диссертация тақырыбының өзектілігі мен ғылыми жаңалығы,

зерттеу әдістері, теориялық маңыздылығы, бөлімдер арасындағы байланыс, зерттеу жұмысының қызқаша мазмұны берілді.

Бірінші бөлімде жүктелген параболалық теңдеулер үшін бейлокал шеттік есептер қарастырылды. **Жұмыстың 1.1** ішкі бөлімінде жүктелген параболалық теңдеулер үшін бейлокал шеттік есептің қойылымы беріліп, сыныктар әдісін қолдану арқылы сәйкес дискретті есеп алынды. **Жұмыстың 1.2** ішкі бөлімінде дискреттеу нәтижесінде алынған жүктелген дифференциалдық теңдеулер жүйесі үшін шеттік есепті шешу үшін Джумабаев параметрлеу әдісінің классикалық нұсқасы қолданылып, бірмәнді шешілімділік шарттары орнатылды және жуық шешімді табу алгоритмі ұсынылды. **Жұмыстың 1.3** ішкі бөлімінде жүктелген параболалық теңдеулер үшін бейлокал шеттік есептерге қолданылған сыныктар әдісінің жинақтылығы, орныктылығы және дәлдігі көрсетілді. **Жұмыстың 1.4** ішкі бөлімінде жүктелген параболалық теңдеулер үшін бейлокал шеттік есептердің шешімін табуға Джумабаев параметрлеу әдісінің алгоритмі негізінде жүргізілген сандық есептеу нәтижелері мен мысалдар келтірілді. **Жұмыстың 1.5** ішкі бөлімінде жүктелген параболалық теңдеулер үшін бастапқы-шеттік есептің қойылымы беріліп, оны шешу әдістері талданды. Есепті шешуде қолданылатын сыныктар әдісінің сұлбасы көрсетіліп, осы әдіс негізінде дискреттелген есеп - жүктелген дифференциалдық теңдеулер жүйесі үшін шеттік есеп алынды. **Жұмыстың 1.6** ішкі бөлімінде жүктелген параболалық теңдеулер үшін қойылған бастапқы-шеттік есептің бірмәнді шешілімділігі туралы теорема дәлелденді. **Жұмыстың 1.7** ішкі бөлімінде дискреттелген есепті шешудің Джумабаев параметрлеу әдісі қарастырылып, оның бірмәнді шешілімділік шарттары анықталды. **Жұмыстың 1.8** ішкі бөлімінде жүктелген параболалық теңдеулер үшін бастапқы-шеттік есепті сандық шешу алгоритмі ұсынылып, сандық мысалдар келтірілді.

Екінші бөлімде параболалық тектес Фредгольм интегралдық-дифференциалдық теңдеулер үшін бейлокал шеттік есептер қарастырылды. **Жұмыстың 2.1** ішкі бөлімінде параболалық тектес Фредгольм интегралдық-дифференциалдық теңдеулер үшін бейлокал шеттік есептің қойылымы ұсынылды. Есепке сыныктар әдісін қолдану нәтижесінде Фредгольм интегралдық-дифференциалдық теңдеулер жүйесі үшін дискреттелген бейлокал шеттік есеп алынды. **Жұмыстың 2.2** ішкі бөлімінде интегралдық-дифференциалдық теңдеулер үшін алынған дискреттелген бейлокал есепті шешуде Джумабаев параметрлеу әдісі қолданылып, есептің шешу алгоритмі талданды. **Жұмыстың 2.3** ішкі бөлімінде параболалық тектес Фредгольм интегралдық-дифференциалдық теңдеулер үшін бейлокал шеттік есепке қолданылған сыныктар әдісінің жинақтылығы, орныктылығы және дәлдігі көрсетілді. **Жұмыстың 2.4** ішкі бөлімінде параболалық тектес Фредгольм интегралдық-дифференциалдық теңдеулер үшін бейлокал есептің шешімін табудың Джумабаев параметрлеу әдісінің алгоритміне негізделген сандық мысалдар келтіріліп,

есептеу нәтижелерінің дәлдігі мен қателік шамалары көрсетілді. **Қорытынды бөлімде** диссертациялық жұмыс барысында қол жеткізілген негізгі ғылыми нәтижелер мен алынған тұжырымдар қорытындыланды.

Алғыс. Диссертация авторы отандық ғылыми кеңесшілері Математика және математикалық моделдеу институтының профессоры, бас ғылыми қызметкері, физика-математика ғылымдарының докторы Асанова Анар Тұрмағанбетқызына және Математика және математикалық моделдеу институтының бас ғылыми қызметкері, Қазақ ұлттық қыздар педагогикалық университетінің профессоры Кадирбаева Жазира Муратбековнаға шынайы алғысын білдіреді. Сонымен қоса, шетелдік кеңесші Гуанси Минзу университетінің профессоры Лю Женхай (Liu Zhenhai) мырзаға 12.05-12.06.2026ж аралығында Қытай елінде ғылыми іссапардан өтуге көмектескеніне, диссертация құрылымы бойынша құнды ақыл-кеңестері мен қолдауына шынайы алғысын білдіреді.

Автор Қазақстан Республикасының Үкіметіне және әл-Фараби атындағы Қазақ ұлттық университетіне көрсеткен жан-жақты қолдауы, сондай-ақ шетелдік ғылыми кеңесшімен бірлесіп ғылыми-зерттеу жұмыстарын жүргізуге мүмкіндік жасағаны үшін шынайы ризашылығын білдіреді.

1 ЖҮКТЕЛГЕН ПАРАБОЛАЛЫҚ ТЕҢДЕУЛЕР ҮШІН БЕЙЛОКАЛ ЕСЕП

Бұл бөлімде тіктөртбұрышта жүктелген параболалық теңдеулер үшін бейлокал есеп және жүктелген параболалық теңдеулер үшін бастапқы-шеттік есеп қарастырылды. Жүктелген параболалық теңдеулерді шешу үшін сынықтар әдісі қолданылып, нәтижесінде дискреттелген есеп алынды. Алынған дискреттелген есеп матрицалық-векторлық түрде жазылып, жүктелген дифференциалдық теңдеулер жүйесіне келтірілді. Жүктелген дифференциалдық теңдеулер жүйесі үшін шеттік есепке Джумабаев параметрлеу әдісі қолданылды. Профессорлар Д. Джумабаев пен А. Асанова еңбектеріндегі нәтижелер негізінде бастапқы-шеттік есеп шешіміне бағалау алынды [74-76]. Қойылған есептердің бірмәнді шешілімділік шарттары анықталып, оны табудың алгоритмдері ұсынылды. Алынған теориялық нәтижелер сандық мысал арқылы дәлелденді.

1.1 Жүктелген параболалық теңдеулер үшін бейлокал есептің қойылымы және сынықтар әдісі көмегімен дискретті есепке келтіру

Айталық, $\overline{\Omega} = [0,T]\times[0,\omega]$ тіктөртбұрышында жүктелген параболалық теңдеулер үшін бейлокал есеп қарастырайық:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a(t,x)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + b(t,x)u(t,x) + \sum_{j=0}^{m} k_j(t,x)u(t_j,x) + f(t,x), \quad (t,x)\in\Omega, \tag{1.1}$$

$$B(x)u(0,x) + C(x)\frac{\partial u(0,x)}{\partial x} + D(x)u(T,x) + E(x)\frac{\partial u(T,x)}{\partial x} = \varphi(x), \quad x\in[0,\omega], \tag{1.2}$$

$$u(t,0) = \psi_0(t), \quad u(t,\omega) = \psi_1(t), \quad t\in[0,T]. \tag{1.3}$$

(1.1)-(1.3) есебінің шешімі деп $\overline{\Omega} = [0,T]\times[0,\omega]$ тіктөртбұрышында үзіліссіз дифференциалданатын, (1.1) жүктелген параболалық теңдеуді және (1.2) уақыт бойынша бейлокал шартты, (1.3) шеттік шарттарын қанағаттандыратын $u(t,x)\in C^{1,2}\left(\overline{\Omega}\right)$ функциясын айтамыз.

(1.1)-(1.3) есебіне берілген коэффициенттер мен шекаралық функцияларға қатысты келесі болжамдар жасаймыз. $a(t,x) \geq \gamma > 0$, $b(t,x) \leq 0$, $k_j(t,x)$, $j = \overline{0,m}$ және $f(t,x)$ Ω-да екі айнымалысы бойынша да Гельдер үзіліссіз функциялар; $T > 0$ және $\omega > 0$; $t_j \in [0,T]$, $j = \overline{0,m}$, t_j - жүктеме нүктелері. Ал, $B(x)$, $C(x)$, $D(x)$, $E(x)$ функциялары $[0,\omega]$-да үзіліссіз, $\varphi(x)$, $\psi_0(t)$ және $\psi_1(t)$ функциялары жеткілікті тегіс.

Сынықтар әдісі негізінде, x айнымалысы бойынша $[0,\omega]$ аралығын N бөлікке бөлеміз: $x_i = i\tau$, $i = \overline{0,N}$, $N\tau = \omega$.

Келесі белгілеулерді енгізейік:

$$u_i(t) := u(t,i\tau),\ a_i(t) := a(t,i\tau),\ b_i(t) := b(t,i\tau),\ k_j^i(t) := k_j(t,i\tau)),\ j = \overline{0,m},$$

$$f_i(t) := f(t,i\tau),\ B_i := B(i\tau),\ C_i := C(i\tau),\ D_i := D(i\tau),\ E_i := E(i\tau),\ \varphi_i := \varphi(i\tau),\ i = \overline{1,N}.$$

Сынықтар әдісі бойынша кеңістік айнымалысы бойынша туындыларын ақырлы айырымдық сұлбалармен ауыстыру және жоғарыдағы белгілеулерді пайдалану арқылы (1.1)-(1.3) есебі келесідей дискреттелген есепке келтіріледі:

$$\frac{du_i}{dt} = a_i(t)\frac{u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}}{\tau^2} + b_i(t)u_i + \sum_{j=0}^{m} k_i^j(t)u_i(t_j) + f_i(t), \quad i = \overline{1,N-1}, \tag{1.4}$$

$$B_i u_i(0) + C_i \frac{u_{i+1}(0) - u_{i-1}(0)}{2\tau} + D_i u_i(T) + E_i \frac{u_{i+1}(T) - u_{i-1}(T)}{2\tau} = \varphi_i, \tag{1.5}$$

$$u_0(t) = \psi_0(t), \quad u_N(t) = \psi_1(t), \quad t \in [0,T]. \tag{1.6}$$

(1.4)-(1.6) дискреттелген есебінің шешімі деп (1.4) дискреттелген теңдеуді және (1.5), (1.6) шарттарды қанағаттандыратын, $[0,T]$ аралығында үзіліссіз дифференциалданатын $\{u_i(t)\}$, $i = \overline{1,N-1}$ шешімдер жүйесін айтамыз.

(1.4)-(1.6) дискреттелген есебін матрицалық-векторлық түрде жазу нәтижесінде жүктелген дифференциалдық теңдеулер жүйесі үшін екі нүктелі шеттік есеп алынады:

$$\frac{dU}{dt} = A(t)U(t) + \sum_{j=0}^{m} M_j(t)U(t_j) + F(t), \quad U \in \mathbb{R}^{N-1}, \tag{1.7}$$

$$\tilde{B}U(0) + \tilde{C}U(T) = \Phi, \quad t \in [0,T], \quad \Phi \in \mathbb{R}^{N-1}. \tag{1.8}$$

Мұнда $A(t)$, $M_j(t)$, $j = 0,\ldots,m$ - $(N-1)\times(N-1)$ өлшемді матрицалары және $F(t)$ - $(N-1)$ өлшемді вектор функциясы $[0,T]$ аралығында үзіліссіз. Ал, $\tilde{B}$, $\tilde{C}$ - $(N-1)\times(N-1)$ өлшемді, Φ - $(N-1)$ өлшемді тұрақты матрицалар.

$$A(t) = \begin{pmatrix} \frac{-2a_1(t)}{\tau^2} + b_1(t) & \frac{a_1(t)}{\tau^2} & \ldots & 0 & 0 \\ \frac{a_2(t)}{\tau^2} & \frac{-2a_2(t)}{\tau^2} + b_2(t) & \ldots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & \frac{-2a_{N-2}(t)}{\tau^2} + b_{N-2}(t) & \frac{a_{N-2}(t)}{\tau^2} \\ 0 & 0 & \ldots & \frac{a_{N-1}(t)}{\tau^2} & \frac{-2a_{N-1}(t)}{\tau^2} + b_{N-1}(t) \end{pmatrix},$$

$$F(t) = \begin{pmatrix} \frac{a_1(t)\psi_0(t)}{\tau^2} + f_1(t) \\ f_2(t) \\ \vdots \\ f_{N-2}(t) \\ \frac{a_{N-1}(t)\psi_1(t)}{\tau^2} + f_{N-1}(t) \end{pmatrix}, \quad M_j(t) = \begin{pmatrix} k_1^j(t) & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & k_2^j(t) & \ldots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & k_{N-2}^j(t) & 0 \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & k_{N-1}^j(t) \end{pmatrix}, \quad j = \overline{0,m},$$

$$\tilde{B}=\begin{pmatrix} B_1 & \frac{C_1}{2\tau} & \dots & 0 & 0 \\ -\frac{C_2(t)}{2\tau} & B_2 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & B_{N-2} & -\frac{C_{N-2}(t)}{2\tau} \\ 0 & 0 & \dots & -\frac{C_{N-1}(t)}{2\tau} & B_{N-1} \end{pmatrix},$$

$$\tilde{C}=\begin{pmatrix} D_1 & \frac{E_1}{2\tau} & \dots & 0 & 0 \\ -\frac{E_2(t)}{2\tau} & D_2 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & D_{N-2} & -\frac{E_{N-2}(t)}{2\tau} \\ 0 & 0 & \dots & -\frac{E_{N-1}(t)}{2\tau} & D_{N-1} \end{pmatrix}, \qquad U(t)=\begin{pmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \\ \vdots \\ u_{N-2}(t) \\ u_{N-1}(t) \end{pmatrix}.$$

(1.7), (1.8) жүктелген дифференциалдық теңдеулер жүйесі үшін екі нүктелі шеттік есебінің шешімі деп, $[0,T]$ аралығында үзіліссіз дифференциалданатын, (1.7) жүктелген дифференциалдық теңдеулер жүйесін және (1.8) екі нүктелі шеттік шартты қанағаттандыратын $U(t)\in C\left([0,T],\mathbb{R}^{N-1}\right)$ вектор функциясын айтамыз.

1.2 Жүктелген дифференциалдық теңдеу үшін дискреттелген есепті шешудің Джумабаев параметрлеу әдісінің классикалық нұсқасы және бірмәнді шешілімділік шарттары

Бұл бөлімде жүктелген параболалық теңдеулер үшін бейлокал есепті шешуге профессор Джумабаев ұсынған параметрлеу әдісінің классикалық нұсқасы қолданылды. Шешімнің бар болуы және жалғыздық шарттары анықталды [83], [84].

(1.7), (1.8) жүктелген дифференциалдық теңдеулер жүйесі үшін екі нүктелі шеттік есебін шешу үшін профессор Джумабаевтың параметрлеу әдісін қолданылады. Әдіс негізінде $[0,T]$ аралығы $m+1$ жүктеме нүктелерінде ішкі аралықтарға бөлінеді:

$$[0,T)=\bigcup_{r=1}^{m+1}[t_{r-1},t_r),\quad 0=t_0<t_1<t_2<\cdots<t_{m+1}=T.$$

$U_r(t)=U(t)$ функциясы әрбір $t\in[t_{r-1},t_r)$ өзінің ішкі аралықтарында анықталады, $r=1,\ldots,m+1$. Яғни $U_r(t)$ функциясы $U(t)$ функциясының r-ші аралықтағы сығылуы. Параметрлер келесі түрде енгізіледі: $\lambda_r=U_r(t_{r-1})$, $r=1,\ldots,m+1$, $\lambda_{m+2}=\lim\limits_{t\to T-0}U_{m+1}(t)$. (1.7), (1.8) есебінде $U_r(t)=U_r(t)+\lambda_r$, $[t_{r-1},t_r)$ алмастыруы жасалынады. Олай болса, (1.7), (1.8) есебі келесідей параметрі бар есепке пара пар болады:

$$\frac{dU_r}{dt}=A(t)(U_r+\lambda_r)+\sum_{j=0}^{m}M_j(t)\lambda_{j+1}+F(t),\quad t\in[t_{r-1},t_r),\tag{1.9}$$

$$U(t_{r-1})=0,\qquad r=\overline{1,m+1},\tag{1.10}$$

$$\tilde{B}\lambda_1+\tilde{C}\lambda_{m+2}=\Phi,\tag{1.11}$$

$$\lambda_s+\lim_{t\to t_s-0}U_s(t)=\lambda_{s+1},\quad s=\overline{1,m+1}.\tag{1.12}$$

(1.9)-(1.12) есебінің шешімі $(\lambda^*,U^*[t])$ жұбы болады. Яғни, $U_r^*(t)$, $r=1,\ldots,m+1$ функциялары әрбір $[t_{r-1},t_r)$ ішкі аралығында үзіліссіз дифференциалданып және $\lambda_r=\lambda_r^*$ болған кезде (1.9) жүйесін, сондай ақ (1.10)-(1.12) шарттарын қанағаттандырса, онда $(\lambda^*,U^*[t])$ жұбы (1.9)-(1.12) есебінің шешімі деп атаймыз.

(1.7), (1.8) және (1.9)-(1.12) есептері бір-біріне пара-пар. Яғни, егер $U^*(t)$ функциясы (1.7), (1.8) есебінің шешімі болса, онда ($\lambda^*=(U^*(t_0),U^*(t_1),\ldots,U^*(t_{m+1}))$, $U^*[t]=(U^*(t)-U^*(t_0),U^*(t)-U^*(t_1),\ldots,U^*(t)-U^*(t_m))$) арқылы анықталған $(\lambda^*,\ U^*[t])$ жұбы (1.9)-(1.12) есебінің шешімі болады. Керісінше, егер $(\lambda^{**},\ U^{**}[t])$ жұбы, (1.9)-(1.12) есебінің шешімі болса, онда $U_r^{**}(t)=U_r^{**}(t)+\lambda_r^{**}$, $r=\overline{1,m+1}$, $t\in[t_{r-1},t_r)$ және

$U^{**}(T)=\lambda_{m+2}^{**}$, арқылы анықталатын U_r^{**} функциясы (1.7), (1.8) есебінің шешімі болады. Мұнда $\lambda^{**}=(\lambda_1^{**},\ldots,\lambda_{m+2}^{**})$, $U^{**}[t]=(U_1^{**}(t),\ldots,\ U_{m+1}^{**}(t))'$.

$\lambda=(\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_{m+2})$ параметрін бекіте отырып және $U_r(t_{r-1})=0$, $r=1,\ldots,m+1$ бастапқы шартын пайдалану арқылы (1.9), (1.10) есебі екінші текті Вольтерра интегралдық теңдеулер жүйесіне келтіріледі:

$$U_r(t)=\int_{t_{r-1}}^{t}A(\xi)(U_r(\xi)+\lambda_r)d\xi+\int_{t_{r-1}}^{t}\sum_{j=0}^{m}M_j(\xi)d\xi\lambda_{j+1}+\int_{t_{r-1}}^{t}F(\xi)d\xi,\quad r=\overline{1,m+1},\qquad(1.13)$$

$U_r(t)$ функциясын (1.13) өрнегінің оң жағына итерациялық түрде ν рет $(\nu=1,2,\ldots)$ қойсақ, келесі өрнекті аламыз:

$$U_r(t)=D_{\nu r}(t)\lambda_r+\sum_{j=0}^{m}H_{\nu r}(t,M_j)\lambda_{j+1}+G_{\nu r}(t,U_r)+\ F_{\nu r}(t),\quad r=\overline{1,m+1},\qquad(1.14)$$

мұнда

$$D_{\nu r}(t)=\int_{t_{r-1}}^{t}A(\xi_1)d\xi_1+\int_{t_{r-1}}^{t}A(\xi_1)\int_{t_{r-1}}^{\xi_1}A(\xi_2)d\xi_2d\xi_1+\ldots+\int_{t_{r-1}}^{t}A(\xi_1)\ldots\int_{t_{r-1}}^{\xi_{\nu-2}}A(\xi_{\nu-1})\int_{t_{r-1}}^{\xi_{\nu-1}}A(\xi_\nu)d\xi_\nu\ldots d\xi_1,$$

$$H_{\nu r}(t,M_j)=\int_{t_{r-1}}^{t}M_j(\xi_1)d\xi_1+\int_{t_{r-1}}^{t}A(\xi_1)\int_{t_{r-1}}^{\xi_1}M_j(\xi_2)d\xi_2d\xi_1+\ldots+$$
$$+\int_{t_{r-1}}^{t}A(\xi_1)\ldots\int_{t_{r-1}}^{\xi_{\nu-2}}A(\xi_{\nu-1})\int_{t_{r-1}}^{\xi_{\nu-1}}M_j(\xi_\nu)d\xi_\nu\ldots d\xi_1,\quad j=\overline{0,m},$$

$$G_{\nu r}(t,U_r)=\int_{t_{r-1}}^{t}A(\xi_1)\ldots\int_{t_{r-1}}^{\xi_{\nu-2}}A(\xi_{\nu-1})\int_{t_{r-1}}^{\xi_{\nu-1}}A(\xi_\nu)U_r(\xi_\nu)d\xi_\nu\ldots d\xi_1,$$

$$F_{\nu r}(t)=\int_{t_{r-1}}^{t}F(\xi_1)d\xi_1+\int_{t_{r-1}}^{t}A(\xi_1)\int_{t_{r-1}}^{\xi_1}F(\xi_2)d\xi_2d\xi_1+\ldots+\int_{t_{r-1}}^{t}A(\xi_1)\ldots\int_{t_{r-1}}^{\xi_{\nu-2}}A(\xi_{\nu-1})\int_{t_{r-1}}^{\xi_{\nu-1}}F(\xi_\nu)d\xi_\nu\ldots d\xi_1.$$

(1.14) өрнегінің сол жақты шектерін анықтайық

$$\lim_{t\to t_r-0} U_r(t) = D_{\nu r}(t_r)\lambda_r + \sum_{j=0}^{m} H_{\nu r}(t_r, M_j)\lambda_{j+1} + G_{\nu r}(t_r, U_r) + F_{\nu r}(t_r), \quad r = \overline{1, m+1}. \tag{1.15}$$

(1.15) өрнегіндегі $U_r(t)$ функциясының $t \to t_r - 0$ сол жақты шектерін (1.12) шартқа апарып қоямыз және (1.11)-ді l-ге көбейтеміз, мұнда $l = \max_s(t_s - t_{s-1})$, $s = 1,\ldots,m+1$. Нәтижесінде, келесі сызықтық алгебралық теңдеулер жүйесін алынады:

$$\tilde{B}\lambda_1 \cdot l + \tilde{C}\lambda_{m+2} \cdot l = \Phi \cdot l, \tag{1.16}$$

$$[I + D_{\nu s}(t_s)]\lambda_s + \sum_{j=0}^{m} H_{\nu s}(t_s, M_j)\lambda_{j+1} - \lambda_{s+1} = -G_{\nu s}(t_s, U_s) - F_{\nu s}(t_s), \quad s = \overline{1, m+1}. \tag{1.17}$$

Мұнда, I - $(N-1)\times(N-1)$ өлшемді бірлік матрица, ал $Q_\nu(l)$-(1.16), (1.17) теңдеулер жүйесіндегі белгісіз параметрлердің коэффициенттерінен құралған матрица. Демек,

$$Q_\nu(l)\lambda = -F_\nu(l) - G_\nu(U, l), \tag{1.18}$$

$$F_\nu(l) = (-\Phi l,\ F_{\nu 1}(t_1),\ldots,\ F_{\nu m+1}(T)), \quad G_\nu(U,l) = (0, G_{\nu 1}(U_1, t_1),\ldots, G_{\nu m+1}(U_{m+1}, T)).$$

(1.9)-(1.12) жүйесін қанағаттандыратын белгісіз $(\lambda, U(t))$ жұбын анықтау үшін, (1.13) және (1.18) бойынша алгоритм құрылады.

Бастапқы (1.7), (1.8) есебінің шешімі $U^{(k)}(t)$, $k = 0,1,2,\ldots$ функциялар тізбегі арқылы алынады. Бұл функциялар келесі алгоритм бойынша есептеледі.

Қадам 0. а) $U_r(t) = 0$ деп таңдаймыз және l, $\nu \in \mathbb{N}$ үшін $Q_\nu(l)$ матрицасының кері матрицасы бар болсын деп ұйғарамыз. Онда $\lambda^{(0)} = (\lambda_1^{(0)},\ldots,\lambda_{m+2}^{(0)}) \in \mathbb{R}^{(N-1)(m+2)}$ параметр векторы келесі сызықтық алгебралық теңдеулер жүйесін шешу арқылы анықталады:

$$Q_\nu(l)\lambda^{(0)} = -F_\nu(l),$$

$$\lambda^{(0)} = -[Q_\nu(l)]^{-1}\ F_\nu(l).$$

ә) $\lambda^{(0)} \in \mathbb{R}^{(N-1)(m+2)}$ векторының компоненттерін пайдаланып, әрбір $[t_{r-1}, t_r]$, $r = 1,\ldots,m+1$ аралықтарында (1.9), (1.10) Коши есептері шешіледі және $U_r^{(0)}(t)$ функциялары анықталады.

б) Сонда әрбір ішкі аралықтағы шешім $U^{(0)}(t) = \lambda_r^{(0)} + U_r^{(0)}(t)$, $t \in [t_{r-1}, t_r]$, $r = 1,\ldots,m+1$ түрінде беріледі және $U^{(0)}(T) = \lambda_{m+2}^{(0)}$ анықталады.

Қадам 1. а) Табылған $U_r^{(0)}(t)$ функцияларын (1.18) теңдеуінің оң жағына қойып, $Q_\nu(l)\lambda^{(1)} = -\tilde{F}_\nu(l) - G_\nu(U^{(0)}, l)$ теңдеуін шешу арқылы $\lambda^{(1)} = (\lambda_1^{(1)},\ldots,\lambda_{m+2}^{(1)}) \in \mathbb{R}^{(N-1)(m+2)}$ параметр векторы анықталады.

ә) $\lambda_r^{(1)}$ параметрлерін пайдалана отырып, әрбір $r = 1,\ldots,m+1$ үшін (1.9), (1.10) Коши есептерін шешеміз және $U_r^{(1)}(t)$ функциялары анықталады.

б) Ары қарай әрбір ішкі аралықтағы шешім келесідей беріледі:

$$U^{(1)}(t) = \lambda_r^{(1)} + U_r^{(1)}(t), \quad t \in [t_{r-1}, t_r], \quad r = 1,\ldots,m+1, \text{ және } U^{(1)}(T) = \lambda_{m+2}^{(1)}.$$

Бұл қадамды ары қарай жалғастыру арқылы k -шы қадамда $\left(U_r^{(k)}(t), \lambda_r^{(k)}\right)$ жұбы анықталады.

Ұсынылған алгоритмнің жинақтылығы, сондай-ақ (1.7), (1.8) есебінің шешімінің бар болуы және жалғыздығы келесі теоремада дәлелденеді.

Теорема 1.1 Кез-келген $l \in \mathbb{R}^+$, $\nu \in \mathbb{N}$ үшін $Q_\nu(l): \mathbb{R}^{(N-1)(m+2)} \to \mathbb{R}^{(N-1)(m+2)}$ матрицасының кері матрицасы бар болсын. Келесі шарттар орындалсын

$$\left\|[Q_\nu(l)]^{-1}\right\| \le \varepsilon_\nu(l),$$

$$g_\nu(l) = \varepsilon_\nu(l)\left[e^{\alpha l} - \sum_{j=0}^{\nu}\frac{(\alpha l)^j}{j!} + \sum_{i=0}^{m}\beta_i l\left(e^{\alpha l} - \sum_{k=0}^{\nu-1}\frac{(\alpha l)^k}{k!}\right)\right] < 1.$$

Онда (1.7)-(1.8) жүктелген дифференциалдық теңдеулер үшін екі нүктелі шеттік есебінің $U^*(t)$ жалғыз шешімі бар болады және келесі бағалау орындалады:

$$\left\|U^*\right\|_1 \le K_\nu(l)\max\left(\left\|F\right\|_1, \left\|\Phi\right\|\right),$$

$$\left\|A(t)\right\| \le \alpha = const\,,\ \left\|M_i(t)\right\| \le \beta_i = const\,,\ i = 0,\ldots,m\,,$$

$$K_\nu(l) = \left\{\left(e^{\alpha l} - 1 + e^{\alpha l}\sum_{i=0}^{m}\beta_i l\right)\cdot\frac{\varepsilon_\nu(l)}{1-g_\nu(l)}\cdot\frac{(\alpha l)^\nu}{\nu!} + \frac{\varepsilon_\nu(l)}{1-g_\nu(l)}\cdot\frac{(\alpha l)^\nu}{\nu!} + 1\right\}$$
$$\times\left\{\left(e^{\alpha l} - 1 + e^{\alpha l}\cdot\sum_{i=0}^{m}\beta_i l\right)\varepsilon_\nu(l)\cdot\max\left(1, \sum_{j=0}^{\nu-1}\frac{(\alpha l)^j}{j!}\right) + e^{\alpha l}\right\} l + \varepsilon_\nu(l)\cdot\max\left(1, \sum_{j=0}^{\nu-1}\frac{(\alpha l)^j}{j!}\right) l,$$

$$\left\|\Phi\right\| \le \max\left(\left|\varphi_1 + \frac{C_1\psi_0(0) + E_1\psi_0(T)}{2\tau}\right|, |\,\varphi_2\,|, |\,\varphi_3\,|, \ldots, |\,\varphi_{N-2}\,|, \left|\varphi_{N-1} - \frac{C_{N-1}\psi_1(0) + E_{N-1}\psi_1(T)}{2\tau}\right|\right)$$
$$\le \max\left(\left\|\varphi_1\right\| + \frac{|\,C_1\,|\cdot|\,\psi_0(0)\,| + |\,E_1\,|\cdot|\,\psi_0(T)\,|}{2\tau}, |\,\varphi_2\,|, |\,\varphi_3\,|, \ldots, |\,\varphi_{N-1}\,| - \frac{|\,C_{N-1}\,|\cdot|\,\psi_1(0)\,| + |\,E_{N-1}\,|\cdot|\,\psi_1(T)\,|}{2\tau}\right)$$
$$\le \max_{i=1,N-1}|\,\varphi_i\,| + \frac{|\,C_1\,| + |\,E_1\,|}{2\tau}\max_{t\in[0,T]}|\,\psi_0(t)\,| + \frac{|\,C_{N-1}\,| + |\,E_{N-1}\,|}{2\tau}\max_{t\in[0,T]}|\,\psi_1(t)\,|,$$

$$\left\|F\right\|_1 = \max_{t\in[0,T]}|\,F(t)\,| \le \max_{t\in[0,T]}\left(\frac{|\,a_1(t)\,|\cdot|\,\psi_0(t)\,|}{\tau^2} + |\,f_1(t)\,|, \max_{i=2,N-2}|\,f_i(t)\,|, \frac{|\,a_{N-1}(t)\,|\cdot|\,\psi_1(t)\,|}{\tau^2} + |\,f_{N-1}(t)\,|\right)$$
$$\le \max_{t\in[0,T]}\frac{1}{\tau^2}\left(|\,a_1(t)\,|, |\,a_{N-1}(t)\,|\right)\cdot\max_{t\in[0,T]}(|\,\psi_0(t)\,|, |\,\psi_1(t)\,|) + \max_{t\in[0,T]}\max_{i=1,N-1}|\,f_i(t)\,|$$
$$\le\left(\max_{t\in[0,T]}\max_{i=1,N-1}\frac{1}{\tau^2}|\,a_i(t)\,| + 1\right)\cdot\max\left(\max_{t\in[0,T]}(|\,\psi_0(t)\,|, |\,\psi_1(t)\,|), \max_{t\in[0,T]}\max_{i=1,N-1}|\,f_i(t)\,|\right).$$

Дәлелдеуі. $Q_\nu(l):\mathbb{R}^{(N-1)(m+2)}\to\mathbb{R}^{(N-1)(m+2)}$ матрицасының кері матрицасы бар болсын. Алгоритмнің нөлінші қадамына сәйкес $\lambda^{(0)}$ анықталады және келесі бағалау орындалады:

$$\left\|\lambda^{(0)}\right\| = \max_{r=1,m+1}\left\|\lambda_r^{(0)}\right\| \le \left\|[Q_\nu(l)]^{-1}\right\|\cdot\left\|F_\nu(l)\right\| \le \varepsilon_\nu(l)\cdot\left\|F_\nu(l)\right\|,$$

$$\left\|F_\nu(l)\right\| \le \max\left(\left\|\Phi\right\| l, \max_{r=1,m+1}\left\|F_{\nu r}(t_r)\right\|\right),$$

$$\left\|F_{\nu r}(t_r)\right\| \le \left\|\int_{t_{r-1}}^{t_r} F(\xi_1)d\xi_1\right\| + \left\|\int_{t_{r-1}}^{t_r} A(\xi_1)\int_{t_{r-1}}^{\xi_1} F(\xi_2)d\xi_2 d\xi_1\right\| + \dots$$
$$+ \left\|\int_{t_{r-1}}^{t_r} A(\xi_1)\int_{t_{r-1}}^{\xi_1} A(\xi_2)\dots\int_{t_{r-1}}^{\xi_{\nu-1}} F(\xi_\nu)d\xi_\nu \dots d\xi_1\right\|$$
$$\le \|F\|_1 l + \alpha l \|F\|_1 l + \dots + \frac{(\alpha l)^{\nu-1}}{(\nu-1)!}\|F\|_1 l = \sum_{j=0}^{\nu-1}\frac{(\alpha l)^j}{j!}\|F\|_1 l.$$

Онда

$$\left\|\lambda^{(0)}\right\| \le \varepsilon_\nu(l)\cdot\max\left(1, \sum_{j=0}^{\nu-1}\frac{(\alpha l)^j}{j!}\right)\max(\|\Phi\|, \|F\|_1)l. \qquad (1.19)$$

$U_r^{(0)}(t)$ функциясының бағалауы келесі түрде болады:

$$\left\|U_r^{(0)}(t)\right\| \le \int_{t_{r-1}}^{t} \alpha \left\|U_r^{(0)}\right\| d\xi + \int_{t_{r-1}}^{t} \alpha d\xi \left\|\lambda_r^{(0)}\right\| + \int_{t_{r-1}}^{t}\sum_{j=1}^{m}\beta_j d\xi \left\|\lambda_{j+1}^{(0)}\right\| + \int_{t_{r-1}}^{t}\left\|F(\xi)\right\| d\xi,$$

Соңғы өрнектің екі жағына $\left\|\lambda_r^{(0)}\right\|$, $r=\overline{1,m+1}$ қосып, ары қарай Гронуолл-Беллман леммасын қолдану нәтижесінде келесі теңсіздіктер алынады:

$$\left\|U_r^{(0)}(t)\right\| + \left\|\lambda_r^{(0)}\right\| \le e^{\alpha(t-t_{r-1})}\cdot\max_{r=1,m+1}\left(\int_{t_{r-1}}^{t_r}\sum_{j=1}^{m}\beta_j d\xi\left\|\lambda_{j+1}^{(0)}\right\| + \int_{t_{r-1}}^{t_r}\left\|F(\xi)\right\| d\xi + \left\|\lambda_r^{(0)}\right\|\right),$$

$$\left\|U_r^{(0)}[\cdot]\right\|_2 = \max_{r=1,m+1}\sup_{t\in[t_{r-1},t_r)}\left\|U_r^{(0)}(t)\right\| \le (e^{\alpha l}-1)\left\|\lambda^{(0)}\right\| + e^{\alpha l}\cdot\max_{r=1,m+1}\left(\int_{t_{r-1}}^{t_r}\sum_{j=0}^{m}\left(\beta_j\left\|\lambda_{j+1}^{(0)}\right\| + \|F(\xi)\|\right)\beta_j\left\|\lambda_{j+1}^{(0)}\right\| d\xi\right),$$

$$\left\|U^{(0)}[\cdot]\right\|_2 \le \left(e^{\alpha l} - 1 + e^{\alpha l}\cdot\sum_{j=1}^{m}\beta_j l\right)\left\|\lambda^{(0)}\right\| + e^{\alpha l}\|F\|_1 l\,. \qquad (1.20)$$

Демек

$$\left\|U^{(0)}[\cdot]\right\|_2 \le K_\nu(l)\max\left(\|\Phi\|, \|F\|_1\right),$$

$$K_\nu(l) = \left(e^{\alpha l} - 1 + e^{\alpha l}\cdot\sum_{j=1}^{m}\beta_j l\right)\varepsilon_\nu(l)\cdot\max\left(1, \sum_{j=0}^{\nu-1}\frac{(\alpha l)^j}{j!}\right)l + e^{\alpha l}l.$$

Алгоритмнің бірінші қадамынан $\lambda^{(1)}$ параметрі анықталады және $\left\|\lambda^{(1)} - \lambda^{(0)}\right\|$ айырымы бағаланады:

$$\left\|\lambda^{(1)}-\lambda^{(0)}\right\|\le\gamma_{\nu}(l)\cdot\left\|G_{\nu}\left(t_r,\ U^{(0)}\right)\right\|,$$

$$\left\|G_{\nu}\left(t_r,U^{(0)}\right)\right\|\le\max_{r=\overline{1,m+1}}\left\|G_{\nu r}\left(t_r,U_r{}^{(0)}\right)\right\|\le\frac{(\alpha l)^{\nu}}{\nu!}\left\|U^{(0)}[\cdot]\right\|_2,$$

$$\left\|\lambda^{(1)}-\lambda^{(0)}\right\|\le\varepsilon_{\nu}(l)\cdot\frac{(\alpha l)^{\nu}}{\nu!}\left\|U^{(0)}[\cdot]\right\|_2\le\varepsilon_{\nu}(l)\cdot\frac{(\alpha l)^{\nu}}{\nu!}K_{\nu}(l)\max\left(\|\Phi\|,\|F\|_1\right).$$

(1.13) өрнегінің оң жағына $\lambda=\lambda^{(1)}$-ді қою арқылы $U^{(1)}[t]=(U_1{}^{(1)}(t),U_2{}^{(1)}(t),\ldots,U_{m+1}{}^{(1)}(t))\in C\left([0,T],t_r,\mathbb{R}^{(N-1)(m+1)}\right)$ функциясы анықталады. Алгоритмді $k-$шы қадамға дейін жалғастырсақ, $\left(\lambda^{(k)},U^{(k)}[t]\right)$, $k=0,1,2,\ldots.$ жұбы анықталады:

$$\lambda^{(k)}=(\lambda_1^{(k)},\ldots,\lambda_{m+2}^{(k)})\in\mathbb{R}^{(N-1)(m+2)},$$

$$U^{(k)}[t]=(U_1^{(k)}(t),U_2^{(k)}(t),\ldots,\ U_{m+1}^{(k)}(t))\in C([0,T],t_r,\mathbb{R}^{(N-1)(m+1)}).$$

Параметрдің айырмаларының бағалаулары келесі түрде анықталады:

$$\left\|\lambda^{(k+1)}-\lambda^{(k)}\right\|\le\varepsilon_{\nu}(l)\cdot\left\|G_{\nu r}\left(t_r,U_r^{(k)}-U_r^{(k-1)}\right)\right\|,$$

$$G_{\nu r}\left(t_r,U_r^{(k)}-U_r^{(k-1)}\right)=\int_{t_{r-1}}^{t_r}A(\xi_1)\ldots\int_{t_{r-1}}^{\xi_{\nu-2}}A(\xi_{\nu-1})\int_{t_{r-1}}^{\xi_{\nu-1}}A(\xi_{\nu})\left(U_r^{(k)}(\xi_{\nu})-U_r^{(k-1)}(\xi_{\nu-1})\right)d\xi_{\nu}\ldots d\xi_1.\quad(1.21)$$

Гронуолл-Беллман леммасын қайтадан қолдану арқылы, Коши есептерінің шешімдерінің айырмасы келесідей бағаланады:

$$\left\|U_r^{(k)}(t)-U_r^{(k-1)}(t)\right\|\le(e^{\alpha(t-t_{r-1})}-1)\cdot\left(\lambda_r^{(k)}-\lambda_r^{(k-1)}\right)+e^{\alpha(t-t_{r-1})}\int_{t_{r-1}}^{t_r}\sum_{j=1}^{m}\beta_j d\xi\left\|\lambda_{j+1}^{(k)}-\lambda_{j+1}^{(k-1)}\right\|.\qquad(1.22)$$

(1.22) айырымдар бағалауын (1.21) теңсіздігінің оң жағына қою арқылы, келесі бағалау алынады:

$$\left\|G_{\nu r}\left(t_r, U^{(k)} - U^{(k-1)}\right)\right\|$$

$$\leq \int_{t_{r-1}}^{t_r} \alpha \ldots \int_{t_{r-1}}^{\xi_{\nu-2}} \alpha \int_{t_{r-1}}^{\xi_{\nu-1}} \alpha \left[(e^{\alpha\xi_\nu} - 1) \cdot \left\|\lambda_r^{(k)} - \lambda_r^{(k-1)}\right\| + e^{\alpha(t-t_{r-1})} \cdot \max_{r=1,m+1} \int_{t_{r-1}}^{t_r} \sum_{j=1}^{m} \beta_j d\xi \left\|\lambda_{j+1}^{(k)} - \lambda_{j+1}^{(k-1)}\right\| \right] d\xi_\nu \ldots d\xi_1$$

$$= \left[e^{\alpha l} - 1 - \alpha l - \ldots - \frac{(\alpha l)^\nu}{\nu!} + e^{\alpha l} \sum_{j=1}^{m} \beta_j l - \sum_{j=1}^{m} \beta_j l - \ldots - \sum_{j=1}^{m} \beta_j \frac{(\alpha l)^{\nu-1}}{(\nu-1)!} \right] \left\|\lambda^{(k)} - \lambda^{(k-1)}\right\|,$$

$$\left\|\lambda^{(k+1)} - \lambda^{(k)}\right\| \leq \varepsilon_\nu(l) \cdot \left[e^{\alpha l} - \sum_{j=0}^{\nu} \frac{(\alpha l)^j}{j!} + \sum_{j=1}^{m} \beta_j l \cdot \left(e^{\alpha l} - \sum_{\mu=0}^{\nu-1} \frac{(\alpha l)^\mu}{\mu!} \right) \right] \left\|\lambda^{(k)} - \lambda^{(k-1)}\right\| \tag{1.23}$$

$$= g_\nu(l) \cdot \left\|\lambda^{(k)} - \lambda^{(k-1)}\right\|, \quad k = 1, 2, \ldots$$

$$g_\nu(l) = \varepsilon_\nu(l) \cdot \left[e^{\alpha l} - \sum_{j=0}^{\nu} \frac{(\alpha l)^j}{j!} + \sum_{j=1}^{m} \beta_j l \cdot \left(e^{\alpha l} - \sum_{\mu=0}^{\nu-1} \frac{(\alpha l)^\mu}{\mu!} \right) \right],$$

$$\left\|\lambda^{(k+1)} - \lambda^{(k)}\right\| \leq g_\nu(l) \cdot g_\nu(l) \cdot \left\|\lambda^{(k-1)} - \lambda^{(k-2)}\right\| \leq \ldots \leq g_\nu^k(l) \cdot \left\|\lambda^{(1)} - \lambda^{(0)}\right\|.$$

$\left\{\lambda^{(k)}\right\}$ тізбегінің жинақталатынын көрсетейік. Ол үшін Коши критерийін пайдаланамыз. Яғни, кез-келген $\forall \kappa > 0$ үшін $\exists N$ табылады, барлық $k \geq N$ және $p \geq 0$ үшін $\left\|\lambda^{(k+p)} - \lambda^{(k)}\right\| \leq \kappa$ теңсіздігі орындалатынын көрсету жеткілікті. Үшбұрыш теңсіздігі бойынша

$$\left\|\lambda^{(k+p)} - \lambda^{(k)}\right\| \leq \left\|\lambda^{(k+p)} - \lambda^{(k+p-1)}\right\| + \left\|\lambda^{(k+p-1)} - \lambda^{(k+p-2)}\right\| + \ldots + \left\|\lambda^{(k+1)} - \lambda^{(k)}\right\|$$

$$\leq g_\nu^p(l) \cdot \left\|\lambda^{(k+1)} - \lambda^{(k)}\right\| + g_\nu^{p-1}(l) \cdot \left\|\lambda^{(k+1)} - \lambda^{(k)}\right\| + \ldots + g_\nu(l) \cdot \left\|\lambda^{(k+1)} - \lambda^{(k)}\right\| + \left\|\lambda^{(k+1)} - \lambda^{(k)}\right\|$$

$$= (g_\nu^p(l) + g_\nu^{p-1}(l) + \ldots + g_\nu(l) + 1) \left\|\lambda^{(k+1)} - \lambda^{(k)}\right\| = \frac{1 - \left(g_\nu(l)\right)^{p+1}}{1 - g_\nu(l)} \left\|\lambda^{(k+1)} - \lambda^{(k)}\right\|$$

$$\leq \frac{1}{1 - g_\nu(l)} \left\|\lambda^{(k+1)} - \lambda^{(k)}\right\|,$$

Демек, $\left\|\lambda^{(k+p)} - \lambda^{(k)}\right\| \leq \frac{\left(g_\nu(l)\right)^k}{1 - g_\nu(l)} \left\|\lambda^{(1)} - \lambda^{(0)}\right\| < \kappa$. $g_\nu(l) < 1$ болғандықтан $\left\{\lambda^{(k)}\right\}$ тізбегі λ^* – ге жинақталады, ал $\left\{U^{(k)}[t]\right\}$ функциялар жүйесінің тізбегі Вейерштрасстың мажоранттық белгісі бойынша $C([0,T], t_r, \mathbb{R}^{(N-1)(m+1)})$ кеңістігінде $U^*[t]$-ге бірқалыпты жинақталады және келесі бағалау орындалады:

$$\left\|\lambda^* - \lambda^{(k)}\right\| \le \frac{1}{1-g_\nu(l)}\left\|\lambda^{(k+1)} - \lambda^{(k)}\right\| \le \frac{1}{1-g_\nu(l)} \cdot g_\nu^k(l)\gamma_\nu(l) \cdot \frac{(\alpha l)^\nu}{\nu!} K_\nu(l) \max\left(\|\Phi\|, \|F\|_1\right) l,$$

$$\left\|U_r^{(k)}(t) - U_r^{(k-1)}(t)\right\| \le \left(e^{\alpha l} - 1 + e^{\alpha l}\sum_{j=1}^{m}\beta_j l\right) \cdot \left\|\lambda_r^{(k)} - \lambda_r^{(k-1)}\right\|,$$

$$\left\|U^*[\cdot] - U^{(k)}[\cdot]\right\|_2 \le \left(e^{\alpha l} - 1 + e^{\alpha l}\sum_{j=1}^{m}\beta_j l\right)\frac{1}{1-g_\nu(l)} g_\nu^k(l)\varepsilon_\nu(l)\frac{(\alpha l)^\nu}{\nu!} K_\nu(l)\max\left(\|\Phi\|, \|F\|_1\right), \quad k = 1, 2, \ldots$$

Жоғарыдағы теңсіздіктерден $k = 0$ болғанда келесі бағалау алынады:

$$\left\|\lambda^* - \lambda^{(0)}\right\| \le \frac{1}{1-g_\nu(l)}\varepsilon_\nu(l)\frac{(\alpha l)^\nu}{\nu!} K_\nu(l)\max\left(\|\Phi\|, \|F\|_1\right),$$

$$\begin{aligned}
\left\|U^*\right\|_1 = \left\|\lambda^* + U^*[\cdot]\right\|_2 &\le \left\|\lambda^* - \lambda^{(0)}\right\| + \left\|U^*[\cdot] - U^{(0)}[\cdot]\right\|_2 + \left\|\lambda^{(0)}\right\| + \left\|U^{(0)}[\cdot]\right\|_2 \\
&\le \frac{1}{1-g_\nu(l)}\varepsilon_\nu(l)\frac{(\alpha l)^\nu}{\nu!} K_\nu(l)\max\left(\|\Phi\|, \|F\|_1\right) \\
&\quad + \left(e^{\alpha l} - 1 + e^{\alpha l}\sum_{j=1}^{m}\beta_j l\right)\frac{1}{1-g_\nu(l)}\varepsilon_\nu(l)\frac{(\alpha l)^\nu}{\nu!} K_\nu(l)\max\left(\|\Phi\|, \|F\|_1\right) \\
&\quad + \varepsilon_\nu(l)\max\left(1, \sum_{j=0}^{\nu-1}\frac{(\alpha l)^j}{j!}\right)\max\left(\|\Phi\|, \|F\|_1\right) l + K_\nu(l)\max\left(\|\Phi\|, \|F\|_1\right) = K_\nu(l).
\end{aligned}$$

Жалғыздығы. (1.7), (1.8) есебінің екі $U^*(t)$, $U^{**}(t)$ шешімі бар болсын. Олай болса, $(\lambda^*, U^*[t])$, $(\lambda^{**}, U^{**}[t])$ жұп тізбегі табылады. Онда $\lambda^* = (U^*(t_0), U^*(t_1), \ldots, U^*(t_{m+1}))$, $U^*[t] = (U^*(t) - U^*(t_0), U^*(t) - U^*(t_1), \ldots, U^*(t) - U^*(t_m))$ және $\lambda^{**} = \left(U^{**}(t_0), U^{**}(t_1), \ldots, U^{**}(t_{m+1})\right)$, $U^{**}[t] = (U^{**}(t) - U^{**}(t_0), U^{**}(t) - U^{**}(t_1), \ldots, U^{**}(t) - U^{**}(t_m))$ (1.9) -(1.12) параметрлері бар шеттік есебінің шешімдері болады және (1.13), (1.18)-ді қанағаттандырады. Демек, (1.22), (1.23) бағалауларына сәйкес келесідей бағалаулар анықталады:

$$\left\|U^*[\cdot] - U^{**}[\cdot]\right\|_2 \le \left(e^{\alpha l} - 1 + e^{\alpha l}\sum_{j=1}^{m}\beta_j l\right) \cdot \left\|\lambda^* - \lambda^{**}\right\|,$$

$$\left\|\lambda^* - \lambda^{**}\right\| \le g_\nu(l)\left\|\lambda^* - \lambda^{**}\right\|.$$

$g_\nu(l) < 1$ орындалғандықтан және норманың қасиеті бойынша $\lambda^* = \lambda^{**}$, $\tilde{u}^*[t] = \tilde{u}^{**}[t]$ тең екендігі шығады. Демек $U^*(t) = U^{**}(t)$, $t \in [0, T]$ шешімі жалғыз. Теорема 1.1 дәлелденді [83].

1.3 Жүктелген параболалық теңдеулер үшін бейлокал есепке қолданылған сынықтар әдісінің жинақтылығы, орнықтылығы, қателігі

Бұл бөлімде (1.4)-(1.6) дискреттелген есебінің шешімінің бастапқы (1.1)-(1.3) есебінің шешіміне жинақтылығы орнатылды.

Теорема 1.2 Келесі шарттар орындалсын:

i) $a(t,x) \geq \gamma > 0,\ b(t,x) \leq 0$, $k_j(t,x)$, $j = \overline{0,m}$ және $f(t,x)$ функциялары Ω облысында екі айнымасы бойынша да Гельдер үзіліссіз; $T > 0$ және $\omega > 0$; $t_j \in [0,T],\ j = \overline{0,m}$ - жүктеме нүктелері.

ii) $B(x)$, $C(x)$, $D(x)$, $E(x)$ функциялары $[0,\omega]$-да үзіліссіз. $\varphi(x)$, $\psi_0(t)$ және $\psi_1(t)$ функциялары жеткілікті тегіс.

iii) Теорема 1.1 шарттары орындалсын.

Онда (1.4)-(1.6) дискреттелген есебінің шешімі $\tau \to 0$ кезде $O(\tau^2)$ дәлдік ретпен (1.1)-(1.3) есебі шешіміне ұмтылады.

Дәлелдеуі. $u_i(t)$ - (1.4)-(1.6) дискреттелген есебінің шешімі, ал $u(t,x_i)$ - (1.1)-(1.3) есебінің $x = x_i$ нүктелеріндегі шешімі болсын. Демек, $u(t,x)$ функциясы x_i кезінде келесі қатынасты қанағаттандырады:

$$\frac{\partial u(t,x_i)}{\partial t} = a(t,x_i)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\bigg|_{x=x_i} + b(t,x_i)u(t,x_i) + \sum_{j=0}^{m} k_j(t,x_i)u(t_j,x_i) + f(t,x_i),$$

$$B(x_i)u(0,x_i) + C(x_i)\frac{\partial u(0,x)}{\partial x}\bigg|_{x=x_i} + D(x_i)u(T,x_i) + E(x_i)\frac{\partial u(T,x)}{\partial x}\bigg|_{x=x_i} = \varphi(x_i), \quad i = \overline{1,N-1}.$$

$u(t,x)$ функциясының екінші ретті туындысының x_i нүктесіндегі орталық айырымдық сұлбасы $\left.\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right|_{x=x_i} = \frac{u(t,x_{i+1}) - 2u(t,x_i) + u(t,x_{i-1})}{\tau^2} + O(\tau^2)$, ал бірінші ретті туынды үшін орталық айырымдық сұлбасы $\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=x_i} = \frac{u(t,x_{i+1}) - u(t,x_{i-1})}{2\tau} + O(\tau^2)$ түрінде өрнектеледі [108]. Келтірілген айырымдық сұлбаларға сәйкес келесідей есеп алынады:

$$\frac{\partial u(t,x_i)}{\partial t} = a(t,x_i)\frac{u(t,x_{i+1}) - 2u(t,x_i) + u(t,x_{i-1})}{\tau^2} + b(t,x_i)u(t,x_i) + \sum_{j=0}^{m} k_j(t,x_i)u(t_j,x_i) + f(t,x_i) + O(\tau^2), \tag{1.24}$$

$$B(x_i)u(0,x_i) + C(x_i)\frac{u_{i+1}(0) - u_{i-1}(0)}{2\tau} + D(x_i)u(T,x_i) + E(x_i)\frac{u_{i+1}(T) - u_{i-1}(T)}{2\tau} = \varphi(x_i) + O(\tau^2), \tag{1.25}$$

$$u_0(t) = \psi_0(t), \quad u_N(t) = \psi_1(t), \quad t \in [0,T]. \tag{1.26}$$

(1.4)-(1.6) дискреттелген есебінен сәйкес (1.24)-(1.26) азайту арқылы $\delta_i(t) = u(t,x_i) - u_i(t)$ қателігіне қатысты келесі түрдегі есеп алынады:

$$\frac{\partial \delta_i}{\partial t} = a(t,x_i)\frac{\delta_{i+1} - 2\delta_i + \delta_{i-1}}{\tau^2} + b(t,x_i)\delta_i + \sum_{j=0}^{m} k_j(t,x_i)\delta(t_j) + O(\tau^2), \tag{1.27}$$

$$B(x_i)\delta(0) + C(x_i)\frac{\delta_{i+1}(0) - \delta_{i-1}(0)}{2\tau} + D(x_i)\delta(T) + E(x_i)\frac{\delta_{i+1}(T) - \delta_{i-1}(T)}{2\tau} = O(\tau^2), \; i = \overline{1, N-1}, \tag{1.28}$$

$$\delta_0(t) = 0, \qquad \delta_N(t) = 0, \quad t \in [0,T]. \tag{1.29}$$

(1.27)-(1.29) есебі (1.4)-(1.6) дискреттелген есебінің құрылымдық түрі болып табылады. Яғни, (1.4)-(1.6) дискреттелген есепке қолданылған тәсілді (1.27)-(1.29) қателік теңдеуі үшін шеттік есепке параметрлеу әдісін қолдануға болады. Яғни, теорема 1.1 шарттарын пайдалану нәтижесінде (1.27)-(1.29) есебінің шешімі үшін келесі теңсіздік (есеп берілгендерінің оң жағынан тәуелділігі) орындалады:

$$\max_{t\in[0,T]} \max_{i=1,N-1} |\delta_i(t)| \le K_\nu(l)\cdot O(\tau^2),$$

Теорема 1.2 дәлелденді.

Орнықтылықты зерттеу және қателіктерді талдау

Орнықтылық - есептің бастапқы берілімдері аздап ауытқыған кезде, оның шешімінің де аздап ауытқу қасиеті. Олай болса, (1.4)-(1.6) дискреттелген есебі берілгендерінің ауытқыған мәндерінде шешімі табылды деп қарастырайық. Ауытқыған коэффициенттер мен функцияларды келесідей белгілейік:

$$\tilde{a}_i(t),\ \tilde{b}_i(t),\ \tilde{f}_i(t),\ \tilde{k}_i^j(t),\ \tilde{\varphi}_i,\ \tilde{\psi}_0(t),\ \tilde{\psi}_1(t),\ \tilde{B}_i,\ \tilde{C}_i,\ \tilde{D}_i,\ \tilde{E}_i,$$

мұнда $j = 0,\ldots,m$ дейін өзгереді және i кеңістіктің тор нөмерін білдіреді.

$\tilde{u}_i(t)$ арқылы ауытқыған мәндермен берілген дискреттелген есептің шешімін, $u(t,x_i)$ - (1.1)-(1.3) бастапқы есебінің x_i нүктесіндегі мәнінен құралған шешімін белгілейміз. $\tilde{\delta}_i(t) = u(t,x_i) - \tilde{u}_i(t)$ арқылы (1.1)-(1.3) бастапқы есеп шешімінен ауытқыған мәндермен берілген дискреттелген есептің шешімі арасындағы айырма, яғни қателігі белгіленеді.

Бастапқы есеп берілгендері мен ауытқыған мәндер арасындағы айырмаларды белгілейік. δa шамасы $a(t,x_i)$ функциясы мен оның ауытқыған $\tilde{a}(t,x)$ арасындағы қателікті білдіреді. Қалған белгілеулер де дәл осылай анықталады:

$$\delta a = a(t,x_i) - \tilde{a}_i(t),\ \delta b = b(t,x_i) - \tilde{b}_i(t),\ \delta f = f(t,x_i) - \tilde{f}_i(t),$$

$$\delta k_j = k_j(t,x_i) - \tilde{k}_i^j(t),\ (j = \overline{0,m}),\ \delta\varphi = \varphi(x_i) - \tilde{\varphi}_i,\ \delta\psi_0(t) = \psi_0(t) - \tilde{\psi}_0(t),$$

$$\delta\psi_1(t) = \psi_1(t) - \tilde{\psi}_1(t),\ \delta B = B(x_i) - \tilde{B}_i,\ \delta C = C(x_i) - \tilde{C}_i,$$

$$\delta D = D(x_i) - \tilde{D}_i,\ \delta E = E(x_i) - \tilde{E}_i.$$

Анықтама 1.1 (1.4)-(1.6) дискреттелген есебі (1.1)-(1.3) есебіне орнықты жинақталады деп аталады, егер келесі шарт орындалса

$$\max_{1\le i\le N-1} |\tilde{\delta}_i(t)| \to 0,\ \tau \to 0,$$

$$|\delta a|,|\delta b|,|\delta f|,|\delta k_j|,|\delta\varphi|,|\delta\psi_0|,|\delta\psi_1|,|\delta B|,|\delta C|,|\delta D|,|\delta E| \to 0, \quad j=\overline{0,m}.$$

Теорема 1.3 (1.4)-(1.6) дискреттелген есебі (1.1)-(1.3) есебіне орнықты жинақталады.

Дәлелдеуі. $\tilde{u}_i(t)$ – (1.4)-(1.6) дискреттелген есебінің ауытқыған мәндеріндегі шешімі болсын. Онда $\tilde{u}_i(t)$ үшін келесі есеп алынады:

$$\frac{d\tilde{u}_i}{dt} = \tilde{a}_i(t)\frac{\tilde{u}_{i+1}-2\tilde{u}_i+\tilde{u}_{i-1}}{\tau^2} + \tilde{b}_i(t)\tilde{u}_i + \sum_{j=0}^{m}\tilde{k}_i^j(t)\tilde{u}_i(t_j) + \tilde{f}_i(t), \quad i=\overline{1,N-1}, \tag{1.30}$$

$$\tilde{B}_i\tilde{u}_i(0) + \tilde{C}_i\frac{\tilde{u}_{i+1}(0)-\tilde{u}_{i-1}(0)}{2\tau} + \tilde{D}_i\tilde{u}_i(T) + \tilde{E}_i\frac{\tilde{u}_{i+1}(T)-\tilde{u}_{i-1}(T)}{2\tau} = \tilde{\varphi}_i, \tag{1.31}$$

$$\tilde{u}_0(t) = \tilde{\psi}_0(t), \quad \tilde{u}_N(t) = \tilde{\psi}_1(t), \quad t\in[0,T]. \tag{1.32}$$

Ауытқыған мәндер үшін келесі сәйкестендірулерді пайдаланамыз:

$$\tilde{a}(t,x_i) = \tilde{a}_i(t),\ \tilde{b}(t,x_i) = \tilde{b}_i(t),\ \tilde{k}_j(t,x_i) = \tilde{k}_i^j(t),\ \tilde{f}(t,x_i) = \tilde{f}_i(t),$$

$$\tilde{B}(x_i) = \tilde{B}_i,\ \tilde{C}(x_i) = \tilde{C}_i,\ \tilde{D}(x_i) = \tilde{D}_i,\ \tilde{E}(x_i) = \tilde{E}_i.$$

Жоғарыда келтірілген есеп берілгендері мен ауытқыған мәндер арасындағы айырымдар арқылы (1.1)- (1.3) есебі келесідей жазылады:

$$\frac{\partial u(t,x_i)}{\partial t}=\tilde{a}(t,x_i)\frac{u(t,x_{i+1})-2u(t,x_i)+u(t,x_{i-1})}{\tau^2}+\tilde{b}(t,x_i)u(t,x_i)+\sum_{j=0}^{m}\tilde{k}_j(t,x_i)u(t_j,x_i)$$
$$+\tilde{f}(t,x_i)+\delta a\frac{u(t,x_{i+1})-2u(t,x_i)+u(t,x_{i-1})}{\tau^2}+\delta bu(t,x_i)+\sum_{j=0}^{m}\delta k_j(t,x_i)u(t_j,x_i) \quad (1.33)$$
$$+\delta f(t,x_i)+O(\tau^2),$$

$$\tilde{B}(x_i)u(0,x_i)+\tilde{C}(x_i)\frac{u_{i+1}(0)-u_{i-1}(0)}{2\tau}+\tilde{D}(x_i)u(T,x_i)+\tilde{E}(x_i)\frac{u_{i+1}(T)-u_{i-1}(T)}{2\tau}$$
$$+\delta B(x_i)u(0,x_i)+\delta C(x_i)\frac{u_{i+1}(0)-u_{i-1}(0)}{2\tau}+\delta D(x_i)u(T,x_i) \quad (1.34)$$
$$+\delta E(x_i)\frac{u_{i+1}(T)-u_{i-1}(T)}{2\tau}=\tilde{\varphi}(x_i)+\delta\varphi(x_i)+O(\tau^2),\quad i=\overline{1,N-1},$$

$$u_0(t)=\tilde{\psi}_0(t)+\delta\psi_0(t),\ u_N(t)=\tilde{\psi}_1(t)+\delta\psi_1(t),\quad t\in[0,T]. \quad (1.35)$$

(1.30)-(1.32) сәйкес өрнектерінен (1.33)-(1.35) өрнегін азайтамыз. Нәтижесінде, келесі ауытқыған мәндерге сәйкес қателік есебі алынады:

$$\frac{d\tilde{\delta}_i}{dt}=\tilde{a}_i(t)\frac{\tilde{\delta}_{i+1}-2\tilde{\delta}_i+\tilde{\delta}_{i-1}}{\tau^2}+\tilde{b}_i(t)\tilde{\delta}_i+\sum_{j=0}^{m}\tilde{k}_i^{\,j}(t)\tilde{\delta}_i(t_j)+R_i(t),\quad i=\overline{1,N-1}, \quad (1.36)$$

$$\tilde{B}_i\tilde{\delta}_i(0)+\tilde{C}_i\frac{\tilde{\delta}_{i+1}(0)-\tilde{\delta}_{i-1}(0)}{2\tau}+\tilde{D}_i\tilde{\delta}_i(T)+\tilde{E}_i\frac{\tilde{\delta}_{i+1}(T)-\tilde{\delta}_{i-1}(T)}{2\tau}=P_i, \quad (1.37)$$

$$\tilde{\delta}_0(t)=\delta\psi_0(t),\ \tilde{\delta}_N(t)=\delta\psi_1(t),\quad t\in[0,T]. \quad (1.38)$$

Мұнда

$$R_i(t)=\delta a\frac{u(t,x_{i+1})-2u(t,x_i)+u(t,x_{i-1})}{\tau^2}+\delta bu(t,x_i)+\sum_{j=0}^{m}\delta k_j(t,x_i)u(t_j,x_i)+\delta f(t,x_i)+O(\tau^2),$$

$$P_i = \delta B(x_i)u(0,x_i) + \delta C(x_i)\frac{u_{i+1}(0)-u_{i-1}(0)}{2\tau} + \delta D(x_i)u(T,x_i)$$
$$+ \delta E(x_i)\frac{u_{i+1}(T)-u_{i-1}(T)}{2\tau} + \delta\varphi(x_i) + O(\tau^2).$$

Ары қарай (1.36)-(1.38) есебін матрицалық-векторлық түрде жазсақ (1.7), (1.8) есебіне ұқсас түрге келтіріледі. (1.7), (1.8) жүктелген дифференциалдық теңдеулер жүйесіне қолданылған параметрлеу әдісін (1.36)-(1.38) есебіне пайдаланып, келесі бағалау алынады:

$$\max_{t\in[0,T]}\max_{1\le i\le N-1}|\tilde{\delta}_i^*(t)| = \left\|\tilde{\delta}^*\right\|_1 \le K_\nu(l)\max\left(\left\|R\right\|_1, \left\|P\right\|\right), \qquad (1.39)$$

$$R(t) = \begin{pmatrix} \frac{\tilde{a}_1(t)\delta\psi_0(t)}{\tau^2} + R_1(t) \\ R_2(t) \\ \vdots \\ R_{N-2}(t) \\ \frac{\tilde{a}_{N-1}(t)\delta\psi_1(t)}{\tau^2} + R_{N-1}(t) \end{pmatrix}, \quad P = \begin{pmatrix} P_1 + \frac{\tilde{C}_1\delta\psi_0(0) + \tilde{E}_1\delta\psi_0(T)}{2\tau} \\ P_2 \\ \vdots \\ P_{N-2} \\ P_{N-1} - \frac{C_{N-1}\delta\psi_1(0) + E_{N-1}\delta\psi_1(T)}{2\tau} \end{pmatrix},$$

$$\left\|R\right\|_1 = \max_{t\in[0,T]}\left\|R(t)\right\| \le \left(\max_{t\in[0,T]}\max_{i=1,N-1}\frac{1}{\tau^2}|\tilde{a}_i(t)| + 1\right)\cdot\max\left(\max_{t\in[0,T]}(|\delta\psi_0(t)|, |\delta\psi_1(t)|\right), \max_{t\in[0,T]}\max_{i=1,N-1}|R_i(t)|,$$

$$\left\|P\right\| \le \max_{i=1,N-1}|P_i| + \frac{|\tilde{C}_1| + |\tilde{E}_1|}{2\tau}\max_{t\in[0,T]}|\delta\psi_0(t)| + \frac{|\tilde{C}_{N-1}| + |\tilde{E}_{N-1}|}{2\tau}\max_{t\in[0,T]}|\delta\psi_1(t)|.$$

Анықтама 1.1 бойынша және (1.39) бағалауын пайдалану нәтижесінде $\tau\to 0$ кезінде $\max\limits_{1\le i\le N-1}|\tilde{\delta}_i(t)|\to 0$ болады. Теорема 1.3 дәлелденді.

Лемма 1.1. Δ жалпы қателік ретінде екі компоненттің қосындысы $\Delta = \delta_i(t) + \tilde{\delta}_i(t)$ ретінде белгілейміз, мұнда $\delta_i(t)$ - дискреттелген есеп қателігі, ал $\tilde{\delta}_i(t)$ - есеп берілгендерінің ауытқыған мәндері кезіндегі қателік.

Бірінші қателік кеңістіктік туындыларының айырымдық сұлбамен ауыстырғанда туындайды, ал соңғы қателік есеп берілгендеріндегі

коэффициенттер, шекаралық мәндердегі, бастапқы шарттардағы ауытқыған мәндерінен туындайды.

Тор аралығын $\tau \to 0$ болғанда, дискреттелген есептің шешімі $O(\tau^2)$ қателігімен дәл шешімге жақындайды. Бұл сыныктар әдісінің кеңістікте екінші ретті дәлдікке ие екенін растайды.

Әдістің тұрақтылығы есеп берілгендерінің кішкене ауытқыған кезінде шешімге және сандық шешімін табуда үлкен ауытқулар тудырмауын қамтамасыз етеді. Жалпы қателік Δ бағалауы $|\Delta| \le O(\tau^2)$ қанағаттандырады.

1.4 Джумабаев параметрлеу әдісінің алгоритміне негізделген сандық мысалдар

Бұл бөлімде жүктелген параболалық теңдеулерді үшін бейлокал есептерді шешу үшін ұсынылған әдістің тиімділігін, дәлдігін және практикалық маңыздылығын көрсету үшін бірнеше мысалдар келтірілді. Сандық тәжірибелер сандық есептеулер үшін ыңғайлы Mathcad, MatLab көмегімен жүргізілді [84].

Мысал 1.1 $(t,x) \in \overline{\Omega} = [0;0.6] \times [0;0.6]$ тіктөртбұрышында жүктелген параболалық теңдеу үшін бейлокал есепті қарастырайық:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -xt^4 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - u(t,x) + (t-4)u(0;x) + xu(0.2;x) + xtu(0.4,x) + 2tx^2 - 5x + x^2 - 5tx, \quad (t,x) \in \Omega, \tag{1.40}$$

$$u(0,x) + \left(\frac{3}{5} - x\right)\frac{\partial u(0;x)}{\partial x} + \frac{5}{9}u(0.6;x) - x\frac{\partial u(0.6;x)}{\partial x} = \frac{4x}{3}, \quad x \in [0;0.6], \tag{1.41}$$

$$u(t;0) = 0, \quad u(t;0.6) = -3t, \quad t \in [0;0.6]. \tag{1.42}$$

Берілген (1.40)-(1.42) есебінің аналитикалық шешімі: $u(t,x) = -5xt$. Сыныктар әдісіне сәйкес, x кеңістіктік айнымалысы $x_i = 0.2i$, $i = 0,1,2,3$ тор нүктелерінде бөлінді. Демек, $u_i(t) = u(t,0.2i)$, $i = 0,1,2,3$ арқылы анықталды. Нәтижесінде алынған дискреттелген есеп матрицалық-векторлық түрде келесідей жазылады:

$$\frac{dU}{dt} = A(t)U(t) + M_0(t)U(0) + M_1(t)U(0.2) + M_2(t)U(0.4) + F(t), \quad t \in [0;0.6], \quad (1.43)$$

$$BU(0) + CU(0.6) = \Phi, \quad U \in R^2, \quad \Phi \in R^2, \quad (1.44)$$

мұнда,

$$A(t) = \frac{1}{25}\begin{pmatrix} 2t-25 & -t \\ -16t & 32t-25 \end{pmatrix}, \qquad F(t) = -\frac{1}{25}\begin{pmatrix} 23t+24 \\ 42t-48t^2+46 \end{pmatrix},$$

$$M_0(t) = \begin{pmatrix} t-4 & 0 \\ 0 & t-4 \end{pmatrix}, \qquad M_1(t) = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \qquad M_2(t) = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} t & 0 \\ 0 & 2t \end{pmatrix},$$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -0.5 & 1 \end{pmatrix}, \qquad C = \frac{1}{18}\begin{pmatrix} 10 & -9 \\ 18 & 10 \end{pmatrix}, \qquad \Phi = \frac{1}{15}\begin{pmatrix} 4 \\ -19 \end{pmatrix}, \qquad U(t) = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}.$$

Яғни, (1.43), (1.44) есебінің аналитикалық шешімі $U_{анал.ш}(t) = \begin{pmatrix} -t \\ -2t \end{pmatrix}$.

Ары қарай, (1.43), (1.44) есебін шешу үшін Джумабаев параметрлеу әдісі қолданылады. Әдіс бойынша, $[0;0.6]$ аралығы $t_0 = 0$, $t_1 = 0.2$, $t_2 = 0.4$ жүктеме нүктелерінде ішкі аралықтарға бөлінеді. Бөлім 1.2-ге сәйкес, $\nu = 1$ кезінде келесі матрицалардың мәндері табылды:

$$D_{11}(0.2) = -\frac{1}{1250}\begin{pmatrix} 248 & 1 \\ 16 & 218 \end{pmatrix}, \quad D_{12}(0.4) = -\frac{1}{1250}\begin{pmatrix} 244 & 3 \\ 48 & 154 \end{pmatrix}, \quad D_{13}(0.6) = -\frac{1}{250}\begin{pmatrix} 48 & 1 \\ 16 & 18 \end{pmatrix},$$

$$H_{11}(0.2;M_0) = -\frac{39}{50}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad H_{12}(0.4;M_0) = -\frac{37}{50}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad H_{13}(0.6;M_0) = -\frac{7}{10}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$H_{11}(0.2;M_2) = \frac{1}{250}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad H_{12}(0.4;M_2) = \frac{3}{250}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad H_{13}(0.6;M_2) = \frac{1}{50}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Сәйкес $Q_1(0.2):\mathbb{R}^8\to\mathbb{R}^8$ матрицасы құрылды:

$$Q_1(0.2)=\begin{pmatrix} 0.2 & 0.2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.1111 & -0.1 \\ -0.1 & 0.2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.2 & 0.1111 \\ 0.0216 & -0.0008 & -0.96 & 0 & 0.004 & 0 & 0 & 0 \\ -0.0128 & 0.0456 & 0 & -0.92 & 0 & 0.008 & 0 & 0 \\ -0.74 & 0 & 0.8448 & -0.0024 & -0.988 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -0.74 & -0.0384 & 0.9568 & 0 & -0.976 & 0 & 0 \\ -0.7 & 0 & 0.04 & 0 & 0.828 & -0.004 & -1 & 0 \\ 0 & -0.7 & 0 & 0.08 & -0.064 & 0.968 & 0 & -1 \end{pmatrix},$$

$$\left[Q_1(0.2)\right]^{-1}=\begin{pmatrix} 0.884 & -2.669 & -0.303 & -0.431 & -0.341 & -0.383 & 0.436 & -0.385 \\ 6.857 & 0.993 & 0.807 & -0.655 & 0.845 & -0.58 & 0.96 & -0.575 \\ 0.011 & -0.053 & -1.052 & -7.83\times10^{-3} & -0.012 & -6.972\times10^{-3} & -9.274\times10^{-3} & -7.003\times10^{-3} \\ 0.285 & 0.081 & 0.04 & -1.119 & 0.041 & -0.029 & 0.048 & -0.02 \\ -0.653 & 1.953 & -0.673 & 0.319 & -0.767 & 0.281 & 0.318 & 0.282 \\ -4.92 & -0.672 & -0.532 & -0.599 & -0.6 & -0.613 & -0.681 & 0.417 \\ -1.139 & 3.486 & -0.385 & 0.568 & -0.394 & 0.503 & -0.429 & 0.501 \\ -9.498 & -1.464 & -1.034 & -0.231 & -1.12 & -0.207 & -1.348 & -0.213 \end{pmatrix}.$$

$Q_1(0.2)$ кері матрицасының мәні есептелді және Теорема 1.1 шарттары тексерілді. Яғни,

$$\alpha=0.976,\quad \beta_1=3.4,\quad \beta_2=0.4,\quad \beta_3=0.24,\quad l=0.2:$$

$$\left\|[Q_1(0.2)]^{-1}\right\|\le 8.185,$$

$$g_1(0.2)=8.185\cdot\left[e^{0.195}-1-0.195+(0.68+0.08+0.048)\cdot(e^{0.195}-1)\right]=1.592.$$

$\nu=1$ кезінде теорема 1.1 екінші шарты орындалмайды, демек $\nu=2$ арқылы интегралдардың санын көбейтеміз. Нәтижесінде келесі теңсіздіктер алынды:

$$\left\|[Q_2(0.2)]^{-1}\right\| \le 8.458,$$

$$g_2(0.2) = 8.458 \cdot \left[e^{0.195} - 1 - 0.195 - 0.019 + (0.68 + 0.08 + 0.048) \cdot (e^{0.195} - 1 - 0.195)\right] = 0.15 < 1.$$

$\nu = 2$ кезінде, теорема 1.1 шарттарының орындалғандықтан (1.43), (1.44) есебінің шешімі бар. Ары қарай, Бөлім 1.2 ұсынылған алгоритм бойынша (1.43), (1.44) жуық шешімін табу үшін қадамдық алгоритм қолданылды. Алгоритмнің бірнеше қадамдарының нәтижелері Кесте 1-де көрсетілді, мұнда $\xi_j = 0.0125j$, $j = \overline{0,48}$.

Кесте 1. (1.43), (1.44) есебінің аналитикалық және сандық шешімдері арасындағы максималды абсолютті қателік

Қадам	$\max\limits_{j=0,48}\left\|U_{анал.ш}(\xi_j) - U_{сан.ш}(\xi_j)\right\|$
Қадам 0	4.49×10^{-3}
Қадам 1	2.97×10^{-5}
Қадам 2	2.08×10^{-7}
Қадам 3	1.42×10^{-8}

Кесте 1 көрсетілгендей, алгоритмнің үшінші қадамында (1.43), (1.44) есебінің сандық және аналитикалық шешімдері арасындағы қателіктің жақсарғанын көреміз. Бұл қажетті дәлдік деңгейіне қол жеткізілгенін және есептеу процесін осы кезеңде тоқтатуға болатындығын көрсетеді. $u_{сан.ш}(\xi_j, 0.2s) = U_{s;сан.ш}(\xi_j)$, $s = 1,2$, $j = 0,\ldots,48$, $\xi_j = 0.0125j$, арқылы (1.40)-(1.42) жүктелген параболалық теңдеу үшін бейлокал есептің шешіміне сандық шешімін аламыз. (1.40)-(1.42) есебі үшін аналитикалық шешім мен сандық шешім арасындағы қателік Кесте 2-де көрсетілді.

Кесте 2. (1.40)-(1.42) есебінің аналитикалық және сандық шешім арасындағы абсолют қателік

t	$\lvert u_{анал.ш}(t,\tau) - u_{сан.ш}(t,\tau)\rvert$	$\lvert u_{анал.ш}(t,2\tau) - u_{сан.ш}(t,2\tau)\rvert$	t	$\lvert u_{анал.ш}(t,\tau) - u_{сан.ш}(t,\tau)\rvert$	$\lvert u_{анал.ш}(t,2\tau) - u_{сан.ш}(t,2\tau)\rvert$

0	1.01×10^{-8}	6.34×10^{-9}	0.3	2.83×10^{-9}	7.69×10^{-9}
0.0125	9.45×10^{-9}	6.01×10^{-9}	0.3125	3.26×10^{-9}	7.42×10^{-9}
0.025	8.84×10^{-9}	5.67×10^{-9}	0.325	3.69×10^{-9}	7.16×10^{-9}
0.0375	8.23×10^{-9}	5.33×10^{-9}	0.3375	4.11×10^{-9}	6.90×10^{-9}
0.05	7.64×10^{-9}	5.01×10^{-9}	0.35	4.52×10^{-9}	6.65×10^{-9}
0.0625	7.05×10^{-9}	4.69×10^{-9}	0.3625	4.93×10^{-9}	6.41×10^{-9}
0.075	6.47×10^{-9}	4.38×10^{-9}	0.375	5.33×10^{-9}	6.17×10^{-9}
0.0875	5.90×10^{-9}	4.07×10^{-9}	0.3875	5.72×10^{-9}	5.94×10^{-9}
0.1	5.34×10^{-9}	3.78×10^{-9}	0.4	6.38×10^{-9}	5.71×10^{-9}
0.1125	4.79×10^{-9}	3.48×10^{-9}	0.4125	6.76×10^{-9}	1.42×10^{-8}
0.125	4.24×10^{-9}	3.19×10^{-9}	0.425	7.14×10^{-9}	1.39×10^{-8}
0.1375	3.71×10^{-9}	2.91×10^{-9}	0.4375	7.51×10^{-9}	1.37×10^{-8}
0.15	3.18×10^{-9}	2.63×10^{-9}	0.45	7.87×10^{-9}	1.34×10^{-8}
0.1625	2.66×10^{-9}	2.36×10^{-9}	0.4625	8.23×10^{-9}	1.32×10^{-8}
0.175	2.14×10^{-9}	2.09×10^{-9}	0.475	8.58×10^{-9}	1.29×10^{-8}
0.1875	1.64×10^{-9}	1.83×10^{-9}	0.4875	8.93×10^{-9}	1.27×10^{-8}
0.2	1.14×10^{-9}	1.57×10^{-9}	0.5	9.27×10^{-9}	1.25×10^{-8}
0.2125	3.81×10^{-10}	9.78×10^{-9}	0.5125	9.60×10^{-9}	1.23×10^{-8}
0.225	1.00×10^{-10}	9.46×10^{-9}	0.525	9.93×10^{-9}	1.21×10^{-8}
0.2375	5.73×10^{-10}	9.15×10^{-9}	0.5375	1.02×10^{-8}	1.19×10^{-8}
0.25	1.03×10^{-9}	8.85×10^{-9}	0.55	1.05×10^{-8}	1.17×10^{-8}
0.2625	1.49×10^{-9}	9.78×10^{-9}	0.5625	1.09×10^{-8}	1.15×10^{-8}
0.275	1.95×10^{-9}	9.46×10^{-9}	0.575	1.12×10^{-8}	1.13×10^{-8}
0.2875	2.39×10^{-9}	9.15×10^{-9}	0.5875	1.15×10^{-8}	1.12×10^{-8}
0.3	2.83×10^{-9}	8.85×10^{-9}	0.6	1.18×10^{-8}	1.10×10^{-8}

Мысал 1.2 $\overline{\Omega}=[0,0.25]\times[0,0.5]$ тіктөртбұрышында (1.1)-(1.3) есебіне сәйкес есеп қарастырылды. Берілгендері:

$$a(t,x)=x^3t^5,\ \ b(t,x)=-t\ ,\ k_1(t,x)=-5\ ,\ k_2(t,x)=-2x\ ,\ k_3(t,x)=t\ ,\ k_4(t,x)=1\ ,$$

$$t_1=0.05\ ,\quad t_2=0.1\ ,\quad t_3=0.15\ ,\quad t_4=0.2\ ,$$

$$f(t,x)=x^2(20tx-40t^4x^3-3t+4x+21)\ ,\ B(x)=5\ ,\ C(x)=8\ ,\ D(x)=2x-1\ ,\ E(x)=2x\ ,$$

$$\varphi(x)=5x^2(2x+3)\ ,\ \ \psi_0(t)=0\ ,\ \ \psi_1(t)=5t\ .$$

Қарастырылып отырған есептің аналитикалық шешімі $u_{анал.ш}(t,x)=20tx^2$. Сыныктар әдісі бойынша $N=5$, $\tau=0.1$ деп алынды. Әдіс негізінде келесідей жүктелген дифференциалдық теңдеулер үшін екі нүктелі шеттік есеп алынды:

$$\frac{dU}{\partial t}=\frac{1}{1000}\begin{pmatrix}-2t^3-100 & t^3 & 0 & 0\\ 32t^3 & -64t^3-200 & 32t^3 & 0\\ 0 & 243t^3 & -486t^3-300 & 243t^3\\ 0 & 0 & 1024t^3 & -2048t^3-400\end{pmatrix}U(t)$$
$$-5\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}U(0.05)-\frac{1}{5}\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&2&0&0\\0&0&3&0\\0&0&0&4\end{pmatrix}U(0.1)+\begin{pmatrix}t&0&0&0\\0&t&0&0\\0&0&t&0\\0&0&0&t\end{pmatrix}U(0.15) \qquad (1.45)$$
$$+\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}U(0.2)+\frac{1}{2500}\begin{pmatrix}535-25t-t^4\\100t-32t^4+2180\\675t-243t^4+4995\\11776t^4+2000t+9040\end{pmatrix},\quad U\in R^4,$$

$$5\begin{pmatrix}1&8&0&0\\-8&1&8&0\\0&-8&1&8\\0&0&-8&1\end{pmatrix}U(0)+\begin{pmatrix}-0.8&1&0&0\\-2&-0.6&2&0\\0&-3&-0.4&3\\0&0&-4&-0.2\end{pmatrix}U(0.25)=\frac{1}{50}\begin{pmatrix}8\\34\\81\\-98\end{pmatrix}. \qquad (1.46)$$

(1.45)-(1.46) есебінің аналитикалық шешімі $U_{анал.ш}(t)=\begin{pmatrix}u_{анал.ш}(t,0.1)\\u_{анал.ш}(t,0.2)\\u_{анал.ш}(t,0.3)\\u_{анал.ш}(t,0.4)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0.2t\\0.8t\\1.8t\\3.2t\end{pmatrix}$.

(1.45), (1.46) есебін шешу үшін Джумабаев параметрлеу әдісі қолданылды. Яғни, $[0;0.25]$ аралығы $t_1=0.05$, $t_2=0.1$, $t_3=0.15$, $t_4=0.2$ жүктеме нүктелер арқылы бөлінді және (1.45)-(1.46) есебі үшін $Q_1(0.05):\mathbb{R}^{20}\to\mathbb{R}^{20}$ матрицасы құрылды. $\beta_1=5$, $\beta_2=0.8$, $\beta_3=0.25$, $\beta_4=1$, $l=0.05$ мәндерін пайдалана отырып, келесі мәндер есептелінді:

$$\left\|[Q_1(0.05)]^{-1}\right\|\le 4.742,\quad g_1(0.05)=0.039<1.$$

Теорема 1.1 сәйкес, бұл бағалаулар (1.45)-(1.46) теңдеулерімен сипатталатын жүктелген дифференциалдық теңдеу үшін екі нүктелі шеттік есебінің шешімінің бар болуын және жалғыздығын қамтамасыз етеді. Жоғарыда ұсынылған алгоритмді қолданып, (1.45)-(1.46) есебінің сандық жуық шешімі алынды. Алгоритмнің бірнеше қадамы үшін алынған нәтижелер Кесте 3 көрсетілді, мұнда $\xi_j = 0.00625\, j$, $j = \overline{0,40}$.

Кесте 3. (1.45), (1.46) есебінің аналитикалық және сандық шешімдері арасындағы максималды абсолютті қателік

Қадам	$\max\limits_{j=\overline{0,40}} \left\| U_{анал.ш}(\xi_j) - U_{с.ш}(\xi_j) \right\|$
Қадам 0	5.58×10^{-3}
Қадам 1	4.76×10^{-6}
Қадам 2	1.11×10^{-9}
Қадам 3	1.68×10^{-10}
Қадам 4	1.65×10^{-10}

Кесте 3 көрсетілгендей, алгоритмнің екінші қадамында (1.45), (1.46) есебінің аналитикалық және сандық шешімдерінің арасындағы қателік жақсарды. Аналитикалық және сандық шешім арасындағы абсолюттік қателігі:

$$\max_{j=\overline{0,40}, i=\overline{1,4}} \left\| u_{анал.ш}(\xi_j, x_i) - u_{сан.ш}(\xi_j, x_i) \right\| < 0.00000000016.$$

Мұнда, $x_i = 0.1i$, $i = \overline{1,4}$.

Мысал 1.3. Жүктелген параболалық теңдеу үшін бейлокал есепті қарастырайық:

$$\frac{\partial u}{\partial t}=0.001\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-xtu(t,x)+u(0.1,x)+u(0.2,x)+u(0.3,x)+u(0.4,x)+\frac{3\left(e^x+x^4\right)}{20}$$
$$+\frac{191t\left(e^x+x^4\right)}{100}+\frac{x\left(e^x+x^4\right)}{25}+t^3x\left(e^x+x^4\right)-t^2\left(0.012x^2-0.001e^x\right),\quad (t,x)\in\Omega, \tag{1.47}$$

$$-30u(0,x)+20\frac{\partial u(0,x)}{\partial x}-20u(0.5,x)+30x\frac{\partial u(0.5,x)}{\partial x}=25x^4-5e^x+\frac{15xe^x}{2},\quad x\in[0;0.25], \tag{1.48}$$

$$u(t,0)=t^2,\quad u(t,0.25)=t^2\left(e^{\frac{1}{4}}+\frac{1}{256}\right),\quad t\in[0;0.5]. \tag{1.49}$$

(1.47)-(1.49) есебінің аналитикалық шешімі $u(t,x)=t^2\left(e^x+x^4\right)$. Кеңістік айнымалысы бойынша тор енгіземіз $(N=4)$ және қадам $\tau=0.0625$. Сонда (1.47)-(1.49) есебі жүктелген дифференциалдық теңдеулер үшін екі нүктелі шеттік есепке келтірілді. $u_{анал.ш}(t)$ функциясы (1.47)-(1,49) есебінің аналитикалық шешімнің $x\in\left\{\frac{1}{16},\frac{1}{8},\frac{3}{16}\right\}$ нүктелеріндегі мәндеріне сәйкес келеді, яғни

$$U_{анал.ш}(t)=\left(t^2\left(e^{1/16}+\frac{1}{65536}\right),t^2\left(e^{2/8}+\frac{1}{4096}\right),t^2\left(e^{3/16}+\frac{81}{65536}\right)\right)^{\mathrm{T}}.$$

Бөлім 1.2 сипатталған тәсілге сүйене отырып, Джумабаев параметрлеу әдісі қолданылды. $[0;0.5]$ аралығы жүктеме нүктелері бойынша бөлінді. Теорема 1.1 шарттарына сәйкес $\alpha=1.0865$, $\beta_1=1$, $\beta_2=0.1875$, $\beta_3=0.5$, $\beta_4=1$ мәндері есептелінді. Теорема 1.1 шарттарына сәйкес, $Q_1(0.1):\mathbb{R}^{18}\to\mathbb{R}^{18}$ матрицасы үшін $\left\|\left[Q_1(0.1)\right]^{-1}\right\|\le 4.28221$, $g_1(0.1)=0.1583<1$ шарттары тексерілді. Сандық шешім $\xi_j=0.0125j$, $j=\overline{0,40}$ уақыт нүктелерінде орындалды. Аналитикалық және сандық шешім арасындағы абсолюттік қателігі $\max\limits_{j=\overline{0,40},i=\overline{1,3}}\left\|u_{анал.ш}(\xi_j,x_i)-u_{сан.ш}(\xi_j,x_i)\right\|<0.00006059.$ Мұнда, $x_i=0.0625i$, $i=\overline{1,3}$. Бұл алынған дәлдіктің практикалық есептер үшін қанағаттанарлық екенін және ұсынылған әдістің тиімділігін растайды.

1.5 Жүктелген параболалық теңдеулер үшін бастапқы-шеттік есептің қойылымы және сыныктар әдісі

$\bar{\Omega} = [0,T]\times[0,\omega]$ тіктөртбұрышында жүктелген параболалық теңдеу үшін бастапқы-шеттік есеп қарастырылады:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a(t,x)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + b(t,x)u(t,x) + \sum_{j=1}^{m+1} k_j(t,x)u(t_j,x) + f(t,x), \quad (t,x)\in\Omega, \qquad (1.50)$$

$$u(0,x) = \varphi(x), \qquad x\in[0,\omega], \qquad (1.51)$$

$$u(t,0) = \psi_0(t), \qquad u(t,\omega) = \psi_1(t), \qquad t\in[0,T]. \qquad (1.52)$$

(1.50)-(1.52) есебіне берілген коэффициенттер мен шекаралық функцияларға қатысты келесі болжамдар жасаймыз. $a(t,x)\geq\gamma>0$, $b(t,x)\leq 0$, $k_j(t,x)$, $j=\overline{1,m+1}$ және $f(t,x)$ Ω тіктөртбұрышында екі айнымалысы бойынша да Гельдер үзіліссіз функциялар; $T>0$ және $\omega>0$; $t_j\in[0,T]$, $j=\overline{0,m}$, t_j - жүктеме нүктелері. Ал, $\varphi(x)$, $\psi_0(t)$ және $\psi_1(t)$ функциялары жеткілікті тегіс және $\psi_0(0)=\varphi(0)$, $\psi_1(0)=\varphi(\omega)$ үйлесімділік шартын қанағаттандырады.

Қойылған (1.50)-(1.52) есебінің шешімі деп $\bar{\Omega} = [0,T]\times[0,\omega]$ тіктөртбұрышында t айнымалысы бойынша бірінші ретті, ал x айнымалысы бойынша екінші ретті үзіліссіз дифференциалданатын және (1.50) жүктелген параболалық теңдеуді, (1.51), (1.52) шеттік шарттарды қанағаттандыратын $u(t,x)\in C^{1,2}\left(\bar{\Omega}\right)$ функциясын айтамыз.

Сыныктар әдісі бойынша кез-келген $\forall\tau>0$ үшін кеңістік x айнымалысын $x_i = i\tau$, $i=\overline{0,N}$, $N\tau=\omega$ көмегімен дискреттеу жүргізілді. Келесі белгілеулер енгізіледі:

$$u_i(t) := u(t,i\tau),\ a_i(t) := a(t,i\tau),\ b_i(t) := b(t,i\tau),\ k_j^i(t) := k_j(t,i\tau),\ j=\overline{1,m+1},$$

$$f_i(t) := f(t,i\tau),\ \varphi_i := \varphi(i\tau),\ i=\overline{1,N}.$$

Осы белгілеулерді пайдалана отырып, (1.50)-(1.52) есебі келесі түрдегі дискреттелген есепке келтіріледі:

$$\frac{du_i}{dt} = a_i(t)\frac{u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}}{\tau^2} + b_i(t)u_i + \sum_{j=1}^{m+1} k_j^i(t)u_i(t_j) + f_i(t), \quad i = \overline{1, N-1}, \quad (1.53)$$

$$u_i(0) = \varphi_i, \qquad i = \overline{1, N-1}, \quad (1.54)$$

$$u_0(0) = \psi_0, \quad u_N(0) = \psi_N, \quad t \in [0, T]. \quad (1.55)$$

(1.53)-(1.55) дискреттелген есебінің шешімі деп (1.53) дискреттелген жүйені және (1.54), (1.44) шарттарды қанағаттандыратын, әрі $[0,T]$ аралығында үзіліссіз дифференциалданатын $\{u_1(t), u_2(t), \ldots, u_{N-1}(t)\}$ шешімдер жүйесін айтамыз [100].

1.6 Жүктелген параболалық теңдеулер үшін қойылған бастапқы-шеттік есебінің бірмәнді шешілімділігі

(1.53) жүйесінің әрбір i-ші теңдеуінің оң жағындағы u_{i+1} және u_{i-1} функцияларын байланыстыра отырып, [75] жұмысындағы бағалауды қолданамыз:

$$\|u_i\| = \max_{t\in[0,T]}\{|u_i(t)|\} \le \max\left\{|\varphi_i|, \frac{1}{2}\left\|\frac{u_{i-1}(t)}{1+\frac{|b_i(t)|\tau^2}{2a_i(t)}}\right\| + \frac{1}{2}\left\|\frac{u_{i+1}(t)}{1+\frac{|b_i(t)|\tau^2}{2a_i(t)}}\right\|\right.$$
$$\left. + \frac{1}{2}\left\|\frac{f_i(t)}{a_i(t)\left[1+\frac{|q_i(t)|\tau^2}{2p_i(t)}\right]}\right\|\tau^2 + \frac{1}{2}\left\|\frac{\sum_{j=1}^{m+1} k_j^i(t)u_i(\xi_j)}{a_i(t)\left[1+\frac{|b_i(t)|\tau^2}{2a_i(t)}\right]}\right\|\tau^2\right\}$$
$$\le \max\left\{|\varphi_i|, \frac{1}{2}\|u_{i-1}\| + \frac{1}{2}\|u_{i+1}\| + \frac{1}{2}\max_{t\in[0,T]}\left\|\frac{f_i(t)}{a_i(t)}\right\|\tau^2 + \frac{1}{2}\max_{t\in[0,T]}\left\|\frac{\sum_{j=1}^{m+1} k_j^i(t)u_i(t_j)}{a_i(t)}\right\|\tau^2\right\}.$$

$\|u_i\| \le \eta_i$ үшін келесі теңсіздік алынады:

$$\eta_i \le \frac{1}{2}\eta_{i-1} + \frac{1}{2}\eta_{i+1} + \frac{1}{2}\max_{t\in[0,T]}\left\|\frac{f_i(t)}{a_i(t)}\right\|\tau^2 + \frac{1}{2}\max_{t\in[0,T]}\sum_{j=1}^{m+1}\left\|\frac{k_j^i(t)}{a_i(t)}\right\|\cdot\|u_i\|\tau^2, \qquad i=\overline{1,N-1}, \tag{1.56}$$

Мұнда $\eta_i = \max\left\{\hat{\varphi}, \|u_i\|\right\}$, $\hat{\varphi} = \max\limits_{i=1,N}\{|\varphi_i|\}$.

[75], [76] жұмыстарына сүйене отырып, (1.56) теңсіздігі үшін қуалау әдісін қолданамыз. Ыңғайлылық үшін $\max\limits_{t\in[0,T]}\left\|\frac{f_i(t)}{a_i(t)}\right\| + \max\limits_{t\in[0,T]}\left\|\frac{\sum\limits_{j=1}^{m+1}k_j^i(t)u_i(t_j)}{a_i(t)}\right\|\tau^2 \le \Theta_i$ белгілеуін енгіземіз. Демек,

$$\eta_i = \frac{1}{2}\eta_{i-1} + \frac{1}{2}\eta_{i+1} + \frac{1}{2}\Theta_i, \qquad i=\overline{1,N-1}.$$

[107] жұмысындағы қуалау әдісінің $\eta_0 = L_{1/2}\eta_1 + M_{1/2}$, $L_{1/2}=0$, $M_{1/2}=\psi_0$ белгілеулерін қолданамыз. Келесі η_1 қадам алгоритмдері төмендегідей анықталады:

$$\eta_1 \le \frac{1}{2}\eta_0 + \frac{1}{2}\eta_2 + \Theta_1,$$

$$\eta_1 \le \frac{1}{2}(L_{1/2}\eta_1 + M_{1/2}) + \frac{1}{2}\eta_2 + \Theta_1,$$

$$\eta_1 \le \frac{1}{2(1-\frac{1}{2}L_{1/2})}\eta_2 + \frac{1}{2(1-\frac{1}{2}L_{1/2})}M_{\frac{1}{2}} + \frac{\Theta_1}{2(1-\frac{1}{2}L_{1/2})},$$

$\eta_1 = L_{3/2}\eta_2 + M_{3/2}$ бойынша келесі мәндер алынады:

$$L_{3/2}=\frac{1}{2(1-\frac{1}{2}L_{1/2})}=\frac{1}{2},\qquad M_{3/2}=\frac{1}{2(1-\frac{1}{2}L_{1/2})}M_{1/2}+\frac{\Theta_1}{1-L_{1/2}}=\frac{1}{2}\left(\psi_0+\Theta_1\right),$$

Ары қарай осы үрдісті пайдаланып, η_2 үшін бағалау аламыз:

$$\eta_2\le\frac{1}{2}\eta_1+\frac{1}{2}\eta_3+\frac{1}{2}\Theta_2\le\frac{1}{2}\left(L_{3/2}\eta_2+M_{3/2}\right)+\frac{1}{2}\eta_3+\frac{1}{2}\Theta_2,$$

$$\eta_2=\frac{1}{2\left(1-\frac{1}{2}L_{3/2}\right)}\eta_3+\frac{1}{2\left(1-\frac{1}{2}L_{3/2}\right)}\left(M_{3/2}+\Theta_2\right),$$

$\eta_2=L_{5/2}\eta_3+M_{5/2}$ мәні үшін $L_{5/2}=\frac{2}{3},\ M_{5/2}=\frac{1}{3}\psi_0+\frac{1}{3}\Theta_1+\frac{2}{3}\Theta_2$ мәндері есептеледі. η_3 үшін бағалау келесі түрде болады

$$\eta_3\le\frac{1}{2}\eta_2+\frac{1}{2}\eta_4+\frac{1}{2}\Theta_3\le\frac{1}{2}\left(L_{5/2}\eta_2+M_{5/2}\right)+\frac{1}{2}\eta_4+\frac{1}{2}\Theta_3,$$

$$\eta_3=\frac{1}{2\left(1-\frac{1}{2}L_{5/2}\right)}\eta_4+\frac{1}{2\left(1-\frac{1}{2}L_{5/2}\right)}\left(M_{5/2}+\Theta_3\right),$$

$\eta_3=L_{7/2}\eta_4+M_{7/2}$ екенін ескерсек, келесі теңдіктер алынады:

$$L_{7/2}=\frac{3}{4},\qquad M_{7/2}=\frac{1}{4}\psi_0+\frac{1}{4}\Theta_1+\frac{2}{4}\Theta_2+\frac{3}{4}\Theta_3,$$

Ары қарай қадам жалғастырылады:

$$\eta_{i-1}=L_{i-1/2}\eta_i+M_{i-1/2},$$

$$\eta_i \le \frac{1}{2\left(1-\frac{1}{2}L_{i-1/2}\right)}\eta_{i+1} + \frac{1}{2\left(1-\frac{1}{2}L_{i-1/2}\right)}(\Theta_i + M_{i-1/2}),$$

$$\eta_i = L_{i+1/2}\eta_{i+1} + M_{i+1/2},$$

$$L_{i+1/2} = \frac{1}{2(1-\frac{1}{2}L_{i-1/2})}, \qquad M_{i+1/2} = \frac{1}{2(1-\frac{1}{2}L_{i-1/2})}(\Theta_i + M_{i-1/2}),$$

$$\eta_{N-1} \le L_{N-1/2}\eta_N + M_{N-1/2} = L_{N-1/2}\psi_1 + M_{N-1/2} \ ,$$

$$\eta_{N-2} \le L_{N-3/2}\eta_{N-1} + M_{N-3/2},$$

$$\eta_{N-3} \le L_{N-5/2}\eta_{N-2} + M_{N-5/2},$$

$$L_{i+1/2} = \frac{i}{i+1}, \qquad M_{i+1/2} = \frac{1}{i+1}\psi_0 + \frac{1}{i+1}\sum_{l=1}^{i} l\Theta_l \ .$$

$i = N-1$ және $i = N-2$ жағдайы үшін: $\eta_{N-1} \le L_{N-1/2}\psi_1 + M_{N-1/2}$, $\eta_{N-2} \le L_{N-3/2}\eta_{N-1} + M_{N-3/2}$.

$$\eta_{N-1} \le \frac{N-1}{N}\psi_1 + \frac{1}{N}\psi_0 + \frac{1}{N}\sum_{l=1}^{N-1} l\Theta_l,$$

$$\eta_{N-2} \le \frac{N-2}{N}\psi_1 + \frac{2}{N}\psi_0 + \frac{2}{N}\sum_{l=1}^{N-2} l\Theta_l + \frac{N-2}{N}\Theta_{N-1},$$

$$\eta_{N-3} \le \frac{N-3}{N}\psi_1 + \frac{3}{N}\psi_0 + \frac{3}{N}\sum_{l=1}^{N-3} l\Theta_l + \frac{N-3}{N}\Theta_{N-1} + \frac{2(N-3)}{N}\Theta_{N-2},$$

$$\eta_{N-4} \le \frac{N-4}{N}\psi_1 + \frac{4}{N}\psi_0 + \frac{4}{N}\sum_{l=1}^{N-4} l\Theta_l + \frac{N-4}{N}\Theta_{N-1} + \frac{2(N-4)}{N}\Theta_{N-2} + \frac{3(N-4)}{N}\Theta_{N-3}.$$

Демек жоғарыдағы нәтижелер негізінде келесі теңсіздік алынады:

$$\eta_i \le \frac{N-i}{N}\eta_0 + \frac{i}{N}\eta_N + \frac{N-i}{N}\sum_{l=1}^{i}\max_{t\in[0,T]}\left\| l\frac{f_l(t)}{a_l(t)}\right\|\tau^2 + \frac{i}{N}\sum_{l=i+1}^{N-1}\max_{t\in[0,T]}\left\|(N-l)\frac{f_l(t)}{a_l(t)}\right\|\tau^2$$
$$+\frac{N-i}{N}\sum_{l=1}^{i}\sum_{j=1}^{m+1}\max_{t\in[0,T]}\left\| l\frac{k_j^l(t)}{a_l(t)}\right\|\tau^2\cdot\eta_i + \frac{i}{N}\sum_{l=i+1}^{N-1}\sum_{j=1}^{m+1}\max_{t\in[0,T]}\left\|(N-l)\frac{k_j^l(t)}{a_l(t)}\right\|\tau^2\cdot\eta_i,$$

$\|u_i\| \le \eta_i$ теңсіздігіне сәйкес келесі бағалау алынды:

$$\|u_i\| \le \frac{N-i}{N}\max\{\hat{\varphi},\|\psi_0\|\} + \frac{i}{N}\max\{\hat{\varphi},\|\psi_1\|\} + \frac{N-i}{N}\sum_{l=1}^{i}\max_{t\in[0,T]}\left\| l\frac{f_l(t)}{a_l(t)}\right\|\tau^2$$
$$+\frac{i}{N}\sum_{l=i+1}^{N-1}\max_{t\in[0,T]}\left\|(N-l)\frac{f_l(t)}{a_l(t)}\right\|\tau^2 + \Theta_i\|u_i\|, \qquad (1.57)$$

$\Theta_i = \frac{N-i}{N}\sum_{l=1}^{i}\sum_{j=1}^{m+1}\max_{t\in[0,T]}\left\| l\frac{k_j^l(t)}{a_l(t)}\right\|\tau^2 + \frac{i}{N}\sum_{l=i+1}^{N-1}\sum_{j=1}^{m+1}\max_{t\in[0,T]}\left\|(N-l)\frac{k_j^l(t)}{a_l(t)}\right\|\tau^2 < 1$ деп алсақ, онда келесі бағалау орындалады:

$$\|u_i\| \le \frac{1}{1-\Theta_i}\left\{\frac{N-i}{N}\max\{\varphi,\|\psi_0\|\} + \frac{i}{N}\max\left\{\varphi,\|\psi_1\|\right\}\right.$$
$$\left.+\frac{N-i}{N}\sum_{l=1}^{i}\max_{t\in[0,T]}\left\| l\frac{f_l(t)}{a_l(t)}\right\|\tau^2 + \frac{i}{N}\sum_{l=i+1}^{N-1}\max_{t\in[0,T]}\left\|(N-l)\frac{f_l(t)}{a_l(t)}\right\|\tau^2\right\}.$$

(1.57) теңсіздігін және [74], [76] жұмыстарындағы ұқсас пайымдауларды қолдану нәтижесінде келесі теореманы аламыз.

Теорема 1.4 Келесі шарттар орындалсын:

а) $a(t,x) \geq \gamma > 0$, $b(t,x) \leq 0$, $k_j(t,x)$, $j = \overline{1,m+1}$ және $f(t,x)$ Ω -да екі айнымалысы бойынша да Гельдер үзіліссіз функциялар; $T > 0$ және $\omega > 0$; $t_j \in [0,T]$, $j = \overline{0,m}$, t_j - жүктеме нүктелері. Ал, $\varphi(x)$, $\psi_0(t)$ және $\psi_1(t)$ функциялары жеткілікті тегіс және $\psi_0(0) = \varphi(0)$, $\psi_1(0) = \varphi(\omega)$ үйлесімділік шартын қанағаттандырады.

ә) барлық $x \in [0,\omega]$ үшін

$$\Theta(x) = \frac{\omega - x}{\omega} \int_0^x z \sum_{j=1}^{m+1} \max_{t\in[0,T]} \left\| \frac{k_j(t,z)}{a(t,z)} \right\| dz + \frac{x}{\omega} \int_x^{\omega} (\omega - z) \sum_{j=1}^{m+1} \max_{t\in[0,T]} \left\| \frac{k_j(t,z)}{a(t,z)} \right\| dz < 1,$$

теңсіздігі орындалсын.

Онда (1.50)-(1.52) есебінің $u^*(t,x)$ жалғыз шешімі бар болады және келесі бағалау орындалады:

$$\begin{aligned} \max_{t\in[0,T]} |u^*(t,x)| \leq & \frac{\omega - x}{\omega[1-\Theta(x)]} \max \left\{ \max_{x\in[0,\omega]} |\varphi(x)|, \max_{t\in[0,T]} |\psi_0(t)| \right\} \\ & + \frac{x}{\omega[1-\Theta(x)]} \max \left\{ \max_{x\in[0,\omega]} |\varphi(x)|, \max_{t\in[0,T]} |\psi_1(t)| \right\} \\ & + \frac{\omega - x}{\omega[1-\Theta(x)]} \int_0^x z \max_{t\in[0,T]} \left\| \frac{f(t,z)}{a(t,z)} \right\| dz + \frac{x}{\omega[1-\Theta(x)]} \int_x^{\omega} (\omega - z) \max_{t\in[0,T]} \left\| \frac{f(t,z)}{a(t,z)} \right\| dz. \end{aligned}$$

Осылайша, (1.50)-(1.52) жүктелген параболалық теңдеу үшін бастапқы-шеттік есебінің шешімі үшін бағалау алынды.

(1.53)-(1.55) дискреттелген есебін матрицалық-векторлық түрде келесідей жазылады:

$$\frac{d\tilde{u}}{dt} = A(t)\tilde{u} + \sum_{j=1}^{m+1} M_j(t)\tilde{u}(t_j) + F(t), \quad \tilde{u} \in \mathbb{R}^{N-1}, \quad t \in [0,T], \tag{1.58}$$

$$\tilde{u}(0) = d, \quad d \in \mathbb{R}^{N-1}, \tag{1.59}$$

мұнда $\tilde{u}(t) = (u_1(t), u_2(t), \ldots, u_{N-1}(t))$ ізделінді функция. $A(t)$, $M_j(t)$ $j = \overline{1,m+1}$ - өлшемі $(N-1)\times(N-1)$ болатын матрицалар және $F(t)$ - $(N-1)$ өлшемді вектор-

функция. Бұл функциялар $[0,T]$ аралығында үзіліссіз, t_j - жүктеме нүктелері $0=t_0<t_1<\ldots<t_m<t_{m+1}=T$. Яғни,

$$A(t)=\begin{pmatrix} -\frac{2a_1(t)}{\tau^2}+b_1(t) & \frac{a_1(t)}{\tau^2} & 0 & \ldots & 0 \\ \frac{a_2(t)}{\tau^2} & -\frac{2a_2(t)}{\tau^2}+b_2(t) & \frac{a_2(t)}{\tau^2} & \ldots & 0 \\ 0 & \frac{a_3(t)}{\tau^2} & -\frac{2a_3(t)}{\tau^2}+b_3(t) & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ddots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & -\frac{2a_{N-1}(t)}{\tau^2}+b_{N-1}(t) \end{pmatrix},$$

$$M_j(t)=\begin{pmatrix} k_j^1(t) & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & k_j^2(t) & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & k_j^3(t) & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ddots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & k_j^{N-1}(t) \end{pmatrix}, \qquad j=\overline{1,m+1},$$

$$F(t)=\begin{pmatrix} \frac{a_1(t)}{\tau^2}\psi_0(t)+f_1(t) \\ f_2(t) \\ f_3(t) \\ \vdots \\ \frac{a_{N-1}(t)}{\tau^2}\psi_1(t)+f_{N-1}(t) \end{pmatrix}, \quad d=\begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ \varphi_3 \\ \vdots \\ \varphi_{N-1} \end{pmatrix}.$$

(1.58), (1.59) есебінің шешімі деп $[0,T]$ аралығында үзіліссіз дифференциалданатын және (1.58) жүктелген дифференциалдық теңдеулер жүйесін және (1.59) бастапқы шартты қанағаттандыратын $\tilde{u}(t)$ вектор-функциясын айтамыз.

(1.58), (1.59) жүктелген дифференциалдық теңдеулер жүйесі үшін бастапқы есепті шешуде [89-92] жұмыстарында ұсынылған Джумабаев параметрлеу әдісінің жаңа нұсқасы қолданылды. Аталған тәсіл [86] жұмыстағы алгоритмдерге және [96-102] еңбектерінде келтірілген сандық әдістерге негізделген.

1.7 Дискреттелген есепті шешудің Джумабаев параметрлеу әдісі және бірмәнді шешілімділік шарттары

Әдіс алгоритмі бойынша $[0,T]$ аралығы $[0,T)=\bigcup_{s=1}^{m+1}[t_{s-1},t_s)$ жүктеме нүктелері арқылы ішкі аралықтарға бөлінеді. $\tilde{u}(t)$ функциясының $[t_{s-1},t_s)$ аралығындағы сығылуы $\tilde{u}_s(t)$ арқылы белгіленеді, яғни $\tilde{u}_s(t)=\tilde{u}(t)$, $t\in[t_{s-1},t_s)$, $s=\overline{1,m+1}$. Әдіс тәсілі бойынша қосымша $\lambda_s=\tilde{u}_{s+1}(t_s)$, $s=\overline{1,m}$ және $\lambda_{m+1}=\tilde{u}(t_{m+1})$ параметрлері енгізілді. $[t_0,t_1)$ аралығында $\tilde{u}_1(t)=v_1(t)+d$, ал $[t_{s-1},t_s)$, $s=\overline{2,m+1}$, аралықтарында $\tilde{u}_s(t)=v_s(t)+\lambda_{s-1}$ алмастыруларын енгізсек, онда (1.58), (1.59) есебі келесідей қосымша параметрі бар есепке келтіріледі:

$$\frac{dv_1}{dt}=A(t)(v_1+d)+\sum_{j=1}^{m+1}M_j(t)\lambda_j+F(t),\quad t\in[t_0,t_1),\tag{1.60}$$

$$\frac{dv_s}{dt}=A(t)(v_s+\lambda_{s-1})+\sum_{j=1}^{m+1}M_j(t)\lambda_j+F(t),\quad t\in[t_{s-1},t_s),\quad s=\overline{2,m+1},\tag{1.61}$$

$$v_s(t_{s-1})=0,\qquad s=\overline{1,m+1},\tag{1.62}$$

$$d+\lim_{t\to t_1-0}v_1(t)=\lambda_1,\tag{1.63}$$

$$\lambda_{s-1}+\lim_{t\to t_s-0}v_s(t)=\lambda_s,\quad s=\overline{2,m+1}.\tag{1.64}$$

Егер $v_s^*(t)$, $s=\overline{1,m+1}$ функциялары $[t_{s-1},t_s)$ аралықтарында үзіліссіз дифференциалданып, (1.60), (1.61) теңдеулерін, сондай-ақ $\lambda_j=\lambda_j^*$, $j=\overline{1,m+1}$, кезінде (1.63), (1.64) шарттарын және (1.62) бастапқы шарттарын қанағаттандырса, онда $(v^*[t],\lambda^*)$ жұбы (1.60)-(1.64) есебінің шешімі деп аталады. Мұнда $v^*[t]=\left(v_1^*(t),v_2^*(t),\ldots,v_{m+1}^*(t)\right)\in C([0,T],t_s,\mathbb{R}^{(N-1)(m+1)})$, $\lambda^*=(\lambda_1^*,\lambda_2^*,\ldots,\lambda_{m+1}^*)\in\mathbb{R}^{(N-1)(m+1)}$.

(1.58), (1.59) және (1.60)-(1.64) есептері өзара пара-пар. Егер $\tilde{u}^*(t)$ функциясы (1.58), (1.59) есебінің шешімі болса, онда $v^*[t]=\left((\tilde{u}^*(t)-D,\tilde{u}^*(t)-\tilde{u}^*(t_1),\ldots,\tilde{u}^*(t)-\tilde{u}^*(t_m)\right)$ және $\lambda^*=\left(\tilde{u}^*(t_1),\tilde{u}^*(t_2),\ldots,\tilde{u}^*(t_m),\tilde{u}^*(t_{m+1})\right)$

арқылы анықталатын $(v^*[t], \lambda^*)$ жұбы (1.60)-(1.64) есебінің шешімі болады. Керісінше, егер $\tilde{v}[t] = (\tilde{v}_1(t), \tilde{v}_2(t), \ldots, \tilde{v}_{m+1}(t)) \in C([0,T], t_s, \mathbb{R}^{(N-1)(m+1)})$ және $\tilde{\lambda} = (\tilde{\lambda}_1, \tilde{\lambda}_2, \ldots, \tilde{\lambda}_{m+1}) \in \mathbb{R}^{(N-1)(m+1)}$ элементтерінен тұратын $(\tilde{v}[t], \tilde{\lambda})$ жұбы (1.60)-(1.64) есебінің шешімі болса, онда $\tilde{\tilde{u}}(t) = \tilde{v}_1(t) + d$, $t \in [t_0, t_1)$, $\tilde{\tilde{u}}(t) = \tilde{v}_s(t) + \lambda_{s-1}$, $t \in [t_{s-1}, t_s)$, $s = \overline{2, m+1}$ және $\tilde{\tilde{u}}(T) = \tilde{\lambda}_{m+1}$ теңдіктері арқылы анықталатын $\tilde{\tilde{u}}(t)$ функциясы бастапқы (1.58), (1.59) есебінің шешімі болады.

$\chi_s(t) - \dfrac{d\tilde{u}}{dt} = A(t)\tilde{u}$ дифференциалдық теңдеулер жүйесінің $[t_{s-1}, t_s]$ аралығындағы іргелі матрицасы болсын, $s = \overline{1, m+1}$. Онда (1.60)-(1.62) Коши есебінің шешімі келесі түрде жазылады:

$$v_1(t) = \mathcal{X}_1(t)\int_{t_0}^{t} \mathcal{X}_1^{-1}(\eta)A(\eta)d\eta \cdot d + \mathcal{X}_1(t)\int_{t_0}^{t} \mathcal{X}_1^{-1}(\eta)\sum_{j=1}^{m+1} M_j(\eta)d\eta\lambda_j + \mathcal{X}_1(t)\int_{t_0}^{t} \mathcal{X}_1^{-1}(\eta)F(\eta)d\eta, \quad t \in [t_0, t_1), \tag{1.65}$$

$$v_s(t) = \mathcal{X}_s(t)\int_{t_{s-1}}^{t} \mathcal{X}_s^{-1}(\eta)A(\eta)d\eta \cdot \lambda_{s-1} + \mathcal{X}_s(t)\int_{t_{s-1}}^{t} \mathcal{X}_s^{-1}(\eta)\sum_{j=1}^{m+1} M_j(\eta)d\eta\lambda_j + \mathcal{X}_s(t)\int_{t_{s-1}}^{t} \mathcal{X}_s^{-1}(\eta)F(\eta)d\eta, \quad t \in [t_{s-1}, t_s), \quad s = \overline{2, m+1.} \tag{1.66}$$

(1.65), (1.66) өрнектерінің сол жақ шектерін тауып, сәйкесінше (1.63), (1.64) шарттарына қойсақ, онда λ_s, $s = \overline{1, m+1}$, параметрлеріне қатысты сызықтық алгебралық теңдеулер жүйесі алынады:

$$\mathcal{X}_1(t_1)\int_{t_0}^{t_1} \mathcal{X}_1^{-1}(\eta)\sum_{j=1}^{m+1} M_j(\eta)d\eta\lambda_j - \lambda_1 - d - \mathcal{X}_1(t_1)\int_{t_0}^{t_1} \mathcal{X}_1^{-1}(\eta)A(\eta)d\eta \cdot d - \mathcal{X}_1(t_1)\int_{t_0}^{t_1} \mathcal{X}_1^{-1}(\eta)F(\eta)d\eta, \tag{1.67}$$

$$\lambda_{s-1}+\mathcal{X}_s(t_s)\int\limits_{t_{s-1}}^{t_s}\mathcal{X}_s^{-1}(\eta)A(\eta)d\eta\cdot\lambda_{s-1}-\lambda_s+\mathcal{X}_s(t_s)\int\limits_{t_{s-1}}^{t_s}\mathcal{X}_s^{-1}(\eta)\sum_{j=1}^{m+1}M_j(\eta)d\eta\lambda_j$$
$$=-\mathcal{X}_s(t_s)\int\limits_{t_{s-1}}^{t_s}\mathcal{X}_s^{-1}(\eta)F(\eta)d\eta,\quad t\in[t_{s-1},t_s),\quad s=\overline{2,m+1}. \tag{1.68}$$

Белгісіз λ_s параметрлері (1.67), (1.68) жүйесін шешу арқылы анықталады, $s=\overline{1,m+1}$. Мұнда I - $(N-1)\times(N-1)$ өлшемді бірлік матрица.

Келесі белгілеулерді енгіземіз:

$$y_s(A,t)=\mathcal{X}_s(t)\int\limits_{t_{s-1}}^{t}\mathcal{X}_s^{-1}(\eta)A(\eta)d\eta,\quad s=\overline{1,m},$$

$$y_s(F,t)=\mathcal{X}_s(t)\int\limits_{t_{s-1}}^{t}\mathcal{X}_s^{-1}(\eta)F(\eta)d\eta,\quad s=\overline{1,m},$$

$$y_s(M_j,t)=\mathcal{X}_s(t)\int\limits_{t_{s-1}}^{t}\mathcal{X}_s^{-1}(\eta)M_j(\eta)d\eta,\quad s=\overline{1,m},\quad j=\overline{1,m+1}.$$

Осы белгілеулерді пайдалансақ, (1.67), (1.68) сызықтық алгебралық теңдеулер жүйесі ықшам түрде жазылады:

$$Q_*(l)\lambda=F_*(l),\quad \lambda\in\mathbb{R}^{(N-1)(m+1)}, \tag{1.69}$$

мұнда

$$Q_*(l)=\begin{bmatrix} y_1(M_1,t_1)-I & y_1(M_2,t_1) & y_1(M_3,t_1) & \dots & y_1(M_{m+1},t_1)\\ I+y_2(A,t_2)+y_2(M_1,t_2) & y_2(M_2,t_2)-I & y_2(M_3,t_2) & \dots & y_2(M_{m+1},t_2)\\ y_3(M_1,t_3) & I+y_3(A,t_3)+y_3(M_2,t_3) & y_3(M_3,t_3)-I & \dots & y_3(M_{m+1},t_3)\\ \dots & \dots & \dots & \ddots & \dots\\ y_{m+1}(M_1,t_{m+1}) & y_{m+1}(M_2,t_{m+1}) & y_{m+1}(M_3,t_{m+1}) & \dots & y_{m+1}(M_{m+1},t_{m+1})-I \end{bmatrix},$$

$$F_*(l)=\left(-d-y_1(A,t_1)d-y_1(F,t_1),-y_2(F,t_2),\ldots,-y_m(F,t_m),-y_{m+1}(F,t_{m+1})\right)'.$$

[87] жұмысында дәлелденген, келесі көмекші лемманы қарастырайық.

Лемма 1.2. Келесі тұжырымдар орындалсын:

а) $\lambda^*=(\lambda_1^*,\lambda_2^*,\ldots,\lambda_{m+1}^*)\in\mathbb{R}^{(N-1)(m+1)}$ векторы (1.58), (1.59) есебінің шешімінің ішкі аралықтарындағы бастапқы нүктелерінен құралсын, яғни $\lambda_s^*=\tilde{u}_{s+1}^*(t_s)$, $s=\overline{1,m}$ және $\lambda_{m+1}^*=\tilde{u}^*(t_{m+1})$. Онда бұл вектор (1.69) жүйесін қанағаттандырады.

ә) Егер $\lambda=(\tilde{\lambda}_1,\tilde{\lambda}_2,\ldots,\tilde{\lambda}_{m+1})\in\mathbb{R}^{(N-1)(m+1)}$ векторы (1.69) жүйесінің шешімі болса және $\tilde{v}[t]=\left(\tilde{v}_1(t),\tilde{v}_2(t),\ldots,\tilde{v}_{m+1}(t)\right)\in C([0,T],t_s,\mathbb{R}^{(N-1)(m+1)})$ функциялар жүйесі $\lambda_s=\tilde{\lambda}_s$, $s=\overline{1,m+2}$ кезінде (1.60)-(1.62) Коши есебінің шешімі болса, онда $\tilde{u}^*(t)=\tilde{v}_1(t)+d$, $t\in[t_0,t_1)$, $\tilde{u}^*(t)=\tilde{v}_s(t)+\lambda_{s-1}$, $t\in[t_{s-1},t_s)$, $s=\overline{2,m+1}$ және $\tilde{u}^*(T)=\tilde{\lambda}_{m+1}$ теңдіктері арқылы анықталған $\tilde{u}^*(t)$ функциясы бастапқы (1.58), (1.59) есебінің шешімі болады.

(1.58), (1.59) есебінің бірмәнді шешілімділігі келесі теоремада орнатылады.

Теорема 1.5 $Q_*(l):\mathbb{R}^{(N-1)(m+1)}\to\mathbb{R}^{(N-1)(m+1)}$ матрицасының кері матрицасы бар болсын. Онда кез келген $F(t)\in C\left([0,T],\mathbb{R}^{N-1}\right)$ және $d\in\mathbb{R}^{(N-1)}$ үшін (1.58), (1.59) есебінің жалғыз $\tilde{u}^\star(t)$ шешімі бар болады және келесі бағалау орындалады:

$$\left\|\tilde{u}^*\right\|_1\le K\max\left(\|d\|,\|F\|_1\right),$$

мұнда

$$K=\Bigg[e^{\alpha l}l\left\{1+\gamma_*(l)\left(1+\alpha e^{\alpha l}l+e^{\alpha l}l\right)\sum_{j=1}^{m+1}\beta_j+\alpha\max\left(1,\gamma_*(l)\left(1+\alpha e^{\alpha l}l+e^{\alpha l}l\right)\right)\right\}$$
$$+\gamma_*(l)\left(1+\alpha e^{\alpha l}l+e^{\alpha l}l\right)\Bigg],$$

$$\alpha=\max_{t\in[0,T]}\|A(t)\|,\quad \beta_j=\max_{t\in[0,T]}\|M_j(t)\|,\quad j=\overline{1,m+1},\quad l=\max_{s=\overline{1,m+1}}(t_s-t_{s-1}),\quad \left\|\tilde{u}^*\right\|_1=\max_{t\in[0,T]}\left\|\tilde{u}^*\right\|.$$

Дәлелдеуі. $F(t)\in C\left(\left[0,T\right],\mathbb{R}^{N-1}\right)$ функциясы және $d\in\mathbb{R}^{(N-1)}$ векторы берілсін. $Q_*(l)$ матрицасының кері матрицасы бар болсын, (1.69) сызықтық алгебралық теңдеулер жүйесінің $\lambda^*=-\left[Q_*(l)\right]^{-1}F_*(l)$ шешімі табылады. (1.60)-(1.62) Коши есебін $\lambda=\lambda^*$ кезінде шешу арқылы $v^*[t]=\left(v_1^*(t),v_2^*(t),\ldots,v_{m+1}^*(t)\right)$ функциялар жүйесі анықталады. Сосын Лемма 1.2 бойынша $\tilde{u}^*(t)=\tilde{v}_1(t)+d$, $t\in[t_0,t_1)$, $\tilde{u}^*(t)=\tilde{v}_s(t)+\lambda_{s-1}$, $t\in[t_{s-1},t_s)$, $s=\overline{2,m+1}$ және $\tilde{u}^*(T)=\tilde{\lambda}_{m+1}$ теңдіктері арқылы анықталған $\tilde{u}^*(t)$ функция (1.58), (1.59) есебінің шешімі болады.

$\left\|\tilde{u}^*\right\|_1\le K\max\left(\|d\|,\|F\|_1\right)$ бағалауын дәлелдейік. Келесі теңдікті қарастырайық:

$$\mathcal{X}_s(t)\int_{t_{s-1}}^{t}\mathcal{X}_s^{-1}(\eta)B(\eta)d\eta=\int_{t_{s-1}}^{t}B(\eta_1)d\eta_1+\int_{t_{s-1}}^{t}A(\eta_1)\int_{t_{s-1}}^{\eta_1}B(\eta_2)d\eta_1d\eta_2$$
$$+\int_{t_{s-1}}^{t}A(\eta_1)\int_{t_{s-1}}^{\eta_1}A(\eta_2)\int_{t_{s-1}}^{\eta_2}B(\eta_2)d\eta_3d\eta_2d\eta_1+\ldots,\qquad t\in\left[t_{i-1},t_i\right].$$

Бұл теңдік келесі бағалауды қанағаттандырады:

$$\left\|\mathcal{X}_s(t)\int_{t_{s-1}}^{t_s}\mathcal{X}_s^{-1}(\eta)B(\eta)d\eta\right\|\le e^{\alpha(t_s-t_{s-1})}\int_{t_{s-1}}^{t_s}\|B(\eta)\|d\eta,\qquad s=\overline{1,m+1}.$$

Осы бағалауға ұқсас келесі бағалаулар алынады:

$$\max_i\left\|y_i\left(A,t_i\right)\right\|\le\max_i\left\|\mathcal{X}_i(t)\int_{t_{i-1}}^{t_i}\mathcal{X}_i^{-1}(\eta)A(\eta)d\eta\right\|\le\alpha e^{\alpha l}l,\quad i=\overline{1,m+1},$$

$$\max_i\left\|y_i\left(M_j,t_i\right)\right\|\le\max_i\left\|\mathcal{X}_i(t)\int_{t_{i-1}}^{t_i}\mathcal{X}_i^{-1}(\eta)M_j(\eta)d\eta\right\|\le\beta_je^{\alpha l}l,\quad i=\overline{1,m+1},\quad j=\overline{1,m+1},$$

$$\max_i\left\|y_i\left(F,t_i\right)\right\|\le\max_i\left\|\mathcal{X}_i(t)\int_{t_{i-1}}^{t_i}\mathcal{X}_i^{-1}(\eta)F(\eta)d\eta\right\|\le e^{\alpha l}l\left\|F\right\|_1,\quad i=\overline{1,m+1}.$$

$F_*(l)$ векторы келесі бағалауды қанағаттандырады:

$$\begin{aligned}\|F_*(l)\| &\le \max\left(\|d\|+\|y_1(A,t_1)\|\|d\|+\|y_1(F,t_1)\|, \max_{i=\overline{2,m+1}}\|y_i(F,t_i)\|\right)\\ &\le \max\left(1+\alpha e^{\alpha l}l+e^{\alpha l}l, e^{\alpha l}l\right)\max\left(\|d\|,\|F\|_1\right)\\ &\le\left(1+\alpha e^{\alpha l}l+e^{\alpha l}l\right)\max\left(\|d\|,\|F\|_1\right).\end{aligned}$$

(1.69) және жоғарыдағы теңсіздіктер бойынша, сондай-ақ матрицаның кері матрицасының бар болуы келесі бағалаудың орындалатынын көрсетеді:

$$\left\|\lambda^*\right\| = \left\|\left[Q_*(l)\right]^{-1}\right\|\|F_*(l)\| \le \gamma_*(l)\left(1+\alpha e^{\alpha l}l+e^{\alpha l}l\right)\max\left(\|d\|,\|F\|_1\right).$$

(1.65), (1.66) өрнектеріндегі $v_s(t),\ s=\overline{1,m+1}$ бағаласақ, келесі теңсіздік шығады

$$\begin{aligned}\left\|v^*[\cdot]\right\|_2 &\le \max\left(\|v_1(t)\|, \max_{s=2,m+1}\|v_s(t)\|\right)\\ &\le \max\Bigg[\alpha e^{\alpha(t_1-t_0)}(t_1-t_0)\|d\|+e^{\alpha(t_1-t_0)}(t_1-t_0)\sum_{j=1}^{m+1}\beta_j\left\|\lambda_j^*\right\|+e^{\alpha(t_1-t_0)}(t_1-t_0)\|F\|_1,\\ &\max_{s=2,m+1}\left(\alpha e^{\alpha l}l\left\|\lambda^*\right\|+e^{\alpha l}l\sum_{j=1}^{m+1}\beta_j\left\|\lambda_j^*\right\|+e^{\alpha l}l\|F\|_1\right)\Bigg]\\ &\le \max\left[e^{\alpha l}l\|d\|+\alpha e^{\alpha l}l\|F\|_1+e^{\alpha l}l\sum_{j=1}^{m+1}\beta_j\left\|\lambda^*\right\|, e^{\alpha l}l\|F\|_1+\left(\alpha e^{\alpha l}l+e^{\alpha l}l\sum_{j=1}^{m+1}\beta_j\right)\left\|\lambda^*\right\|\right]\max\left(\|d\|,\|F\|_1\right)\\ &\le \max\Bigg[e^{\alpha l}l\|d\|+\alpha e^{\alpha l}l\|F\|_1+e^{\alpha l}l\sum_{j=1}^{m+1}\beta_j\left(\gamma_*(l)\left(1+\alpha e^{\alpha l}l+e^{\alpha l}l\right)\max\left(\|d\|,\|F\|_1\right)\right),\\ &e^{\alpha l}l\|F\|_1+e^{\alpha l}l\left(\alpha+\sum_{j=1}^{m+1}\beta_j\right)\left(\gamma_*(l)\left(1+\alpha e^{\alpha l}l+e^{\alpha l}l\right)\right)\max\left(\|d\|,\|F\|_1\right)\Bigg],\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\left\|v^*[\cdot]\right\|_2 \le e^{\alpha l}l\max\Bigg[&1+\alpha+\gamma_*(l)\left(1+\alpha e^{\alpha l}l+e^{\alpha l}l\right)\sum_{j=1}^{m+1}\beta_j, 1\\ &+\gamma_*(l)\left(\alpha+\sum_{j=1}^{m+1}\beta_j\right)\left(1+\alpha e^{\alpha l}l+e^{\alpha l}l\right)\Bigg]\max\left(\|d\|,\|F\|_1\right),\end{aligned}$$

онда алынған бағалаулар негізінде (1.58), (1.59) есебінің шешімінің бағалауы алынады:

$$\left\|\tilde{u}^*(t)\right\| \le \left\|v^*{}_s(t)\right\| + \left\|\lambda^*\right\| \le e^{\alpha l} l \max\Bigg[1+\alpha+\gamma_*(l)\left(1+\alpha e^{\alpha l} l + e^{\alpha l} l\right)\sum_{j=1}^{m+1}\beta_j, 1$$

$$+\gamma_*(l)\left(\alpha+\sum_{j=1}^{m+1}\beta_j\right)\left(1+\alpha e^{\alpha l} l + e^{\alpha l} l\right)\Bigg]\max\left(\|d\|, \|F\|_1\right)$$

$$+\gamma_*(l)\left(1+\alpha e^{\alpha l} l + e^{\alpha l} l\right)\max\left(\|d\|, \|F\|_1\right)$$

$$\le e^{\alpha l} l\left\{1+\gamma_*(l)\left(1+\alpha e^{\alpha l} l + e^{\alpha l} l\right)\sum_{j=1}^{m+1}\beta_j + \alpha\max\left(1, \gamma_*(l)\left(1+\alpha e^{\alpha l} l + e^{\alpha l} l\right)\right)\right\}$$

$$\max\left(\|d\|, \|F\|_1\right) + \gamma_*(l)\left(1+\alpha e^{\alpha l} l + e^{\alpha l} l\right)\max\left(\|d\|, \|F\|_1\right)$$

$$\Bigg[e^{\alpha l} l\left\{1+\gamma_*(l)\left(1+\alpha e^{\alpha l} l + e^{\alpha l} l\right)\sum_{j=1}^{m+1}\beta_j + \alpha\max\left(1, \gamma_*(l)\left(1+\alpha e^{\alpha l} l + e^{\alpha l} l\right)\right)\right\}$$

$$+\gamma_*(l)\left(1+\alpha e^{\alpha l} l + e^{\alpha l} l\right)\Bigg]\max\left(\|d\|, \|F\|_1\right).$$

Демек, Теорема 1.5-те көрсетілген бағалау орнатылды. Теорема дәлелденді.

Анықтама 1.2 [97] Егер кез келген $\left(F(t), d\right)$, мұнда $F(t) \in C\left([0,T], \mathbb{R}^{N-1}\right)$, $d \in \mathbb{R}^{(N-1)}$ жұбы үшін (1.58), (1.59) есебінің жалғыз $\tilde{u}^*(t)$ шешімі бар және $\left\|\tilde{u}^*\right\|_1 \le K\max\left(\|d\|, \|F\|_1\right)$ бағалауы орындалса, онда (1.58), (1.59) есебі қисынды шешілімді деп аталады. Мұнда K - $F(t)$ және d -ға тәуелсіз тұрақты.

Теорема 1.6 [97] (1.58), (1.59) есебі қисынды шешілімді болуы үшін $Q_*(\xi): \mathbb{R}^{(N-1)(m+1)} \to \mathbb{R}^{(N-1)(m+1)}$ матрицасының кері матрицасы бар болуы қажетті және жеткілікті.

Дәлелдеуі. m саны берілген болсын. K мәні $\left\|\tilde{u}^*\right\|_1 \le K\max\left(\|d\|, \|F\|_1\right)$ теңсіздігінен анықталады және $F(t)$, d -ға тәуелсіз. Сондықтан теореманың жеткілікті бөлігі теорема 1.5 -тен тікелей шығады.

Енді қажеттілігін дәлелдейік. (1.58), (1.59) есебі қисынды шешілімді болсын. Кері жорып $Q_*(l): \mathbb{R}^{(N-1)(m+1)} \to \mathbb{R}^{(N-1)(m+1)}$ матрицасының кері матрицасы табылмасын деп алайық. Онда $Q_*(l)\lambda = 0$ біртекті сызықты алгебралық теңдеулер жүйесінің нөлден өзге $\hat{\lambda} = (\hat{\lambda}_1, \hat{\lambda}_2, \ldots, \hat{\lambda}_{m+1}) \in \mathbb{R}^{(N-1)(m+1)}$, $\left|\hat{\lambda}\right| \ne 0$ шешімі бар болады. Біртекті жүктелген дифференциалдық теңдеулер жүйесі үшін бастапқы-шеттік есебі, $F(t) = 0$, $d = 0$ болған жағдайда (1.69) жүйесі $Q_*(l)\lambda = 0$ түріне келеді. Лемма 1.2 бойынша, $\tilde{u}^*(t) = \tilde{v}_1(t) + d$, $t \in [t_0, t_1)$, $\tilde{u}^*(t) = \tilde{v}_s(t) + \lambda_{s-1}$, $t \in [t_{s-1}, t_s)$, $s = \overline{2, m+1}$ және

$\tilde{u}^*(T)=\tilde{\lambda}_{m+1}$ теңдіктері арқылы анықталатын, мұнда $\tilde{v}[t]=\left(\tilde{v}_1(t),\tilde{v}_2(t),\ldots,\tilde{v}_{m+1}(t)\right)\in C([0,T],t_s,\mathbb{R}^{(N-1)(m+1)})$ жүйесі (1.60)-(1.62) Коши есебінің $\lambda_s=\hat{\lambda}_s$, $s=\overline{1,m+1}$ және $F(t)=0$ кезіндегі шешімі болады. Онда (1.58), (1.59) есебінің нөлден өзгеше шешімі болады. Бұл (1.58), (1.59) есебінің бірмәнді шешілімділігіне қайшы келеді, өйткені $F(t)=0$, $d=0$ кезінде оның нөлдік шешіммен қатар нөлдік емес шешімі де пайда болады. Ендеше, біздің жорамалымыз дұрыс емес, $Q_*(l):\mathbb{R}^{(N-1)(m+1)}\to\mathbb{R}^{(N-1)(m+1)}$ матрицасының кері матрицасы бар болады. Теорема дәлелденді.

Лемма 1.2 арқылы (1.69) жүйесінің шешімі, яғни $\lambda^*=(\lambda_1^*,\lambda_2^*,\ldots,\lambda_{m+1}^*)\in\mathbb{R}^{(N-1)(m+1)}$ бастапқы (1.58), (1.59) есебінің ішкі аралықтарындағы бастапқы нүктелеріндегі $\lambda_s^*=\tilde{u}_{s+1}^*(t_s)$, $s=\overline{1,m}$ және $\lambda_{m+1}^*=\tilde{u}^*(t_{m+1})$ шешім мәндерінен тұрады. (1.69) жүйесінің шешімі $\lambda^*=(\lambda_1^*,\lambda_2^*,\ldots,\lambda_{m+1}^*)$ болсын. [97]-дегі (3.9)-(3.10) өрнектеріне ұқсас түрде және қосымша λ_{m+1}^* параметрін ескере отырып, (1.58), (1.59) есебінің шешімі келесі түрде анықталады:

$$\tilde{u}_1(t)=\mathcal{X}_1(t)\chi_1^{-1}(t_0)d+\mathcal{X}_1(t)\int_{t_0}^{t}\mathcal{X}_1^{-1}(\eta)\sum_{j=1}^{m+1}M_j(\eta)d\eta\lambda_j^*+\mathcal{X}_1(t)\int_{t_0}^{t}\mathcal{X}_1^{-1}(\eta)F(\eta)d\eta,\qquad t\in[t_0,t_1),$$

$$\tilde{u}_s(t)=\mathcal{X}_s(t)\chi_s^{-1}(t_{s-1})\cdot\lambda_{s-1}^*+\mathcal{X}_s(t)\int_{t_{s-1}}^{t}\mathcal{X}_s^{-1}(\eta)\sum_{j=1}^{m+1}M_j(\eta)d\eta\lambda_j^*$$
$$+\mathcal{X}_s(t)\int_{t_{s-1}}^{t}\mathcal{X}_s^{-1}(\eta)F(\eta)d\eta,\quad t\in[t_{s-1},t_s),\quad s=\overline{2,m+1},$$

және $\tilde{u}^*(T)=\lambda_{m+1}^*$.

Бұл өрнектер (1.58), (1.59) жүктелген дифференциалдық теңдеулер жүйесі үшін бастапқы есебінің шешімінің аналитикалық түрін береді.

1.8 Сандық шешу алгоритмі және мысалдар

(1.50), (1.52) және (1.58), (1.59) есептерін сандық шешу алгоритмі. Ұсынылып отырған сандық алгоритмі (1.69) жүйесін құруға және оны шешуге негізделген. (1.50), (1.52) есебін сандық шешу алгоритмі төмендегідей жүзеге асады:

1. Бөлім 1.5 келтірілген сынықтар әдісі бойынша жүктелген параболалық теңдеулер үшін бастапқы-шеттік есебіне сынықтар әдісі пайдаланылады. Яғни, бірінші кеңістік айнымалысы бойынша дискреттеу жасалынады.
2. $[0,T]$ аралығы $0=t_0<t_1<\ldots<t_m<t_{m+1}=T$ жүктеме нүктелерде ішкі аралықтарға бөлінеді. Әрбір $[t_{s-1},t_s]$, $s=\overline{1,m+1}$ аралықтары $h_s=(t_s-t_{s-1})/l$, $l\in\mathbb{N}$ қадамы арқылы бөлінеді.
3. (1.69) жүйесіндегі $Q_*(l)$ матрицасы мен $F_*(l)$ векторының мәндерін анықтау үшін әрбір ішкі аралықта h_s қадамымен төртінші ретті Рунге-Кутта RK4 әдісі қолданылды. Осы арқылы $y_s(A,h_s)$, $y_s(M_j,h_s)$, $j=\overline{1,m+1}$, және $y_s(F,h_s)$, $s=\overline{1,m+1}$ мәндері есептелді.
4. Келесі сызықтық алгебралық теңдеулер жүйесі шешіледі:

$$Q_*^{\tilde{h}}(l)\lambda=F_*^{\tilde{h}}(l),\quad \lambda\in\mathbb{R}^{(N-1)(m+1)}, \tag{1.70}$$

мұнда $\tilde{u}^{\tilde{h}_r}(t_s)=\lambda_s^{\tilde{h}}$, $s=\overline{1,m+1}$.

5.

$$\frac{d\tilde{u}}{dt}=A(t)\tilde{u}+\sum_{j=1}^{m+1}M_j(t)\lambda_j^{\tilde{h}}+F(t),\quad \tilde{u}(0)=\Phi,\quad t\in[t_0,t_1], \tag{1.71}$$

$$\frac{d\tilde{u}}{dt}=A(t)\tilde{u}+\sum_{j=1}^{m+1}M_j(t)\lambda_j^{\tilde{h}}+F(t),\quad \tilde{u}(t_{s-1})=\lambda_{s-1}^{\tilde{h}},\quad t\in[t_{s-1},t_s),\quad s=\overline{2,m+1}. \tag{1.72}$$

(1.71), (1.72) Коши есептерін де төртінші ретті Рунге-Кутта RK4 әдісі арқылы шешу нәтижесінде жүктелген дифференциалдық теңдеулер үшін қойылған (1.58), (1.59) бастапқы-шеттік есептің сандық шешімі алынады.

Егер $\tilde{u}^{\star}(t_j^{\tilde{h}})=\left(u_1^{\star}(t_j^{\tilde{h}}),u_2^{\star}(t_j^{\tilde{h}}),\ldots,u_{N-1}^{\star}(t_j^{\tilde{h}})\right)$, $j=\overline{0,(m+1)l}$, жүктелген дифференциалдық теңдеулер үшін (1.58), (1.59) есебінің сандық шешімі болса, онда $u^{\star}(t_j^{\tilde{h}},s\tau)=u_s^{\star}(t_j^{\tilde{h}})$, $s=\overline{1,N-1}$ мәндері жүктелген параболалық теңдеу үшін қойылған (1.50)-(1.52) бастапқы-шеттік есебінің сандық шешімін береді [98]-[100].

Мысал 1.4 Зерттеу нәтижелерін нақты әрі көрнекі түрде көрсету мақсатында арнайы тестік есептер қарастырылды. Осыған байланысты ұсынылған сандық әдіс бойынша келесі жүктелген параболалық теңдеу үшін бастапқы-шеттік есеп қарастырылды:

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-xu(t,x)+xtu(0.02,x)+2xt^2u(0.04,x)+(x+t)u(0.06,x)$$

$$+2u(0.08,x)+t^2u(0.1,x)+(x^3-2)cos25\pi t-25\pi x^2 sin25\pi t+\frac{1}{50}(49tx-3x-3t) \qquad (1.73)$$

$$+\left(2x^3-\frac{1}{10}\right)t^2+\frac{21}{25},\qquad (t,x)\in(0,0.1)\times(0,0.5),$$

$$u(0,x)=x^2,\qquad x\in[0,0.5], \qquad (1.74)$$

$$u(t,0)=t,\qquad u(t,\omega)=t+\frac{cos25\pi t}{4},\qquad t\in[0,0.1]. \qquad (1.75)$$

Қарастырылып отырған (1.73)-(1.75) есебінің аналитикалық шешімі $\hat{u}(t,x)=x^2cos25\pi t+t$. x айнымалысы бойынша $\tau=0.1$, $x_i=i\tau$, $i=\overline{0,5}$ арқылы дискреттеу жүргізілді. Дискреттеу нәтижесінде (1.73)-(1.75) есебі келесі жүктелген дифференциалдық теңдеу үшін қойылған бастапқы-шеттік есепке келтірілді:

$$\frac{d\tilde{u}}{dt}=A(t)\tilde{u}+\sum_{j=1}^{5}M_j(t)\tilde{u}(t_j)+F(t),\quad t\in(0,0.1), \qquad (1.76)$$

$$\tilde{u}(0)=d,\quad \tilde{u}\in\mathbb{R}^4. \qquad (1.77)$$

Мұнда $t_1=0.02$, $t_2=0.04$, $t_3=0.06$,$t_4=0.08$, $t_5=0.1$ жүктеме нүктелер және

$$\tilde{u}=\begin{pmatrix}u_1(t)\\u_2(t)\\u_3(t)\\u_4(t)\end{pmatrix},\quad A(t)=\frac{1}{10}\begin{pmatrix}-2001 & 1000 & 0 & 0\\ 1000 & -2002 & 1000 & 0\\ 0 & 1000 & -2003 & 1000\\ 0 & 0 & 1000 & -2004\end{pmatrix},\quad d=\begin{pmatrix}0.01\\0.04\\0.09\\0.16\end{pmatrix},$$

$$M_1(t)=\frac{1}{10}\begin{pmatrix}t & 0 & 0 & 0\\ 0 & 2t & 0 & 0\\ 0 & 0 & 3t & 0\\ 0 & 0 & 0 & 4t\end{pmatrix},\qquad M_2(t)=\frac{1}{5}\begin{pmatrix}t^2 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 2t^2 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 3t^2 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 4t^2\end{pmatrix},$$

$$M_3(t)=\frac{1}{10}\begin{pmatrix}1+10t & 0 & 0 & 0\\ 0 & 2+10t & 0 & 0\\ 0 & 0 & 3+10t & 0\\ 0 & 0 & 0 & 4+10t\end{pmatrix},$$

$$M_4(t)=\begin{pmatrix}2 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 2\end{pmatrix},\quad M_5(t)=\begin{pmatrix}t^2 & 0 & 0 & 0\\ 0 & t^2 & 0 & 0\\ 0 & 0 & t^2 & 0\\ 0 & 0 & 0 & t^2\end{pmatrix},$$

$$F(t)=\frac{1}{500}\begin{pmatrix}50019t-\frac{1999}{2}cos25\pi t-125\pi sin25\pi t-53t^2+407\\ 68t-996cos25\pi t-500\pi sin25\pi t-50t^2+374\\ 117t-\frac{1973}{2}cos25\pi t-1125\pi sin25\pi t-35t^2+321\\ 50166t+11532cos25\pi t-2000\pi sin25\pi t-2t^2+248\end{pmatrix}.$$

(1.76), (1.77) жүктелген дифференциалдық теңдеу үшін бастапқы-шеттік есебін шешу үшін Джумабаевтың параметрлеу әдісінің алгоритмі қолданылды. Осы әдістің алгоритміне сәйкес, $[0,0.1)$ аралығы $[0,0.1)=\bigcup_{s=1}^{5}[t_{s-1},t_s)$ жүктеме нүктелер арқылы ішкі аралықтарға бөлінді.

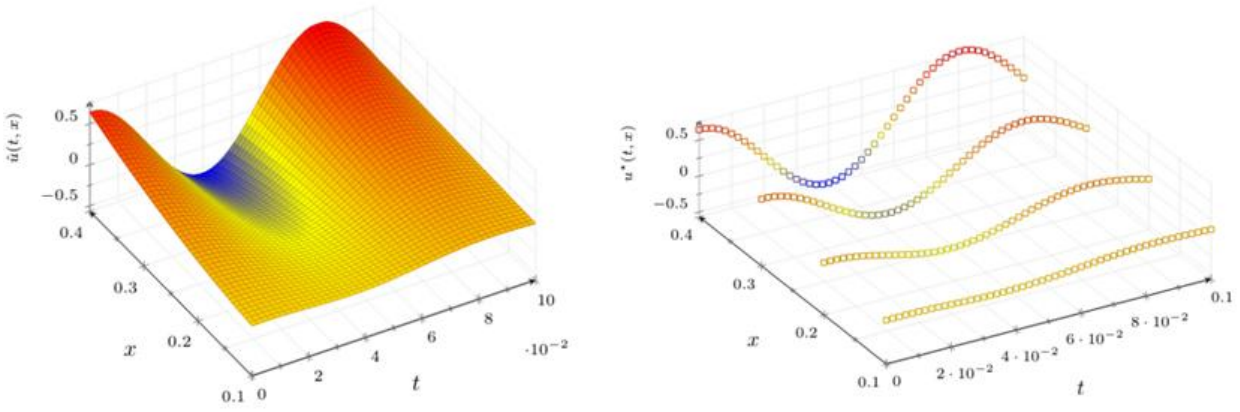
Жоғарыда ұсынылған алгоритмді пайдалана отырып, (1.70) сызықтық алгебралық теңдеулер жүйесі құрастырылды. Аталған жүйені шешу нәтижесінде белгісіз λ параметрлерінің сандық мәндері анықталды:

$$\lambda_1=\begin{pmatrix}0.020000073\\ 0.020000095\\ 0.020000777\\ 0.019998533\end{pmatrix},\quad \lambda_2=\begin{pmatrix}0.029999852\\ 0.00000045\\ -0.050003705\\ -0.110004433\end{pmatrix},\quad \lambda_3=\begin{pmatrix}0.059999886\\ 0.059999882\\ 0.059999307\\ 0.060001477\end{pmatrix},$$

$$\lambda_4=\begin{pmatrix}0.090000157\\ 0.119999567\\ 0.170003749\\ 0.239994353\end{pmatrix},\quad \lambda_5=\begin{pmatrix}0.100000126\\ 0.100000135\\ 0.100000731\\ 0.099998437\end{pmatrix}.$$

$u^{\star}(t_j^{\tilde{h}}, s\tau) = u_s^{\star}(t_j^{\tilde{h}})$, $\hat{t}_j = 0.002\,j$, $j = \overline{0,50}$, $s = \overline{1,4}$, $\tau = 0.1$ мәндері (1.73)-(1.75) жүктелген параболалық теңдеу үшін бастапқы-шеттік есебінің сандық шешімі болады.

(1.73)-(1.75) жүктелген параболалық теңдеу үшін бастапқы-шеттік есебінің $\hat{u}(t,x)$ аналитикалық шешімі және $u^{\star}(t,x)$ оны сандық шешім кескіні 1 суретте көрсетілген.



(а) (ә)

Сурет 1. (а) аналитикалық және (ә) сандық шешім кескіні

(1.73)-(1.75) жүктелген параболалық теңдеу үшін бастапқы-шеттік есебінің аналитикалық $\hat{u}(t,x)$ шешімі мен $u^{\star}(t,x)$ сандық шешімі арасындағы абсолюттік қателік шамасы:

$$\max_{j=0,50,i=1,4} \left\| \hat{u}(t_j^{\tilde{h}}, x_i) - u^{\star}(t_j^{\tilde{h}}, x_i) \right\| < 0.0000058.$$

Мысал 1.5 Келесі мысалда бір ғана жүктеме нүктесі бар $(t,x) \in \Omega = [0,1]\times[0,1]$ тіктөртбұрышында жүктелген параболалық теңдеу үшін бастапқы-шеттік есеп қарастырылды:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - u(t,x) + tu(0.5,x) + \frac{t}{2} + x - tx + 1, \quad (t,x) \in \Omega, \tag{1.78}$$

$$u(0,x)=x\,,\qquad x\in[0,1]\,, \tag{1.79}$$

$$u(t,0)=t,\qquad u(t,1)=t+1,\qquad t\in[0,1]. \tag{1.80}$$

(1.78)-(1.80) есебінің аналитикалық шешімі $\hat{u}(t,x)=t+x$. Сынықтар әдісі бойынша, кеңістік айнымалысын $N=3$ бөлікке бөлеміз. Сәйкесінше келесі түрдегі жүктелген дифференциалдық теңдеу үшін бастапқы-шеттік есеп қарастырылады:

$$\frac{d\tilde{u}}{dt}=\begin{pmatrix}-19 & 9\\ 9 & -19\end{pmatrix}\tilde{u}+\begin{pmatrix}t & 0\\ 0 & t\end{pmatrix}\tilde{u}(0.5)+\frac{1}{6}\begin{pmatrix}55t+8\\ 53t+64\end{pmatrix},\quad \tilde{u}\in\mathbb{R}^2,\quad t\in[0,1], \tag{1.81}$$

$$\tilde{u}(0)=\begin{pmatrix}1/3\\ 2/3\end{pmatrix}. \tag{1.82}$$

(1.81), (1.82) есебінің аналитикалық шешімі $\tilde{u}_{анал.ш}(t)=\begin{pmatrix}u_{анал.ш}(t,1/3)\\ u_{анал.ш}(t,2/3)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}t+1/3\\ t+2/3\end{pmatrix}$.
(1.81), (1.82) есебін шешу Бөлім 1.7-де келтірілген Джумабаев параметрлеу әдісін қолданамыз. Яғни әдіс алгоритмі бойынша жүктелген $t_1=0.5$ нүктесінде $[0,1)=[0,0.5)\cup[0.5,1)$ аралықтарына бөлеміз және параметр енгіземіз.

Кесте 4-те (1.78)-(1.80) жүктелген параболалық теңдеу үшін бастапқы-шеттік есептің $\hat{u}(t,x)$ аналитикалық шешімі мен $u^*(t,x)$ сандық шешім арасындағы абсолюттік қателіктері есептелді. Абсолюттік қателіктің максимал мәні, $\max\limits_{j=0,20,i=1,3}\|u(t_j^{\tilde{h}},x_i)-u^*(t_j^{\tilde{h}},x_i)\|<1.2\times10^{-14}$, $t_j^{\tilde{h}}=0.05j$, $j=\overline{0,20}$, $x_i=i/3$, $i=\overline{1,3}$ шамасынан аспайды.

Кесте 4. (1.78)-(1.80) есебінің аналитикалық және сандық шешім арасындағы абсолют қателіктер

t	$\lvert u_{анал.ш}(t,\tau)-u_{сан.ш}(t,\tau)\rvert$	$\lvert u_{анал.ш}(t,2\tau)-u_{сан.ш}(t,2\tau)\rvert$
0	0	0
0.05	0	0

0.1	5.2×10^{-15}	5.5×10^{-15}
0.15	4.2×10^{-15}	4.6×10^{-15}
0.2	8.5×10^{-15}	2.7×10^{-15}
0.25	4.5×10^{-15}	2.4×10^{-15}
0.3	1.2×10^{-14}	0
0.35	1.03×10^{-14}	7.3×10^{-15}
0.4	5.4×10^{-15}	0
0.45	6.8×10^{-15}	3.5×10^{-15}
0.5	7.5×10^{-15}	3.5×10^{-15}
0.55	8.2×10^{-15}	1.7×10^{-15}
0.6	1.08×10^{-14}	1.1×10^{-15}
0.65	3.5×10^{-15}	2.4×10^{-15}
0.7	3.3×10^{-15}	0
0.75	1.1×10^{-15}	2.4×10^{-15}
0.8	2.2×10^{-15}	0
0.85	0	1.9×10^{-15}
0.9	1.9×10^{-15}	0
0.95	0	1.9×10^{-15}
1	2.2×10^{-15}	0

Мысал 1.6 $(t,x)\in\overline{\Omega}=[0;3]\times[0;3]$ тіктөртбұрышында (1.50)-(1.52) жүктелген параболалық теңдеу үшін келесідей есеп қарастырылды. Берілгендері:

$$a(t,x)=1,\quad b(t,x)=-x,\quad k(t,x)=t-1,$$

$$f(t,x)=xe^{-t}(x-1)-xe^{-1}(t-1),$$

$$\varphi(x)=x,\ \psi_0(t)=0,\ \psi_1(t)=3e^{-t}.$$

Жүктеме $t=1$ нүктесінде қарастырылды. Қарастырылып отырған есептің аналитикалық шешімі $u_{анал.ш}(t,x)=xe^{-t}$. Ұсынылған сандық алгоритмдердің дәлдігін бағалау мақсатында есеп кеңістік айнымалысы бойынша әртүрлі торлық бөлулер үшін ($N=3$, $N=10$ және $N=100$) зерттелді. Жүргізілген сандық эксперименттердің нәтижесінде есептелген сандық шешім мен аналитикалық шешім арасындағы қателіктер есептелінді:

$$\max_{j=0,40,i=1,3}\left\|\hat{u}(t_j^{\tilde{h}},x_i)-u^{\star}(t_j^{\tilde{h}},x_i)\right\|<1.86\times10^{-5},\ t_j^{\tilde{h}}=0.075j,\ j=\overline{0.40},\ x_i=i,\ i=\overline{1,3},$$

$$\max_{j=0,150,i=1,10}\left\|\hat{u}(t_j^{\tilde{h}},x_i)-u^{\star}(t_j^{\tilde{h}},x_i)\right\|<1.76\times10^{-6},\ t_j^{\tilde{h}}=0.02j,\ j=\overline{0,150},\ x_i=0.3i,\ i=\overline{1,10},$$

$\max\limits_{j=0,20000,i=1,100} \left\| \hat{u}(t_j^{\tilde{h}}, x_i) - u^{\star}(t_j^{\tilde{h}}, x_i) \right\| < 1.6 \times 10^{-10}$, $t_j^{\tilde{h}} = 0.00015\, j$, $j = \overline{0,20000}$, $x_i = 0.03i$, $i = \overline{1,100}$.

Мұнда, $\hat{u}\left(t_j^{\tilde{h}}, x_i\right)$ аналитикалық және $u^*\left(t_j^{\tilde{h}}, x_i\right)$ сандық шешімдерінің әртүрлі $t_j^{\tilde{h}}$, x_i мәндеріндегі арасындағы абсолюттік қателіктер есептелді. Алынған нәтижелер кеңістік бөлулер саны N артқан сайын, сәйкесінше тор қадамының азаятынын және сандық шешімнің аналитикалық шешімге жақындай түсетінін көрсетеді. Атап айтқанда, $N = 3$ кезінде қателік шамасы 1.86×10^{-5}-тен аспаса, $N = 100$ болғанда 1.6×10^{-10}-ға дейін төмендейді. Бұл тордың ұсақталуы барысында қателік айтарлықтай азаятындығын, ұсынылған әдістің жоғары дәлдікпен жұмыс істейтінін дәлелдейді. Демек, әзірленген алгоритмнің тиімділігі мен сенімділігі жүргізілген сандық тәжірибелер арқылы көрсетілді.

2 ПАРАБОЛАЛЫҚ ТЕКТЕС ИНТЕГРАЛДЫҚ-ДИФФЕРЕНЦИАЛДЫҚ ТЕҢДЕУЛЕР ҮШІН БЕЙЛОКАЛ ШЕТТІК ЕСЕП

Бұл бөлімде параболалық тектес Фредгольм интегралдық-дифференциалдық теңдеулер үшін бейлокал шеттік есеп зерттелді.

2.1 Есептің қойылымы және параболалық тектес интегралдық-дифференциалдық теңдеулер үшін бейлокал есепке сынықтар әдісін қолдану

$\bar{\Omega} = [0,T] \times [0,\omega]$ тіктөртбұрышында параболалық тектес Фредгольм интегралдық-дифференциалдық теңдеу үшін бейлокал шеттік есеп қарастырылады:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a(t,x)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + b(t,x)u + \Phi(t,x)\int_0^T \Psi(s,x)u(s,x)ds + f(t,x), \quad (t,x) \in \Omega, \tag{2.1}$$

$$B(x)u(0,x) + C(x)u(T,x) = \varphi(x), \quad x \in [0,\omega], \tag{2.2}$$

$$u(t,0) = \psi_0(t), \quad u(t,\omega) = \psi_1(t), \quad t \in [0,T], \tag{2.3}$$

(2.1)-(2.3) есебіне берілген коэффициенттер мен шекаралық функцияларға қатысты келесі болжамдар жасаймыз. $a(t,x) \geq \gamma > 0$, $b(t,x)$, $\Psi(t,x)$, $\Phi(t,x)$, және $f(t,x)$ Ω -да екі айнымалысы бойынша да Гельдер үзіліссіз функциялар. Ал, $\varphi(x)$, $\psi_0(t)$ және $\psi_1(t)$ функциялары жеткілікті тегіс және келесі үйлесімділік шартын қанағаттандырады:

$$B(0)\psi(0) + C(0)\psi(T) = \varphi(0),$$

$$B(\omega)\psi_1(0) + C(\omega)\psi_1(T) = \varphi(\omega).$$

(2.1)-(2.3) параболалық тектес интегралдық-дифференциалдық теңдеулер үшін бейлокал есебінің шешімі деп, $\bar{\Omega}$ тіктөртбұрышында уақыт бойынша бірінші ретті және кеңістік бойынша екінші ретті үзіліссіз туындыларға ие, сондай-ақ (2.1) параболалық тектес интегралдық-дифференциалдық

теңдеуді, (2.2) уақыт бойынша бейлокал шартты және (2.3) шеттік шарттарды қанағаттандыратын $u(t,x)\in C^{1,2}\left(\overline{\Omega}\right)$ функциясын айтамыз.

Бірінші бөлімде қарастырылған жүктелген параболалық теңдеулерге қолданылған сыныктар әдісіне сәйкес τ қадамымен кеңістік айнымалысы бойынша дискреттеу жасалынады: $x_i=i\tau$, $i=0,\ldots,N$, мұнда $N\tau=\omega$. Келесі белгілеулер енгізіледі:

$$u_i(t):=u(t,i\tau),\quad a_i(t):=a(t,i\tau),\quad b_i(t):=b(t,i\tau),\quad \Phi_i(t):=\Phi(t,i\tau),$$

$$\Psi_i(s):=\Psi(s,i\tau),\quad f_i(t):=f(t,i\tau),\quad B_i:=B(i\tau),\quad C_i:=C(i\tau),\quad \varphi_i:=\psi(i\tau).$$

Нәтижесінде, (2.1)-(2.3) есебі келесі дискретті түрге келтіріледі:

$$\frac{du_i}{dt}=a_i(t)\frac{u_{i-1}-2u_i+u_{i+1}}{\tau^2}+b_i(t)u_i+\Phi_i(t)\int_0^T\Psi_i(s)u_i(s)ds+f_i(t), \tag{2.4}$$

$$B_iu_i(0)+C_iu_i(T_0)=\varphi_i,\quad i=\overline{1,N-1}, \tag{2.5}$$

$$u_0(t)=\psi_0(t),\quad u_N(t)=\psi_1(t),\quad t\in[0,T]. \tag{2.6}$$

(2.4)-(2.6) дискреттелген есебінің шешімі деп (2.4) дискреттелген жүйені және (2.5), (2.6) шарттарды қанағаттандыратын, $[0,T]$ аралығында үзіліссіз дифференциалданатын $\{u_1(t),u_2(t),\ldots,u_{N-1}(t)\}$ шешімдер жүйесін айтамыз.

(2.4)-(2.6) есебі матрицалық-векторлық түрде келесідей жазылады:

$$\frac{dv}{dt}=A(t)v+\Phi(t)\int_0^T\Psi(s)v(s)ds+F(t),\quad v\in\mathbb{R}^{N-1},\quad t\in[0,T], \tag{2.7}$$

$$Bv(0)+Cv(T)=D. \tag{2.8}$$

Мұнда $A(t)$, $\Phi(t)$, $\Psi(t)$, B, және C өлшемі $(N-1)\times(N-1)$ болатын матрицалар, ал $F(t)$ және D - $(N-1)$ өлшемді вектор-функциялар. Бұл функциялардың барлығы $[0,T]$ аралығында үзіліссіз. Атап айтқанда,

$$A(t)=\begin{pmatrix} \frac{-2a_1(t)}{\tau^2}+b_1(t) & \frac{a_1(t)}{\tau^2} & \dots & 0 \\ \frac{a_2(t)}{\tau^2} & \frac{-2a_2(t)}{\tau^2}+b_2(t) & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \frac{-2a_{N-1}(t)}{\tau^2}+b_{N-1}(t) \end{pmatrix},$$

$$v(t)=\begin{pmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \\ \vdots \\ u_{N-1}(t) \end{pmatrix}, \qquad F(t)=\begin{pmatrix} \frac{a_1(t)}{\tau^2}\psi_0(t)+f_1(t) \\ f_2(t) \\ \vdots \\ \frac{a_{N-1}(t)}{\tau^2}\psi_1(t)+f_{N-1}(t) \end{pmatrix},$$

$$\Phi(t)=diag\{\Phi_1(t),\Phi_2(t),\dots,\Phi_{N-1}(t)\}, \quad B=diag\{B_1,B_2,\dots,B_{N-1}\},$$

$$\Psi(t)=diag\{\Psi_1(t),\Psi_2(t),\dots,\Psi_{N-1}(t)\}, \quad C=diag\{C_1,C_2,\dots,C_{N-1}\}, \quad D=\{\psi_1,\psi_2,\dots,\psi_{N-1}\}'.$$

(2.7), (2.8) Фредгольм интегралдық-дифференциалдық теңдеу үшін екі нүктелі шеттік есебінің шешімі деп, $[0,T]$ аралығында үзіліссіз дифференциалданатын және (2.7) Фредгольм интегралдық-дифференциалдық теңдеуді және (2.8) екі нүктелік шартты қанағаттандыратын $v(t)$ функциясын айтамыз.

Келесі бөлімде (2.7), (2.8) Фредгольм интегралдық-дифференциалдық теңдеу үшін екі нүктелі шеттік есебіне Джумабаев параметрлеу әдісін қолданып, (2.7), (2.8) есебінің бірмәнді шешілімділігін орнатамыз.

2.2 Интегралдық-дифференциалдық теңдеулер үшін дискреттелген бейлокал есепті шешуге арналған Джумабаев параметрлеу әдісі

(2.7), (2.8) Фредгольм интегралдық-дифференциалдық теңдеу үшін екі нүктелі шеттік есебін шешу үшін [85]-[87] жұмыстарында ұсынылған тәсіл қолданылды. Бұл тәсіл Джумабаевтың параметрлеу әдісін [86] сандық әдістермен [103]-[106] үйлестіруге негізделген. Ұсынылған әдіске сәйкес, $[0,T]$ аралығы m ішкі аралыққа бөлінеді: $[0,T)=\bigcup_{r=1}^{m}[t_{r-1},t_r)$. Нәтижесінде (2.7), (2.8) есебі келесі түрде жазылады:

$$\frac{dv_r}{dt}=A(t)v_r+\Phi(t)\int_0^T\Psi(s)v_r(s)ds+F(t),\ \ v\in\mathbb{R}^{N-1},\ \ t\in[0,T], \tag{2.9}$$

$$Bv_1(0)+C\lim_{t\to t_m-0}v_m(t)=D, \tag{2.10}$$

$$\lim_{t\to t_s-0}v_s(t)=v_{s+1}(t_s),\ \ s=1,\ldots,m-1. \tag{2.11}$$

(2.7), (2.8) және (2.9)-(2.11) есептері өзара пара-пар тұжырымдаулар болып табылады.

λ_r, $r=1,\ldots,m$ арқылы $v(t)$ функциясының сәйкес ішкі аралықтардың сол жақ шеткі нүктелеріндегі мәндерін белгілейік, яғни $\lambda_r=v_r(t_{r-1})\ \ r=1,\ldots,m$. Енді $z_r(t)=v_r(t)-\lambda_r$, $[t_{r-1},\ t_r)$, $r=1,\ldots,m$ алмастыруын енгізсек, онда (2.9)-(2.11) есебі келесі түрге келтіріледі:

$$\frac{dz_r}{dt}=A(t)(z_r+\lambda_r)+\Phi(t)\sum_{j=1}^{m}\int_{t_{j-1}}^{t_j}\Psi(s)(z_j(s)+\lambda_j)ds+F(t),\quad t\in[t_{r-1},t_r), \tag{2.12}$$

$$z_r(t_{r-1})=0,\qquad r=1,\ldots,m, \tag{2.13}$$

$$B\lambda_1+C\lambda_m+C\lim_{t\to T-0}z_m(t)=D, \tag{2.14}$$

$$\lambda_s + \lim_{t \to t_{s-0}} z_s(t) - \lambda_{s+1} = 0, \ s = 1, \ldots, m-1. \qquad (2.15)$$

(2.12)-(2.15) есебінің шешімі $(\lambda^*, z^*[t])$ жұбы болады, мұнда $\lambda^* \in \mathbb{R}^{(N-1)m}$ - параметр, ал $z^*[t]$ - $[t_{r-1}, t_r)$ аралығында үзіліссіз дифференциалданатын функция. (2.12)-(2.15) есебінің шешімі деп (2.12) интегралдық-дифференциалдық теңдеуін, (2.13) бастапқы және (2.14), (2.15) шарттарын қанағаттандыратын $(\lambda^*, z^*[t])$ жұбын айтамыз.

(2.7), (2.8) және (2.12)-(2.15) есептері өзара пара-пар. Атап айтқанда, егер v^* функциясы (2.7), (2.8) есебінің шешімі болса, онда $\lambda^* = (v^*(t_0), v^*(t_1), \ldots, v^*(t_{m-1}))$ және $z^*[t] = (v^*(t) - v^*(t_0), v^*(t) - v^*(t_1), \ldots, v^*(t) - v^*(t_{m-1}))$ арқылы анықталған $(\lambda^*, z^*[t])$ жұбы (2.12)-(2.15) есебінің шешімі болады. Керісінше, егер $(\lambda^*, z^*[t]) \in \mathbb{R}^{(N-1)m} \times C([0,T], t_r, \mathbb{R}^{(N-1)m})$ жұбы (2.12)-(2.15) есебінің шешімі болса, онда $v^*(t) = z_r^*(t) + \lambda_r^*$, $t \in [t_{r-1}, t_r)$, $r = 1, \ldots, m$, және $v^*(T) = \lim_{t \to T-0} z_m^*(t) + \lambda_m^*$ арқылы анықталған v функциясы (2.7), (2.8) есебінің шешімі болады.

$\chi_r(t)$ - $\frac{dv}{dt} = A(t)v$ дифференциалдық теңдеулер жүйесінің $[t_{r-1}, t_r]$ аралығындағы іргелі матрицасы болсын, $r = \overline{1,m}$. Онда (2.12), (2.13) Коши есебінің шешімі келесі түрде жазылады:

$$z_r(t) = \chi_r(t) \int_{t_{r-1}}^{t} \chi_r^{-1}(\eta) \left(A(\eta)\lambda_r + \Phi(\eta) \sum_{j=1}^{m} \int_{t_{j-1}}^{t_j} \Psi(s) z_j(s) ds \right.$$
$$\left. + \Phi(\eta) \sum_{j=1}^{m} \int_{t_{j-1}}^{t_j} \Psi(s) ds \lambda_j + F(\eta) \right) d\eta, \quad t \in [t_{r-1}, t_r), \quad r = 1, \ldots, m, \qquad (2.16)$$

Келесі белгілеуді енгіземіз: $\zeta = \sum_{j=1}^{m} \int_{t_{j-1}}^{t_j} \Psi(s) z_j(s) ds$. Онда (2.16) интегралдық теңдеулер жүйесін келесі пара-пар түрде жазуға болады:

$$z_r(t) = \chi_r(t)\int_{t_{r-1}}^{t} \chi_r^{-1}(\eta)\Phi(\eta)d\eta\cdot\zeta + \chi_r(t)\int_{t_{r-1}}^{t} \chi_r^{-1}(\eta)A(\eta)d\eta\cdot\lambda_r$$
$$+ \chi_r(t)\int_{t_{r-1}}^{t} \chi_r^{-1}(\eta)\Phi(\eta)\sum_{j=1}^{m}\int_{t_{j-1}}^{t_j}\Psi(s)dsd\eta\cdot\lambda_j \qquad (2.17)$$
$$+ \chi_r(t)\int_{t_{r-1}}^{t} \chi_r^{-1}(\eta)F(\eta)d\eta, \quad t\in[t_{r-1},t_r), \quad r=1,\ldots,m.$$

(2.17) теңдеуінің екі жағын да $\Psi(t)$-ге көбейтіп, кейін $[t_{r-1},t_r]$, $r=1,\ldots,m$, аралықтары бойынша интегралдап және алынған нәтижелерді $r=1,\ldots,m$ бойынша қоссақ, онда $\zeta\in\mathbb{R}^{N-1}$ векторына қатысты келесі сызықтық теңдеулер жүйесі алынады:

$$\zeta = H(\Delta_m)\zeta + \sum_{j=1}^{m} V_j(\Delta_m)\lambda_j + g(F,\Delta_m). \qquad (2.18)$$

Мұнда барлық матрицалардың өлшемі $(N-1)\times(N-1)$ болып табылады.

$$H(\Delta_m) = \sum_{r=1}^{m}\int_{t_{r-1}}^{t_r}\Psi(\xi)\chi_r(\xi)\int_{t_{r-1}}^{\xi}\chi_r^{-1}(\eta)\Phi(\eta)d\eta d\xi,$$

$$V_j(\Delta_m) = \sum_{r=1}^{m}\int_{t_{r-1}}^{t_r}\Psi(\xi)\chi_r(\xi)\int_{t_{r-1}}^{\xi}\chi_r^{-1}(\eta)\Phi(\eta)d\eta d\xi\int_{t_{j-1}}^{t_j}\Psi(s)ds + \int_{t_{j-1}}^{t_j}\Psi(\xi)\chi_j(\xi)\int_{t_{j-1}}^{\xi}\chi_j^{-1}(\eta)A(\eta)d\eta d\xi,$$

ал сәйкес вектордың өлшемі $(N-1)$:

$$g(F,\Delta_m) = \sum_{r=1}^{m}\int_{t_{r-1}}^{t_r}\Psi(\xi)\chi_r(\xi)\int_{t_{r-1}}^{\xi}\chi_r^{-1}(\eta)F(\eta)d\eta d\xi.$$

(2.18) жүйесін келесі түрде жазуға болады:

$$[I - H(\Delta_m)]\zeta = \sum_{j=1}^{m} V_j(\Delta_m)\lambda_j + g(F, \Delta_m),$$

мұнда I - $(N-1)\times(N-1)$ өлшемді бірлік матрица.

$I - H(\Delta_m)$ матрицасының кері матрицасы бар болсын. Онда ζ келесі формула арқылы анықталады:

$$\zeta = [I - H(\Delta_m)]^{-1}\sum_{j=1}^{m} V_j(\Delta_m)\lambda_j + [I - H(\Delta_m)]^{-1} g(F, \Delta_m), \qquad (2.19)$$

(2.19) өрнегінің оң жағын (2.17) өрнегіндегі ζ орнына қойсақ, келесі өрнек алынады:

$$\begin{aligned} z_r(t) = {} & \chi_r(t)\int_{t_{r-1}}^{t} \chi_r^{-1}(\eta)\Phi(\eta)d\eta[I - H(\Delta_m)]^{-1}\sum_{j=1}^{m} V_j(\Delta_m)\lambda_j \\ & + \chi_r(t)\int_{t_{r-1}}^{t} \chi_r^{-1}(\eta)\Phi(\eta)\sum_{j=1}^{m}\int_{t_{j-1}}^{t_j} \Psi(s)ds d\eta\cdot\lambda_j + \chi_r(t)\int_{t_{r-1}}^{t} \chi_r^{-1}(\eta)A(\eta)d\eta\cdot\lambda_r \\ & + \chi_r(t)\int_{t_{r-1}}^{t} \chi_r^{-1}(\eta)\Phi(\eta)d\eta[I - H(\Delta_m)]^{-1} g(F, \Delta_m) \\ & + \chi_r(t)\int_{t_{r-1}}^{t} \chi_r^{-1}(\eta)F(\eta)d\eta, \quad t\in[t_{r-1}, t_r), \quad r = 1,\ldots,m. \end{aligned} \qquad (2.20)$$

Мұнда

$$W_{r,j}(\Delta_m) = \chi_r(t)\int_{t_{r-1}}^{t} \chi_r^{-1}(\eta)\Phi(\eta)d\eta\left([I - H(\Delta_m)]^{-1}V_j(\Delta_m) + \int_{t_{j-1}}^{t_j}\Psi(s)ds\right),\ r\neq j, \quad r, j = 1,\ldots,m,$$

$$\begin{aligned} W_{r,r}(\Delta_m) = {} & \chi_r(t)\int_{t_{r-1}}^{t} \chi_r^{-1}(\eta)\Phi(\eta)d\eta\left([I - H(\Delta_m)]^{-1}V_r(\Delta_m) + \int_{t_{r-1}}^{t_r}\Psi(s)ds\right) \\ & + \chi_r(t)\int_{t_{r-1}}^{t} \chi_r^{-1}(\eta)A(\eta)d\eta, \quad r = 1,\ldots,m, \end{aligned}$$

$$F_r(\Delta_m) = \chi_r(t)\int_{t_{r-1}}^{t} \chi_r^{-1}(\eta)\Phi(\eta)d\eta \cdot [I - H(\Delta_m)]^{-1} g(F, \Delta_m) + \chi_r(t)\int_{t_{r-1}}^{t} \chi_r^{-1}(\eta)F(\eta)d\eta .$$

Сол жақ шектерді табамыз:

$$\lim_{t \to t_r - 0} z_r(t) = \sum_{j=1}^{m} W_{r,j}(\Delta_m)\lambda_j + F_r(\Delta_m), \qquad r = 1, \ldots, m. \tag{2.21}$$

(2.21)-дегі табылған сол жақ шектерді (2.14), (2.15) шарттарына қойсақ, онда λ_r, $r = 1, \ldots, m$ параметрлеріне қатысты сызықтық алгебралық теңдеулер жүйесі алынады:

$$B\lambda_1 + C\lambda_m + C\sum_{j=1}^{m} W_{m,j}(\Delta_m)\lambda_j = D - CF_m(\Delta_m), \tag{2.22}$$

$$\lambda_s + \sum_{j=1}^{m} W_{s,j}(\Delta_m)\lambda_j - \lambda_{s+1} = -F_s(\Delta_m), \quad s = 1, \ldots, m-1. \tag{2.23}$$

$Q(\Delta_m)$ арқылы (2.22), (2.23) жүйелерінің сол жақ бөлігіндегі λ_r, $r = 1, \ldots, m$ параметрлерінің коэффициенттерінен құралған матрицаны белгілейміз:

$$Q(\Delta_m)\lambda = \mathcal{F}(\Delta_m), \quad \lambda \in \mathbb{R}^{(N-1)m}, \tag{2.24}$$

мұнда $\mathcal{F}(\Delta_m) = \left(D - CF_m(\Delta_m), F_1(\Delta_m), \ldots, F_{m-1}(\Delta_m)\right) \in \mathbb{R}^{(N-1)m}$.

Анықтама 2.1 [87] Егер $[I - H(\Delta_m)]$ матрицасының кері матрицасы бар болса, онда Δ_m бөлінуі регулярлы деп аталады.

Дифференциалдық теңдеулер жүйесінің кез-келген іргелі матрицасын $\chi_r(t) = \chi_r^0(t) \cdot C_r$, түрінде жазуға болады. Мұнда $\chi_r^0(t)$ - $\left[t_{r-1}, t_r\right]$ аралығындағы $\chi_r^0(t_{r-1}) = I$ шартын қанағаттандыратын іргелі матрица, ал C_r -кез-келген кері матрица. Сондықтан келесі теңдік орындалады:

$$H(\Delta_m)=\sum_{r=1}^{m}\int_{t_{r-1}}^{t_r}\Psi(\xi)\chi_r^0(\xi)C_r\int_{t_{r-1}}^{\xi}\left[\chi_r^{-1}(\eta)C_r\right]^{-1}\Phi(\eta)d\eta d\xi$$
$$=\sum_{r=1}^{m}\int_{t_{r-1}}^{t_r}\Psi(\xi)\chi_r^0(\xi)\int_{t_{r-1}}^{\xi}\left[\chi_r^{-1}(\eta)\right]^{-1}\Phi(\eta)d\eta d\xi.$$

Демек, Δ_m бөлінуінің регулярлығы дифференциалдық теңдеулер жүйесінің іргелі матрицасын таңдауға тәуелді болмайды.

Анықтама 2.2 [87] Егер кез-келген $\lambda\in\mathbb{R}^{(N-1)m}$ және $F(t)\in C\left([0,T],\mathbb{R}^{N-1}\right)$ үшін (2.12), (2.13) Коши есебінің жалғыз шешімі бар болса, онда ол бірмәнді шешілімді деп аталады.

(2.12), (2.13) Коши есебі (2.16) интегралдық теңдеулер жүйесіне пара-пар. Өзектің түріне байланысты бұл жүйе $\zeta\in\mathbb{R}^{N-1}$ параметріне қатысты (2.18) сызықтық алгебралық жүйесіне пара-пар болады. Демек, Коши есебі тек Δ_m бөлінуі регулярлы болғанда ғана бірмәнді шешілімді болады.

Лемма 2.1 [87] Δ_m бар болсын және келесі тұжырымдар орындалады:

а) $\lambda^*=(\lambda_1^*,\lambda_2^*,\ldots,\lambda_{m+1}^*)\in\mathbb{R}^{(N-1)m}$ векторы (2.7), (2.8) есебінің шешімінің ішкі аралықтарындағы бастапқы нүктелерінен құралсын, яғни $\lambda_r^*=v^*(t_{r-1})$, $r=\overline{1,m}$. Онда бұл вектор (2.24) жүйесін қанағаттандырады.

ә) Егер $\lambda=(\tilde{\lambda}_1,\tilde{\lambda}_2,\ldots,\tilde{\lambda}_{m+1})\in\mathbb{R}^{(N-1)m}$ векторы (2.24) жүйесінің шешімі болса және $\tilde{z}[t]=\left(\tilde{z}_1(t),\tilde{z}_2(t),\ldots,\tilde{z}_m(t)\right)$ функциялар жүйесі $\lambda_r=\tilde{\lambda}_r$, $r=\overline{1,m}$ кезінде (2.12), (2.13) Коши есебінің шешімі болса, онда $\hat{v}(t)=\tilde{z}_r(t)+\tilde{\lambda}_r$, $t\in[t_{r-1},t_r)$, $s=\overline{1,m}$, және $\hat{v}(T)=\tilde{\lambda}_m+\lim\limits_{t\to T-0}\tilde{z}_m(t)$ теңдіктерімен арқылы анықталған $\hat{v}(t)$ функциясы бастапқы (2.7), (2.8) есебінің шешімі болады.

Лемманың дәлелдеуі [109, 1155 бет] еңбегінде Лемма 1-де дәлелденген.

Келесі теоремадан (2.24) жүйесінің шешімінің табылуынан (2.7), (2.8) шеттік есебінің шешімінің табылуымен пара пар екенін көреміз.

Теорема 2.1 $[I-H(\Delta_m)]:\mathbb{R}^{(N-1)}\to\mathbb{R}^{(N-1)}$ және $Q(\Delta_m):\mathbb{R}^{(N-1)m}\to\mathbb{R}^{(N-1)m}$ матрицаларының кері матрицалары бар болсын. Онда кез келген $F(t)\in C([0,T],\mathbb{R}^{(N-1)m})$, $D\in\mathbb{R}^{(N-1)m}$ үшін (2.7), (2.8) есебінің жалғыз $v^*(t)$ шешімі бар болады және келесі бағалау орындалады:

$$\left\|v^*\right\|_1 \le \mathcal{N}(\Delta_m)\max(\|D\|,\|F\|_1),$$

мұнда

$$\|F\|_1 = \max_{t\in[0,T]}|F(t)| \le \max_{t\in[0,T]}\left(\frac{a_1(t)\cdot|\psi_0(t)|}{\tau^2}+|f_1(t)|, \max_{i=2,N-2}|f_i(t)|, \frac{a_{N-1}(t)\cdot|\psi_1(t)|}{\tau^2}+|f_{N-1}(t)|\right)$$
$$\le \left(\max_{t\in[0,T]}\max_{i=1,N-1}\frac{1}{\tau^2}a_i(t)+1\right)\max\left(\max_{t\in[0,T]}(|\psi_0(t)|,|\psi_1(t)|), \max_{t\in[0,T]}\max_{i=1,N-1}|f_i(t)|\right),$$

$$\|D\|_1 = \max_{t\in[0,T]}|D| = \max_{t\in[0,T]}\max_{i=1,N-1}|\psi_i(t)|,$$

$$\mathcal{N}(\Delta_m) \le \left[e^{\alpha\varpi}\left\{\overline{\Phi}\left[\left[\left\|[I-H(\Delta_m)]^{-1}\right\|\overline{\Psi}(T)\left(e^{\alpha\varpi}-1+e^{\alpha\varpi}\overline{\Phi}\overline{\Psi}(T)\right)+\overline{\Psi}(T)\right]+1\right\}\right.\right.$$
$$\times\gamma_*(\xi)\left(1+\|C\|\right)\max\left\{1,\varpi e^{\alpha\varpi}\left(1+e^{\alpha\varpi}\overline{\Phi}\cdot\overline{\Psi}(T)[I-H(\Delta_m)]^{-1}\right)\right\}$$
$$\left.+e^{\alpha\varpi}\varpi\left(\overline{\Phi}\left[\left\|[I-H(\Delta_m)]^{-1}\right\|\overline{\Psi}(T)e^{\alpha\varpi}+1\right)\right]\right],$$

$$\alpha = \max_{t\in[0,T]}\|A(t)\|,\quad \varpi = \max_{r=1,m}(t_r-t_{r-1}),\quad \overline{\Phi} = \max_{r=1,m}\int_{t_{r-1}}^{t_r}\|\Phi(t)\|dt,\quad \overline{\Psi}(T) = \int_0^T\|\Psi(s)\|ds.$$

Теорема 2.1 дәлелдеуі [88] жұмысындағы 2.1-теореманың дәлелдеуіне ұқсас болып келеді.

Дәлелдеуі. $F(t)\in C\left([0,T],\mathbb{R}^{N-1}\right)$ функциясы және $D\in\mathbb{R}^{(N-1)}$ векторы берілсін. $Q_*(\Delta_m)$ матрицасының кері матрицасының бар болуын пайдалансақ, (2.24) сызықтық алгебралық теңдеулер жүйесінің $\lambda^* = \left[Q_*(\Delta_m)\right]^{-1}\mathcal{F}_*(\Delta_m)$ шешімі табылады. (2.12)-(2.13) Коши есебін $\lambda=\lambda^*$ кезінде шешу арқылы $z^*[t] = \left(z_1^*(t), z_2^*(t),\ldots,z_m^*(t)\right)$ функциялар жүйесі анықталады. Δ_m бөлінуі $z^*[t]$ функциялар жүйесінің бар болуы мен жалғыздығын қамтамасыз етеді, мұнда оның элементтері (2.20) өрнегінің оң жақ бөлігі $z_r^*(t) = \chi_r(t)\tilde{\lambda}_r^*$, $\lambda_m^*\in\mathbb{R}^{(N-1)m}$ арқылы анықталады. Сонда Лемма 2.1 сәйкес $v^*(t) = z^*{}_r(t)+\lambda_r^*$, $t\in[t_{r-1},t_r)$, $r=\overline{1,m}$, және $v^*(T) = \lambda_m^* + \lim_{t\to T-0} z_m^*(t)$ теңдіктерімен анықталған функция бастапқы (2.7), (2.8) есебінің шешімі болады. Енді $\left\|v^*\right\|_1 \le \mathcal{N}(\Delta_m)\max(\|D\|,\|F\|_1)$ бағалауын дәлелдейік.

Бөлім 1-дегі Теорема 1.2 қолданылған бағалауға сәйкес бағалаулар қолданылады.

$g(F,\Delta_m)$ және $F_r(\Delta_m)$ функцияларының бағалауларын алайық.

$$\|g(F,\Delta_m)\| \le \sum_{r=1}^{m} \int_{t_{r-1}}^{t_r} \|\Psi(\xi)\| \left\| \chi_r(\xi) \int_{t_{r-1}}^{\xi} \chi_r^{-1}(\eta) F(\eta) d\eta \right\| d\xi$$
$$\le \sum_{r=1}^{m} \int_{t_{r-1}}^{t_r} \|\Psi(\xi)\| dt \cdot e^{\alpha\varpi} \cdot \varpi \cdot \|F\|_1 = \int_0^T \|\Psi(t)\| dt \cdot e^{\alpha\varpi} \cdot \varpi \cdot \|F\|_1,$$

$$\|F_r(\Delta_m)\| = e^{\alpha\varpi} \cdot [I - H(\Delta_m)]^{-1} \int_{t_{r-1}}^{t_r} \|\Phi(t)\| dt \cdot \|g(F,\Delta_m)\| + e^{\alpha\varpi} \cdot \varpi \|F\|_1,$$

$$\|F_r(\Delta_m)\| = e^{\alpha\varpi} \cdot [I - H(\Delta_m)]^{-1} \int_{t_{r-1}}^{t_r} \|\Phi(t)\| dt \cdot \left(\int_0^T \|\Psi(t)\| dt \cdot e^{\alpha\varpi} \cdot \varpi \cdot \|F\|_1 \right) + e^{\alpha\varpi} \cdot \varpi \|F\|_1$$
$$\le e^{\alpha\varpi} \cdot [I - H(\Delta_m)]^{-1} \cdot \overline{\Phi} \cdot \overline{\Psi}(T) e^{\alpha\varpi} \cdot \varpi \cdot \|F\|_1 + e^{\alpha\varpi} \cdot \varpi \|F\|_1$$
$$\le e^{\alpha\varpi} \cdot \varpi \|F\|_1 \left(1 + e^{\alpha\varpi} \overline{\Phi} \cdot \overline{\Psi}(T) [I - H(\Delta_m)]^{-1}\right),$$

$$\|F_*(\Delta_m)\| \le \max\left(\|D\|, \max_{r=1,m} \|F_r(\Delta_m)\|\right)\left(1 + \|C\|\right),$$

$$\|F_*(\Delta_m)\| \le \left(1 + \|C\|\right) \max\left\{1, \varpi e^{\alpha\varpi} \left(1 + e^{\alpha\varpi} \overline{\Phi} \cdot \overline{\Psi}(T) [I - H(\Delta_m)]^{-1}\right)\right\} \max\left(\|D\|, \|F\|_1\right).$$

(1.20) және жоғарыдағы теңсіздік бойынша, сондай-ақ матрицаның кері матрицасының бар болуы келесі бағалаудың орындалатынын көрсетеді:

$$\|\lambda^*\| = \left\|[Q_*(\Delta_m)]^{-1}\right\| \|F_*(\Delta_m)\| \le \gamma_*(\xi)\left(1 + \|C\|\right)$$
$$\max\left\{1, \varpi e^{\alpha\varpi} \left(1 + e^{\alpha\varpi} \overline{\Phi} \cdot \overline{\Psi}(T) [I - H(\Delta_m)]^{-1}\right)\right\} \max\left(\|D\|, \|F\|_1\right),$$

(1.16), (1.17) теңдіктерінің бағалауы

$$\left\|z^*[\cdot]\right\|_2 \le \left\{e^{\alpha\varpi}\overline{\Phi}\left[\left\|[I-H(\Delta_m)]^{-1}\right\|\overline{\Psi}(T)\right.\right.$$
$$\left.\left.\times\left(e^{\alpha\varpi}-1+e^{\alpha\varpi}\overline{\Phi}\overline{\Psi}(T)\right)+\overline{\Psi}(T)\right]+\left(e^{\alpha\varpi}-1\right)\right\}\left\|\lambda^*\right\|$$
$$+e^{\alpha\varpi}\left[\overline{\Phi}\left[\left\|[I-H(\Delta_m)]^{-1}\right\|\overline{\Psi}(T)e^{\alpha\varpi}+1\right]\right\|F\|_1,$$

Осыдан келесі теңсіздік шығады:

$$\left\|z^*[\cdot]\right\|_2 \le \left\{e^{\alpha\varpi}\overline{\Phi}\left[\left\|[I-H(\Delta_m)]^{-1}\right\|\overline{\Psi}(T)\right.\right.$$
$$\left.\left.\times\left(e^{\alpha\varpi}-1+e^{\alpha\varpi}\overline{\Phi}\overline{\Psi}(T)\right)+\overline{\Psi}(T)\right]+\left(e^{\alpha\varpi}-1\right)\right\}\gamma_*(\xi)\left(1+\|C\|\right)$$
$$\max\left\{1,\varpi e^{\alpha\varpi}\left(1+e^{\alpha\varpi}\overline{\Phi}\cdot\overline{\Psi}(T)[I-H(\Delta_m)]^{-1}\right)\right\}\max\left(\|D\|,\|F\|_1\right)$$
$$+e^{\alpha\varpi}\varpi\left[\overline{\Phi}\left[\left\|[I-H(\Delta_m)]^{-1}\right\|\overline{\Psi}(T)e^{\alpha\varpi}+1\right]\right\|F\|_1,$$

$$\left\|z^*[\cdot]\right\|_2 \le \left(1+\|C\|\right)\max\left\{1,\varpi e^{\alpha\varpi}\left(1+e^{\alpha\varpi}\overline{\Phi}\cdot\overline{\Psi}(T)[I-H(\Delta_m)]^{-1}\right)\right\}\max\left(\|D\|,\|F\|_1\right)$$
$$\times\left[\left\{e^{\alpha\varpi}\overline{\Phi}\left[\left\|[I-H(\Delta_m)]^{-1}\right\|\overline{\Psi}(T)\right.\right.\right.$$
$$\left.\left.\left.\times\left(e^{\alpha\varpi}-1+e^{\alpha\varpi}\overline{\Phi}\overline{\Psi}(T)\right)+\overline{\Psi}(T)\right]+\left(e^{\alpha\varpi}-1\right)\right\}\right]\gamma_*(\xi)$$
$$+e^{\alpha\varpi}\varpi\left[\overline{\Phi}\left[\left\|[I-H(\Delta_m)]^{-1}\right\|\overline{\Psi}(T)e^{\alpha\varpi}+1\right]\right\|F\|_1,$$

$$\left\|v^*(t)\right\| \le \left\|z^*[\cdot]\right\|_2+\left\|\lambda^*\right\| \le$$
$$\left(1+\|C\|\right)\max\left\{1,\varpi e^{\alpha\varpi}\left(1+e^{\alpha\varpi}\overline{\Phi}\cdot\overline{\Psi}(T)[I-H(\Delta_m)]^{-1}\right)\right\}\max\left(\|D\|,\|F\|_1\right)$$
$$\times\left[\left\{e^{\alpha\varpi}\overline{\Phi}\left[\left\|[I-H(\Delta_m)]^{-1}\right\|\overline{\Psi}(T)\right.\right.\right.$$
$$\left.\left.\left.\times\left(e^{\alpha\varpi}-1+e^{\alpha\varpi}\overline{\Phi}\overline{\Psi}(T)\right)+\overline{\Psi}(T)\right]+\left(e^{\alpha\varpi}-1\right)\right\}\right]\gamma_*(\xi)$$
$$+e^{\alpha\varpi}\varpi\left(\overline{\Phi}\left[\left\|[I-H(\Delta_m)]^{-1}\right\|\overline{\Psi}(T)e^{\alpha\varpi}+1\right)+\gamma_*(\xi)\left(1+\|C\|\right)\right.$$
$$\max\left\{1,\varpi e^{\alpha\varpi}\left(1+e^{\alpha\varpi}\overline{\Phi}\cdot\overline{\Psi}(T)[I-H(\Delta_m)]^{-1}\right)\right\}\max\left(\|D\|,\|F\|_1\right).$$

Демек, Теорема 2.1 дәлелденді.

Анықтама 2.3 [87] Егер кез келген $(F(t),D)$, мұнда $F(t)\in C\left([0,T],\mathbb{R}^{N-1}\right)$, $D\in\mathbb{R}^{(N-1)}$ жұбы үшін (2.7), (2.8) есебінің жалғыз $v^*(t)$ шешімі бар болып және

$\|v^*\|_1 \le K \max\left(\|D\|, \|F\|_1\right)$ бағалауы орындалса, онда (2.7), (2.8) есебі қисынды шешілімді деп аталады. Мұнда K - $F(t)$ және D -ға тәуелсіз тұрақты.

Теорема 2.2 [87] (2.7), (2.8) есебі қисынды шешілімді болуы үшін кез-келген Δ_m регулярлы бөлінуі үшін $Q_*(\Delta_m): \mathbb{R}^{(N-1)m} \to \mathbb{R}^{(N-1)m}$ матрицасының кері матрицасы бар болуы қажетті және жеткілікті.

Дәлелдеуі. Δ_m және $\mathcal{N}(\Delta_m)$ саны берілсін. $\mathcal{N}(\Delta_m)$ мәні $F(t)$, D -ға тәуелсіз. Сондықтан теореманың жеткілікті бөлігі теорема 2.1 -ден тікелей шығады.

Енді қажеттілігін дәлелдейік. (2.7), (2.8) есебі қисынды шешілімді болсын. Кері жорып $Q_*(\Delta_m): \mathbb{R}^{(N-1)m} \to \mathbb{R}^{(N-1)m}$ матрицасы кері матрицасы табылмасын деп ұйғарайық. Бұл тек біртекті сызықты алгебралық теңдеулер жүйесінің нөлден өзге шешімі болған жағдайда ғана мүмкін, яғни $Q_*(\Delta_m)\lambda = 0,\ \lambda \in \mathbb{R}^{(N-1)m}$.

Енді осы біртекті сызықты алгебралық теңдеулер жүйесінің $\hat{\lambda} = (\hat{\lambda}_1, \hat{\lambda}_2, \ldots, \hat{\lambda}_m) \in \mathbb{R}^{(N-1)m}$, $\left|\hat{\lambda}\right| \neq 0$ нөлден өзге шішімі болсын.

$F(t) = 0$, $D = 0$ болғандағы 2.7), (2.8) біртекті шеттік есебін қарастырайық. Бұл жағдайда (2.24) жүйесі $Q_*(\Delta_m)\lambda = 0$ біртекті сызықты алгебралық теңдеулер жүйесімен сәйкес келеді. Олай болса, Лемма 2.1 сәйкес $\hat{v}(t) = \tilde{z}_r(t) + \tilde{\lambda}_r$, $t \in [t_{r-1}, t_r)$, $r = \overline{1,m}$, және $\hat{v}(T) = \tilde{\lambda}_m + \lim\limits_{t \to T-0} \tilde{z}_m(t)$ арқылы анықталатын $\hat{v}(t)$ функциясы біртекті шеттік есептің нөлден өзге шешімі болып табылады. Ал, $\tilde{z}_r(t)$ жүйесі (2.12)-(2.13) Коши есебінің $\lambda = \tilde{\lambda}$ және $F(t) = 0$ кезіндегі шешімі болады. Онда (2.7), (2.8) есебінің нөлден өзгеше шешімі болады. Бұл (2.7), (2.8) есебінің жалғыз шешілімділігіне қайшы келеді, өйткені $F(t) = 0$, $D = 0$ кезінде оның нөлдік шешіммен қатар нөлдік емес шешімі де пайда болады. Теорема дәлелденді.

2.3 Параболалық тектес интегралдық-дифференциалдық теңдеулер үшін бейлокал есепке қолданылған сынықтар әдісінің жинақтылығы мен орнықтылығы

Бұл бөлімде параболалық тектес интегралдық-дифференциалдық теңдеулер үшін сынықтар әдісінің теориялық зерттелуі қарастырылады. Параболалық тектес интегралдық-дифференциалдық теңдеулер үшін сынықтар әдісін қатаң талдау барысында дискреттелген есептің шешімі $u_i(t)$ -нің үзіліссіз шешімі $u(t, x_i)$ -ге жинақталуы зерттелді. Осыған байланысты келесі теорема тұжырымдалды.

Теорема 2.3 $u(t,x)$- (2.1)-(2.3) есебінің шешімі болсын, ал $u_i(t)$-(2.23)-(2.25) сыныктар әдісімен дискреттелген есебінің шешімі болсын. Егер:

(i) Теорема 2.1 шарттары орындалса;

(ii) $C_1KT(C_1C_2+T)<1, \quad \|B\|+\|C\|C_1 \neq 0,$

мұнда

$$C_1 := e^{\int_0^T \|A(s)\|ds}, \quad C_2 := \frac{\|C\|}{\|B\|+\|C\|C_1}, \quad K := \max_{t\in[0,T]} \max_{1\le i\le N-1} \|\Phi(t,x_i)\| \|\Psi(t,x_i)\|.$$

Онда (2.23)-(2.25) дискреттелген есебінің шешімі (2.1)-(2.3) параболалық тектес интегралдық-дифференциалдық теңдеу үшін бейлокал шеттік есебінің шешіміне екінші ретті дәлдікпен жинақталады. Жинақталу дәлдігі $\tau \to 0$ кезінде $O(\tau^2)$ дәлдікке тең болады және келесі бағалау орындалады:

$$\max_{t\in[0,T]} \max_{0\le i\le N} |u(t,x_i)-u_i(t)| \le \rho\tau^2,$$

Мұнда, $\rho>0$ және τ -ға тәуелсіз оң тұрақты.

Дәлелдеуі. $u(t,x_i)$ арқылы (2.1)-(2.3) есебінің $x=x_i$ шешімінің нүктелердегі мәндерін белгілейміз:

$$\frac{d}{dt}u(t,x_i) = a_i(t)\frac{u(t,x_{i-1})-2u(t,x_i)+u(t,x_{i+1})}{\tau^2} + b_i(t)u(t,x_i) + \Phi_i(t)\int_0^T \Psi_i(s)u(s,x_i)ds + f(t,x_i) + r_i(t),$$

мұнда $r_i(t)=O(\tau^2)$ екінші ретті туындыны кеңістік бойынша дискреттеу нәтижесінде пайда болатын қателік. u функциясы жеткілікті дәрежеде тегіс болған жағдайда, келесі стандартты бағалау орындалады:

$$\max_{t\in[0,T]} \max_{1\le i\le N-1} |r_i(t)| \le C_0\tau^2.$$

$u(t,x_i)$ функциясын $x=x_i$, $(i=1,\ldots,N-1)$ кезінде $u_i(t)$ деп белгілейік. Жоғарыдағы теңдеуден (2.23) теңдеуін азайту арқылы $\delta_i(t)$ функциясы үшін келесі теңдеу алынады:

$$\frac{d\delta_i}{dt}=a_i(t)\frac{\delta_{i+1}-2\delta_i+\delta_{i-1}}{\tau^2}+b_i(t)\delta_i+\Phi_i(t)\int_0^T\Psi_i(s)\delta_i(s)ds+r_i(t). \qquad (2.25)$$

Шекаралық шарттардан $\delta_0(t)=\delta_N(t)=0$ екендігі шығады, ал екі нүктелі шекаралық шарттан $B_i\delta_i(0)+C_i\delta_i(T)=0$ қатынас алынады.

$M(t)=\max\limits_{1\le i\le N-1}|\delta_i(t)|$, $M_*=\max\limits_{t\in[0,T]}M(t)$ деп белгілейік. (2.25) теңдеуіндегі интегралдық бөліктің бағалауы:

$$\left\|\Phi(t,x_i)\int_0^T\Psi(s,x_i)\delta_i(s)ds\right\|\le T\max_{t\in[0,T]}\max_{1\le i\le N-1}\left\|\Phi(t,x_i)\right\|\cdot\left\|\Psi(t,x_i)\right\|M_*\le TKM_*$$

Одан кейін $\|A\|$ матрицасымен анықталған дифференциалдық жүйе үшін [77, 1106 бет] жұмысындағы лемманы қолданамыз:

$$M(t)\le e^{\int_0^t\|A(s)\|ds}\left(\|M(0)\|+\int_0^t(KM_*T+C_0\tau^2)ds\right)\le C_1\|M(0)\|+C_1(KM_*T+C_0\tau^2)t,$$

мұнда, $M(0)=\dfrac{\|C\|C_1KM_*T+\|C\|C_1C_0T\tau^2}{\|B\|+\|C\|C_1}=C_2C_1KTM_*+C_2C_1C_0T\tau^2$.

Егер уақыт аралығы $[0,T]$ бойынша максимумын алсақ, онда келесі бағалау орындалады:

$$M_*\le C_1\left(\|M(0)\|+KTM_*+C_0T\tau^2\right)=C_1(C_2C_1KTM_*+C_2C_1C_0T\tau^2+KT^2M_*+C_0T\tau^2).$$

$C_1KT(C_1C_2+T)<1$ болғандықтан, келесі қорытынды шығады:

$$M_* \le \frac{C_1 T(1+C_1C_2)C_0\tau^2}{1-C_1KT(1+C_1C_2T)} \le \rho\tau^2,$$

мұнда $\rho > 0$ - τ ға тәуелсіз тұрақты.

Осылайша, дискретті шешім үшін келесі бағалау орындалады:

$$\max_{t\in[0,T]} \max_{0\le i\le N} |u(t,x_i) - u_i(t)| \le \rho\tau^2,$$

бұл схеманың кеңістік бойынша дискреттеу кезінде екінші ретті дәлдікпен жинақталатынын көрсетеді.

$C_1KT(C_1C_2+T)<1$ шарты жеткілікті шарт болып табылады. Бұл шарт Гронуолл интегралдық теңсіздігін қолдану және Фредгольм интегралдық бөлігін бағалау нәтижесінде алынды әрі бейлокал бөліктің әсері жеткілікті түрде аз болуын қамтамасыз етеді. Бұл шарт қажетті шарт ретінде қарастырылмайды. Атап айтқанда, K немесе T мәндерінде де сандық жинақталуы мүмкін, алайда мұндай жағдайлар жүргізілген теориялық талдау аясында қарастырылмайды.

Әдістің орнықтылығын талдау

[77], [84] жұмыстарындағы белгілеулерді пайдаланып, есеп берілгендерінің ауытқыған коэффициенттер мен функцияларды келесідей белгілейік:

$$\tilde{a}_i(t),\ \tilde{b}_i(t),\ \tilde{f}_i(t),\ \Phi_i,\ \Psi_i,\ \tilde{\psi}_0(t),\ \tilde{\psi}_1(t),\ \tilde{\varphi}_i,\ B_i,\ C_i.$$

$\tilde{u}_i(t)$ арқылы ауытқыған мәндермен берілген дискреттелген есептің шешімін, $u(t,x_i)$ арқылы (2.1)-(2.3) бастапқы есебінің x_i нүктесіндегі мәнінен құралған шешімін белгілейміз. $\tilde{\delta}_i(t) = u(t,x_i) - \tilde{u}_i(t)$ арқылы (1.1)-(1.3) бастапқы есеп шешімінен ауытқыған мәндермен берілген дискреттелген есептің шешімі арасындағы айырма, яғни қателігі белгіленеді.

Бастапқы есеп берілгендері мен ауытқыған мәндер арасындағы айырмаларды белгілейік. δa шамасы $a(t,x_i)$ функциясы мен оның ауытқыған $\tilde{a}(t,x)$ арасындағы қателікті білдіреді. Қалған белгілеулер де дәл осылай анықталады:

$$\delta a = a(t,x_i) - \tilde{a}_i(t),\ \delta b = b(t,x_i) - \tilde{b}_i(t),\ \delta f = f(t,x_i) - f_i(t),\quad \delta\Phi = \Phi(t,x_i) - \Phi_i(t),$$

$$\Psi = \Psi(t, x_i) - \Psi_i(t),\ \delta\varphi = \varphi(x_i) - \tilde{\varphi}_i,\ \delta\psi_0(t) = \psi_0(t) - \tilde{\psi}_0(t),\ \delta\psi_1(t) = \psi_1(t) - \tilde{\psi}_1(t),$$

$$\delta B = B(x_i) - B_i,\ \delta C = C(x_i) - C_i.$$

Анықтама 2.4 (2.23)-(2.25) дискреттелген есебі (2.1)-(2.3) есебіне орнықты түрде жинақталады деп аталады, егер келесі шарттар орындалса [77]:

$$\max_{1\le i\le N-1} |\tilde{\delta}_i(t)| \to 0,\ \ \tau \to 0$$

$$\int_0^T |\delta a|\, d\tau \to 0,\ \int_0^T |\delta b|\, d\tau \to 0,\ \int_0^T |\delta f|\, d\tau \to 0,\ \int_0^T |\delta\Phi|\, d\tau \to 0,\ \int_0^T |\delta\Psi|\, d\tau \to 0,$$

$$|\delta\varphi|, |\delta\psi_0|, |\delta\psi_1|, |\delta B|, |\delta C| \to 0.$$

Теорема 2.4 Келесі шарттар орындалсын:

$$C_1 KT(C_1 C_2 + T) < 1,\ \ \|B\| + \|C\| C_1 \ne 0,$$

мұнда

$$C_1 := e^{\int_0^T \|A(s)\| ds},\quad C_2 := \frac{\|\tilde{C}\|}{\|\tilde{B}\| + \|\tilde{C}\|\tilde{C}_1},\quad K := \max_{t\in[0,T]} \max_{1\le i\le N-1} \|\Phi(t, x_i)\| \|\Psi(t, x_i)\|,$$

Онда (2.23)-(2.25) дискреттелген есебінің шешімі (2.1)-(2.3) параболалық тектес интегралдық-дифференциалдық теңдеулер үшін бейлокал есебінің шешіміне орнықты жинақталады.

Дәлелдеуі. $\tilde{u}_i(t)$ функциясы, келесі ауытқыған мәндермен берілген дискреттелген есептің шешімі болады:

$$\frac{d\tilde{u}_i}{dt} = \tilde{a}_i(t)\frac{\tilde{u}_{i+1} - 2\tilde{u}_i + \tilde{u}_{i-1}}{\tau^2} + \tilde{b}_i(t)\tilde{u}_i + \Phi_i(t)\int_0^T \Psi_i(s)\tilde{u}_i ds + \tilde{f}_i(t),\qquad i = \overline{1, N-1}, \tag{2.26}$$

$$B_i u_i(0) + C_i u_i(T) = \tilde{\varphi}_i, \tag{2.27}$$

$$\tilde{u}_0(t) = \tilde{\psi}_0(t), \quad \tilde{u}_N(t) = \tilde{\psi}_1(t), \quad t \in [0,T]. \tag{2.28}$$

Осыған сәйкес, (2.1)-(2.3) есебі үшін:

$$\begin{aligned}\frac{\partial u(t,x_i)}{\partial t} &= \tilde{a}(t,x_i)\frac{u(t,x_{i+1}) - 2u(t,x_i) + u(t,x_{i-1})}{\tau^2} + \tilde{b}(t,x_i)u(t,x_i) + \Phi(t,x_i)\int_0^T \Psi(s,x_i)u(s,x_i)ds \\ &+ \Phi(t,x_i)\int_0^T \tilde{\delta}\Psi(s,x_i)u(s,x_i)ds + \tilde{\delta}\Phi(t,x_i)\int_0^T \tilde{\delta}\Psi(s,x_i)u(s,x_i)ds \\ &+ \tilde{\delta}\Phi(t,x_i)\int_0^T \Psi(s,x_i)u(s,x_i)ds + f(t,x_i) + \delta a\frac{u(t,x_{i+1}) - 2u(t,x_i) + u(t,x_{i-1})}{\tau^2} \\ &+ \widetilde{\delta cu}(t,x_i) + \widetilde{\delta f}(t,x_i) + O(\tau^2),\end{aligned} \tag{2.29}$$

$$\tilde{B}(x_i)u(0,x_i) + \tilde{C}(x_i)u(T,x_i) + \delta B(x_i)u(0,x_i) + \delta C(x_i)u(T,x_i) = \tilde{\varphi}(x_i) + \delta\varphi(x_i),\ i = \overline{1,N-1}, \tag{2.30}$$

$$u_0(t) = \tilde{\psi}_0(t) + \delta\psi_0(t), \quad u_N(t) = \tilde{\psi}_1(t) + \delta\psi_1(t), \quad t \in [0,T]. \tag{2.31}$$

Ауытқыған мәндер үшін $\tilde{a}(t,x_i) = \tilde{a}_i(t)$, $\tilde{b}(t,x_i) = \tilde{b}_i(t)$, $\Phi(t,x_i) = \Phi_i(t)$, $\Psi(t,x_i) = \Psi_i(t)$, $f(t,x_i) = f_i(t)$, $B(x_i) = B_i$, $\tilde{C}(x_i) = \tilde{C}_i$ теңдіктерін аламыз.

(2.29)-(2.31) теңдеулерінен (2.26)-(2.28) теңдеулерін азайту арқылы келесі қатынастар алынады:

$$\begin{aligned}\frac{d\tilde{\delta}_i}{dt} &= \tilde{a}_i(t)\frac{\tilde{\delta}_{i+1} - 2\tilde{\delta}_i + \tilde{\delta}_{i-1}}{\tau^2} + \tilde{b}_i(t)\tilde{\delta}_i + \Phi_i(t)\int_0^T \Psi_i(s)\tilde{\delta}_i(s)ds + \delta a\frac{u(t,x_{i+1}) - 2u(t,x_i) + u(t,x_{i-1})}{\tau^2} \\ &+ \delta b u(t,x_i) + \Phi_i(t)\int_0^T \delta\Psi(s,x_i)u(s,x_i)ds + \tilde{\delta}\Phi\int_0^T \tilde{\delta}\Psi(s,x_i)u(s,x_i)ds + \tilde{\delta}\Phi_i\int_0^T \Psi_i(s,x_i)u(s,x_i)ds \\ &+ \delta f_i(t) + O(\tau^2), \qquad i = \overline{1,N-1},\end{aligned} \tag{2.32}$$

$$B_i\tilde{\delta}_i(0) + C_i\tilde{\delta}_i(T) = \delta\psi - \delta B u(0,x_i) - \delta C u(T,x_i), \tag{2.33}$$

$$\tilde{\delta}_0(t) = \delta\psi_0(t), \quad \tilde{\delta}_N(t) = \delta\psi_1(t), \quad t \in [0,T]. \tag{2.34}$$

$M(t) = \max_{1\le i\le N-1} |\tilde{\delta}_i(t)|$, $M_* = \max_{t\in[0,T]} M(t)$ деп белгілейік. Содан кейін $A(t)$ матрицасымен анықталған дифференциалдық жүйеге [77] жұмысындағы лемманы қолданамыз:

$$\begin{aligned} M(t) \le e^{\left(\int_0^t \|\tilde{A}(s)\| ds\right)} \|M_0\| \\ + e^{\left(\int_0^t \|\tilde{A}(s)\| ds\right)} \int_0^T \Bigg(KM_* + \delta a \frac{u(\tau, x_{i+1}) - 2u(\tau, x_i) + u(\tau, x_{i-1})}{\tau^2} \\ + \delta b u(\tau, x_i) + \Phi(\tau, x_i) \int_0^T \tilde{\delta}\Psi(s, x_i) u(s, x_i) ds + \tilde{\delta}\Phi \int_0^T \delta\Psi(s, x_i) u(s, x_i) ds \\ + \tilde{\delta}\Phi \int_0^T \Psi(s, x_i) u(s, x_i) ds + \delta f + O(\tau^2) d\tau \Bigg), \end{aligned}$$

$[0,T]$ аралығы бойынша максимум алсақ, онда келесі бағалау шығады:

$$M(t) \le C_1 \left(\|M_0\| + KM_* T + TO(\tau^2) + R \right),$$

мұнда

$$\begin{aligned} R = \int_0^T \delta a \frac{u(\tau, x_{i+1}) - 2u(\tau, x_i) + u(\tau, x_{i-1})}{\tau^2} d\tau + \int_0^T \delta b u(\tau, x_i) d\tau + \Phi(\tau, x_i) \int_0^T \delta\Psi(s, x_i) u(s, x_i) ds d\tau \\ + \int_0^T \delta\Phi \int_0^T \tilde{\delta}\Psi(s, x_i) u(s, x_i) ds d\tau + \int_0^T \delta\Phi \int_0^T \Psi(s, x_i) u(s, x_i) ds d\tau + \int_0^T \delta f d\tau, \end{aligned}$$

$C_1 KT(C_1 C_2 + T) < 1$ болғандықтан, келесі теңсіздік орындалады:

$$M_* \le \frac{C_1 T(1 + C_1 C_2) O(\tau^2) + C_1 R}{1 - C_1 KT(1 + C_1 C_2) T}. \tag{2.35}$$

(2.35) бағалауынан және анықтама 2.4 арқылы Теорема 2.4 дәлелденеді. Орнықтылық нәтижесі жинақталу теориясымен бірдей аналитикалық негізде алынған. Осыған байланысты $C_1KT(C_1C_2+T)<1$ шарты ұсынылған әдістің жинақталу және орнықтылығын қамтамасыз ететін жеткілікті шарт ретінде қарастыру қажет. Бұл жұмыста аталған шарттың орнықтылық үшін қажетті шарт екендігі тұжырымдалмайды.

2.4 Джумабаев параметрлеу әдісінің алгоритміне негізделген сандық мысалдар

Бұл бөлімде параболалық тектес Фредгольм интегралдық-дифференциалдық теңдеулер үшін бейлокал есебін шешудің сандық алгоритмі ұсынылады.

1. Бірінші (2.1)-(2.3) параболалық тектес интегралдық-дифференциалдық теңдеулер үшін бейлокал шеттік есепті кеңістік x айнымалысы бойынша дискреттеу арқылы (2.7), (2.8) Фредгольм интегралдық-дифференциалдық теңдеулер жүйесі үшін екі нүктелік есепке келтіріледі.
2. $[0,T)$ аралығын $0=t_0<t_1<\ldots<t_m=T$ ішкі аралықтарына бөлінеді. Әрбір $[t_{r-1},t_r]$, $r=1,\ldots,m$ ішкі аралығы ұзындығы $\beta_r=(t_r-t_{r-1})/J_r$ болатын $J_r\in\mathbb{N}$ тең бөлікке бөлінеді. Сәйкес тор түйіндері $[t_{r-1},t_r]$ аралығында $\hat{t}=t_{r-1}$, $\hat{t}=t_{r-1}+\beta_r$, ..., $\hat{t}=t_{r-1}+(J_r-1)\beta_r$, $\hat{t}=t_r$ түрінде анықталады.
3. Сәйкес Коши есептерінің сандық шешімдерін есептеу үшін төртінші ретті Рунге-Кутта RK4 әдісі қолданылады:

$$\frac{dy}{dt}=A(t)y+\Phi(t),\quad y(t_{r-1})=0,\quad t\in[t_{r-1},t_r],\qquad r=1,\ldots,m.$$

Есептеу нәтижесінде алынған $a^{\beta_\kappa}(\Phi,\hat{t})$ мәндері кейінгі есептеулерде пайдалану үшін есептеліп, сақталады.

4. $t\in[t_{r-1},t_r]$ тор түйіндерінде есептелген Ψ және өлшемі $(N-1)\times(N-1)$ болатын $a^{\beta_\kappa}(\Phi,\hat{t})$ матрицаларының мәндері бойынша $\Psi_r^{\beta_r}(\Phi)=\int_{t_{r-1}}^{t_r}\Psi(\eta)a^{\beta_r}(\Phi,\eta)d\eta$, $r=1,\ldots,m.$ интегралдары Симпсон әдісі арқылы есептеледі. Барлық ішкі аралықтар бойынша қосындылай

отырып, жинақталған $H^{\tilde{\beta}}(\Delta_m)=\sum_{j=1}^{m}\Psi_j^{\beta_j}(\Phi)$ матрицасы алынады. Мұнда $\tilde{\beta}=(\beta_1,\beta_2,\ldots,\beta_m)$.

5. Әрі қарай төртінші ретті Рунге-Кутта RK4 әдісін пайдаланып, келесі Коши есептерін шешеміз. $A(t)$ матрицалық функциясы үшін:

$$\frac{dy}{dt}=A(t)y+A(t),\ \ y(t_{r-1})=0,\ \ t\in[t_{r-1},t_r],\quad r=1,\ldots,m.$$

$F(t)$ вектор-функциясы үшін:

$$\frac{dy}{dt}=A(t)y+F(t),\ \ y(t_{r-1})=0,\ \ t\in[t_{r-1},t_r],\quad r=1,\ldots,m.$$

Нәтижесінде әрбір $r=1,\ldots,m$ үшін тор түйіндерінің $t\in[t_{r-1},t_r]$ дискретті жиынында өлшемі $((N-1)\times(N-1))$ болатын $a(A,\hat{t})$ матрицасының және $N-1$ өлшемді $a(F,\hat{t})$ векторының мәндері есептеледі .

6. Тор түйіндерінде Симпсон әдісін қолдана отырып, келесі интегралдарды есептейміз:

$$\Psi_j^{\beta_j}=\int_{t_{r-1}}^{t_r}\Psi(\eta)d\eta,$$

$$\Psi_j^{\beta_j}(A)=\int_{t_{r-1}}^{t_r}\Psi(\eta)a^{\beta_r}(A,\eta)d\eta,$$

$$\Psi_j^{\beta_j}(F)=\int_{t_{r-1}}^{t_r}\Psi(\eta)a^{\beta_r}(F,\eta)d\eta,\quad r=1,\ldots,m.$$

Осы интегралдардан $V_r^{\tilde{\beta}}(\Delta_m)=\Psi_j^{\beta_j}(A)+\sum_{j=1}^{m}\Psi_j^{\beta_j}(\Phi)\Psi_r^{\beta_r}$, $r=1,\ldots,m$, матрицалары және $g^{\tilde{\beta}}(F,\Delta_m)=\sum_{r=1}^{m}\Psi_r^{\beta_r}(F)$ векторын анықтаймыз. Осылайша өлшемі $((N-1)\times(N-1))$ болатын $V_r^{\tilde{\beta}}(\Delta_m)$ матрицалары және $N-1$ өлшемді $g^{\tilde{\beta}}(F,\Delta_m)$ векторлары құрылады.

7. Осы мәндерді пайдалана отырып, $Q_*^{\tilde{\beta}}(\Delta_m)\lambda=F_*^{\tilde{\beta}}(\Delta_m)$, $\lambda\in\mathbb{R}^{(N-1)m}$ сызықтық алгебралық жүйесін шешу арқылы белгісіз $\lambda^{\tilde{\beta}}=(\lambda_1^{\tilde{\beta}},\lambda_2^{\tilde{\beta}},...,\lambda_m^{\tilde{\beta}})$ векторын

анықтаймыз. Бұл (2.9)-(2.12) есебінің ішкі аралықтардың сол жақ шеткі нүктелеріндегі сандық шешімін береді.

8. Ішкі аралықтардың қалған торлық нүктелердегі жуық шешімді есептеу үшін алдымен

$$\zeta^{\tilde{\beta}} = [I - H^{\tilde{\beta}}(\Delta_m)]^{-1} \sum_{r=1}^{m} V_r^{\tilde{\beta}}(\Delta_m) \lambda_r^{\tilde{\beta}} + [I - H^{\tilde{\beta}}(\Delta_m)]^{-1} g^{\tilde{\beta}}(F, \Delta_m),$$

шамасы есептеледі. Осыдан кейін келесі Коши есептер шешіледі:

$$\frac{dv}{dt} = A(t)v + \Phi(t)\left(\zeta^{\tilde{\beta}} + \sum_{j=1}^{m} \Psi_j^{\beta_j} \cdot \lambda_j^{\tilde{\beta}}\right) + F(t),$$

$$v(t_{r-1}) = \lambda_r^{\tilde{\beta}}, \quad t \in [t_{r-1}, t_r], \quad r = 1, \ldots, m.$$

Нәтижесінде толық сандық шешім алынды. Осылайша, ұсынылған алгоритм (2.7), (2.8) есебінің сандық шешімін береді. Егер $v^*(\hat{t}) = (v_1^*(\hat{t}), v_2^*(\hat{t}), \ldots, v_{N-1}^*(\hat{t}))$ векторы (2.7), (2.8) есебінің сандық шешімі болса, онда $u^*(\hat{t}, s\tau) = v_s^*(\hat{t})$, $s = 1, \ldots, N-1$ (2.1)-(2.3) параболалық тектес интегралдық-дифференциалдық теңдеулер үшін бейлокал шеттік есептің сандық шешімін береді [101].

Ұсынылған тәсілдің тиімділігін көрсету үшін, келесі тесттік мысалдарды қарастырайық.

Мысал 2.1 $(t, x) \in \bar{\Omega} = [0,1/10] \times [0,1/10]$ тіктөртбұрышында параболалық тектес интегралдық-дифференциалдық теңдеулер үшін келесідей есеп қарастырылады:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = (x + \tfrac{1}{5}) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - u + t^3 x^2 \int_0^{1/10} e^{sx} u(s, x) ds + e^{-tx} + \frac{t^2 e^{-tx}}{5} - xe^{-tx} - \frac{t^3 x^2}{10} - t^2 xe^{-tx}, \ (t, x) \in \Omega \qquad (2.36)$$

$$u(0, x) + u(1/10, x) = e^{-x/10} + 1, \quad x \in [0,1/10], \qquad (2.37)$$

$$u(t, 0) = 1, \quad u(t, 1/10) = e^{-t/10}, \ t \in [0,1/10]. \qquad (2.38)$$

Берілген есептің аналитикалық шешімі $\tilde{u}(t, x) = e^{-tx}$. (2.36)-(2.38) есебін $i = 0,1,2,3$ үшін x кеңістіктік айнымалысын $x_i = i/30$ тор нүктелерін пайдаланып дискреттеу

жасаймыз. Тиісінше, біз $u_i(t) = u\left(t, \frac{i}{30}\right)$, $i = 0,1,2,3$ деп анықталады. Алынған дискреттелген жүйе матрицалық-векторлық түрде келесідей жазылады:

$$\frac{dv}{dt} = \begin{pmatrix} -421 & 210 \\ 240 & -481 \end{pmatrix} v + \frac{1}{900} \begin{pmatrix} t^3 & 0 \\ 0 & 4t^3 \end{pmatrix} \int_0^T \begin{pmatrix} e^{t/30} & 0 \\ 0 & e^{t/15} \end{pmatrix} v(s)ds + \frac{1}{30} \begin{pmatrix} 29e^{-\frac{t}{30}} - 270000t^3 - 7t^2 e^{-\frac{t}{30}} + 6300 \\ 7200e^{-\frac{t}{10}} + 28e^{-\frac{t}{15}} - 67500t^3 - 8t^2 e^{-\frac{t}{15}} \end{pmatrix}, \quad v \in \mathbb{R}^2, \quad t \in [0,1/10], \tag{2.39}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} v(0) + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} v\left(\frac{1}{10}\right) = \begin{pmatrix} e^{-\frac{1}{300}} + 1 \\ e^{-\frac{1}{150}} + 1 \end{pmatrix}. \tag{2.40}$$

Дискреттелген (2.39), (2.40) есебінің дәл шешімі: $U_{анал.ш}(t) = \begin{pmatrix} e^{-\frac{t}{30}} \\ e^{-\frac{t}{15}} \end{pmatrix}$. Дискреттелген есепті шешу үшін Джумабаев параметрлеу әдісін қолданамыз. Параметрлеу әдісі бойынша, $[0;0.1]$ аралығын ішкі аралықтарға $t_0 = 0$, $t_1 = 0.0025$, $t_2 = 0.005$, $t_3 = 0.0075$, $t_4 = 0.01$ бөлінеді. (2.36)-(2.38) есебінің аналитикалық және сандық шешімдері арасындағы қателіктер төмендегі кесте 4 көрсетілген. Мұнда, $\tilde{u}(t,\tau)$- аналитикалық, ал $\hat{u}(t,\tau)$- сандық шешім мәндері.

Кесте 4. Аналитикалық және сандық шешімдерді салыстыру

t	$\tilde{u}(t,\tau) - \hat{u}(t,\tau)$	$\tilde{u}(t,2\tau) - \hat{u}(t,2\tau)$
0	1.49×10^{-11}	4.536×10^{-11}
0.00125	1.22×10^{-11}	3.438×10^{-11}
0.0025	2.27×10^{-11}	1.589×10^{-11}
0.00375	2.62×10^{-11}	2.517×10^{-11}
0.005	2.70×10^{-11}	2.986×10^{-11}
0.00625	2.67×10^{-11}	3.242×10^{-11}
0.0075	2.62×10^{-11}	3.392×10^{-11}
0.00875	2.56×10^{-11}	3.487×10^{-11}
0.01	2.51×10^{-11}	3.55×10^{-11}
0.011	2.47×10^{-11}	3.595×10^{-11}
0.013	2.44×10^{-11}	3.627×10^{-11}
0.014	2.42×10^{-11}	3.65×10^{-11}
0.015	2.40×10^{-11}	3.667×10^{-11}

0.016	2.39×10^{-11}	3.68×10^{-11}
0.018	2.38×10^{-11}	3.69×10^{-11}
0.019	2.37×10^{-11}	3.697×10^{-11}
0.02	2.365×10^{-11}	3.703×10^{-11}
0.021	2.361×10^{-11}	3.707×10^{-11}
0.023	2.357×10^{-11}	3.71×10^{-11}
0.024	2.354×10^{-11}	3.713×10^{-11}
0.025	2.351×10^{-11}	3.715×10^{-11}
0.026	2.349×10^{-11}	3.716×10^{-11}
0.028	2.346×10^{-11}	3.717×10^{-11}
0.029	2.344×10^{-11}	3.719×10^{-11}
0.03	2.343×10^{-11}	3.72×10^{-11}
0.031	2.341×10^{-11}	3.721×10^{-11}
0.033	2.34×10^{-11}	3.722×10^{-11}
0.034	2.339×10^{-11}	3.723×10^{-11}
0.035	2.337×10^{-11}	3.724×10^{-11}
0.036	2.334×10^{-11}	3.725×10^{-11}
0.038	2.332×10^{-11}	3.727×10^{-11}
0.039	2.33×10^{-11}	3.728×10^{-11}
0.04	2.328×10^{-11}	3.73×10^{-11}
0.041	2.325×10^{-11}	3.732×10^{-11}
0.043	2.322×10^{-11}	3.734×10^{-11}
0.044	2.319×10^{-11}	3.737×10^{-11}
0.045	2.315×10^{-11}	3.74×10^{-11}
0.046	2.311×10^{-11}	3.744×10^{-11}
0.048	2.307×10^{-11}	3.747×10^{-11}
0.049	2.303×10^{-11}	3.751×10^{-11}
0.05	2.298×10^{-11}	3.755×10^{-11}
0.051	2.293×10^{-11}	3.759×10^{-11}
0.053	2.287×10^{-11}	3.764×10^{-11}
0.054	2.281×10^{-11}	3.77×10^{-11}
0.055	2.275×10^{-11}	3.776×10^{-11}
0.056	2.267×10^{-11}	3.782×10^{-11}
0.058	2.26×10^{-11}	3.789×10^{-11}
0.059	2.251×10^{-11}	3.797×10^{-11}
0.06	2.243×10^{-11}	3.805×10^{-11}
0.061	2.235×10^{-11}	3.813×10^{-11}
0.063	2.224×10^{-11}	3.823×10^{-11}
0.064	2.213×10^{-11}	3.832×10^{-11}
0.065	2.202×10^{-11}	3.843×10^{-11}
0.066	2.19×10^{-11}	3.854×10^{-11}
0.068	2.178×10^{-11}	3.866×10^{-11}
0.069	2.164×10^{-11}	3.879×10^{-11}

0.07	2.15×10^{-11}	3.892×10^{-11}
0.071	2.135×10^{-11}	3.907×10^{-11}
0.073	2.12×10^{-11}	3.922×10^{-11}
0.074	2.103×10^{-11}	3.938×10^{-11}
0.075	2.086×10^{-11}	3.954×10^{-11}
0.076	2.068×10^{-11}	3.972×10^{-11}
0.078	2.049×10^{-11}	3.99×10^{-11}
0.079	2.028×10^{-11}	4.01×10^{-11}
0.08	2.006×10^{-11}	4.03×10^{-11}
0.081	1.984×10^{-11}	4.053×10^{-11}
0.083	1.961×10^{-11}	4.076×10^{-11}
0.084	1.935×10^{-11}	4.1×10^{-11}
0.085	1.908×10^{-11}	4.126×10^{-11}
0.086	1.882×10^{-11}	4.152×10^{-11}
0.088	1.853×10^{-11}	4.18×10^{-11}
0.089	1.824×10^{-11}	4.209×10^{-11}
0.09	1.793×10^{-11}	4.24×10^{-11}
0.091	1.76×10^{-11}	4.271×10^{-11}
0.093	1.727×10^{-11}	4.304×10^{-11}
0.094	1.692×10^{-11}	4.339×10^{-11}
0.095	1.655×10^{-11}	4.375×10^{-11}
0.096	1.616×10^{-11}	4.412×10^{-11}
0.098	1.576×10^{-11}	4.452×10^{-11}
0.099	1.534×10^{-11}	4.493×10^{-11}
0.1	1.49×10^{-11}	4.536×10^{-11}

Жоғарыдағы сандық алгоритм бойынша сандық есептеу жүргізілді. $N=3$ және $m=4$ болған жағдайда, (2.36)-(2.38) есебінің аналитикалық және сандық шешімдері арасындағы абсолют қателігі $\max\limits_{j=\overline{0.120},i=\overline{1.2}}\left\|\tilde{u}(\hat{t}_j,x_i)-\hat{u}(\hat{t}_j,x_i)\right\|<4.536\times10^{-11}$, $\hat{t}_j=0.00125\,j$, $j=\overline{0.80}$, $x_i=i/30$, $i=\overline{1,2}$.

Мысал 2.2 $(t,x)\in\overline{\Omega}=[0,4]\times[0,3]$ тіктөртбұрышында параболалық тектес интегралдық-дифференциалдық теңдеулер үшін келесідей есеп қарастырылды:

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-xu+t^3\int_0^4 u(s,x)ds+x^3\sin\pi t+\pi x^2\cos\pi t-2\sin\pi t,\quad (t,x)\in\Omega, \tag{2.41}$$

$$-xu(0,x)+u(4,x)=0,\quad x\in[0,3], \tag{2.42}$$

$$u(t,0)=0,\quad u(t,3)=9\sin\pi t,\quad t\in[0,4]. \tag{2.43}$$

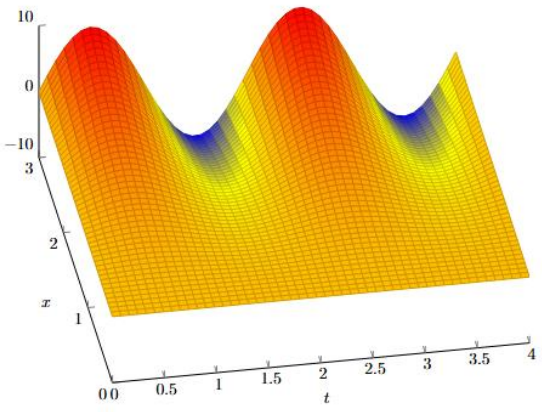
Берілген есептің аналитикалық шешімі $\tilde{u}(t,x)=x^2\sin\pi t$. (2.41)-(2.43) есебін $i=\overline{0,3}$ арқылы x кеңістіктік айнымалысын дискреттеу нәтижесінде матрицалық-векторлық түрде келесідей жазылды:

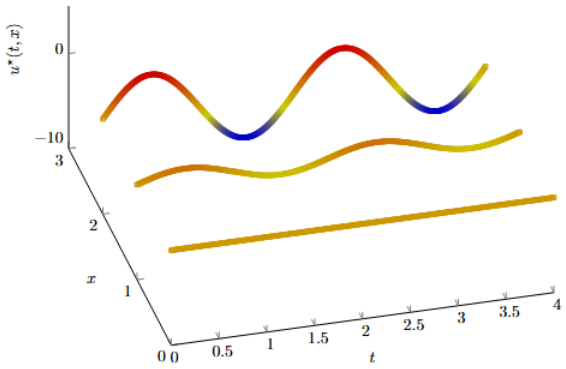
$$\frac{dv}{dt}=\begin{pmatrix}-3 & 1\\ 1 & -4\end{pmatrix}v+\begin{pmatrix}t^3 & 0\\ 0 & t^3\end{pmatrix}\int_0^4\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}v(s)ds+\begin{pmatrix}\pi\cos\pi t-\sin\pi t\\ 15\sin\pi t+4\pi\cos\pi t\end{pmatrix},\quad v\in\mathbb{R}^2, \tag{2.44}$$

$$\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & -2\end{pmatrix}v(0)+\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}v(4)=\begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix}. \tag{2.45}$$

(2.44), (2.45) есебінің дәл шешімі: $U_{анал.ш}(t)=\begin{pmatrix}\sin\pi t\\ 4\sin\pi t\end{pmatrix}$. Параметрлеу әдісі бойынша, $[0;4]$ аралығын ішкі аралықтарға $t_0=0$, $t_1=1$, $t_2=2$, $t_3=3$, $t_4=4$ бөлінеді. (2.41)-(2.43) есебінің аналитикалық және сандық шешімдері арасындағы абсолют қателігі $\max\limits_{j=\overline{0.400},i=\overline{1.2}}\left\|\tilde{u}(\hat{t}_j,x_i)-\hat{u}(\hat{t}_j,x_i)\right\|<4.912\times10^{-8}$, $\hat{t}_j=0.01j$, $j=\overline{0.400}$, $x_i=i$, $i=\overline{1,2}$.

Параболалық тектес интегралдық-дифференциалдық (2.41)-(2.43) есебінің $\hat{u}(t,x)$ аналитикалық шешімі және $u^*(t,x)$ сандық шешімінің кескіні 2 суретте көрсетілген.





Сурет 2. Аналитикалық және сандық шешім кескіні

ҚОРЫТЫНДЫ

Бұл диссертациялық жұмыста жүктелген параболалық теңдеулер мен параболалық тектес Фредгольм интегралдық-дифференциалдық теңдеулер үшін бейлокал шеттік есептердің бірмәнді шешілімділігі мен олардың сандық-аналитикалық шешімдерін құру мәселелері зерттелді. Зерттеудің негізгі бағыты аталған есептердің шешілімділік шарттарын анықтауға, оларды конструктивті түрде шешудің тәсілдерін негіздеуге және алынған теориялық нәтижелерді сандық есептеулер арқылы жүзеге асыруға бағытталды.

Зерттеу барысында қойылған есептерді шешудің негізгі құралдарының бірі ретінде сынықтар әдісі қолданылды. Кеңістіктік айнымалы бойынша дискреттеу негізінде бастапқы есептер жүктелген дифференциалдық және интегралдық-дифференциалдық теңдеулер жүйелері үшін шеттік есептерге келтірілді. Осы түрлендірулер негізінде алынған шеттік есептердің бірмәнді шешілімділігін қамтамасыз ететін шарттар айқындалып, олардың бастапқы есептермен өзара байланысы негізделді.

Жұмыста дифференциалдық және интегралдық-дифференциалдық теңдеулер теориясының әдістері, дербес туындылы дифференциалдық теңдеулер, сынықтар әдісі, Джумабаевтың параметрлеу әдісі және сандық есептеу тәсілдері өзара үйлесімді қолданылды. Аталған әдістердің үйлесуі зерттелетін есептердің теориялық шешілімділігін негіздеумен қатар, олардың жуық шешімдерін конструктивті түрде анықтауға мүмкіндік берді.

Диссертациялық жұмыста алынған негізгі нәтижелер:

- Зерттелген есептердің бірмәнді шешілімділік шарттары анықталып, сандық-аналитикалық шешімдері жүзеге асырылуы көрсетілді.
- Жүктелген параболалық теңдеулер үшін қойылған бастапқы-шеттік есептің бірмәнді шешілімділігі туралы теорема дәлелденді.
- Жүктелген параболалық теңдеулер және параболалық тектес Фредгольм интегралдық-дифференциалдық теңдеулер үшін бейлокал шеттік есептерге қолданылған сынықтар әдісінің жинақтылығы, орнықтылығы мен дәлдік шарттары көрсетілді.
- Айнымалы коэффициентті жүктелген параболалық теңдеулер мен параболалық тектес Фредгольм интегралдық-дифференциалдық теңдеулер үшін бейлокал шеттік есептерге әртүрлі мысалдар қарастырылып, сандық шешімдері жоғарғы дәлдіктермен алынды;
- Ұсынылған әдістер мен нәтижелер бейлокал шеттік есептер теориясын дамытуға, сондай-ақ математикалық физика мен қолданбалы математика салаларындағы күрделі процестерді модельдеуде қолдануға мүмкіндік береді.

Осылайша, диссертациялық зерттеу аясында қойылған мақсатқа сәйкес жүктелген параболалық және параболалық тектес интегралдық-дифференциалдық теңдеулер үшін бейлокал есептердің шешілімділігін зерттеудің теориялық негіздері жүйеленіп, оларды сандық-аналитикалық тұрғыдан шешуге мүмкіндік беретін конструктивті тәсілдер ұсынылды. Алынған нәтижелер қарастырылған есептер класын зерттеудің теориясын толықтырып, осы бағыттағы кейінгі зерттеулерді дамытуға негіз болады.

Диссертациялық жұмыстың негізгі нәтижелері мен тұжырымдары [83-85], [99-101] еңбектерде жарияланып, ғылыми қауымдастық назарына ұсынылды.

ПАЙДАЛАНЫЛҒАН ӘДЕБИЕТТЕР

1 Нахушев А.М. Уравнения математической биологии. – Москва: Высшая школа, 1995. – 304с.
2 Friedman A. Partial Differential Equations of Parabolic Type. – Florida: Dover Publications, 2008. – P. 368.
3 Knabner P., Angermann L. Numerical Methods for Elliptic and Parabolic Partial Differential Equations. Springer, 2003. – P. 441.
4 Tian Y., Weng P. Spreading speed and wavefronts for parabolic functional differential bequations with spatio-temporal delays // Nonl. Anal.: Theory, Meth. Appl. – 2009. – Vol.71.– P. 3374-3388.
5 Tikhonov A.N., Samarskii A.A. Equations of Mathematical Physics. Courier Corporation, 2013. – P. 800.
6 Нахушев А.М. Об одном приближенном методе решения краевых задач для дифференциальных уравнений и его приложения к динамике почвенной влаги и грунтовых вод // Дифференциальные уравнения. – 1982. – Т. 18, № 1. – С. 72-81.
7 Будак В.М., Искендеров А.Д. Об одном классе обратных краевых задач с неизвестными коэффициентами //Докл. АН СССР. – 1967. – Т. 176, № 1. – С. 20-23.
8 Искендеров А.Д. О смешанной задаче для нагруженных квазилинейных уравнений гиперболического типа//Докл. АН СССР. – 1971. – Т. 199, № 6. – С. 1237–1239.
9 Нахушев А.М. Краевые задачи для нагруженных интегро-дифференциальныхуравнений гиперболическоготипа и некоторыеих приложения к прогнозу почвенной влаги//Дифференц. уравнения.– 1979. – Т. 15, № 1. – С. 96–105.
10 Нахушев А.М., Борисов В.Н. Краевые задачи для нагруженных параболических уравнений и их приложение к прогнозу уровня грунтовых вод//Дифференц. уравнения. – 1977. – Т. 13, № 1. – С. 105–110.
11 Нахушев А.М. Нагруженные уравнения и их приложения//Дифференц. уравнения. – 1983. – Т. 19, №1. – С. 86–94.
12 Нахушев А.М. О нелокальных краевых задачах со смещением и их связи с нагруженными уравнениями//Дифференц. уравнения. – 1985. – Т. 21, № 1. – С. 92–101.
13 Владимиров В.С. Математические задачи односкоростной теории переноса частиц// Тр. МИ АН СССР/ Т. 61. – М., 1961. – С. 1–158.
14 Нахушев А.М. Нагруженные уравнения и их применение. – М: Наука, 2012. – 232с.
15 Ломов И.С. Свойства базисности корневых векторов нагруженных дифференциальных операторов второго порядка на интервале //Дифференц. уравнения. – 1991. – Т. 27, № 1. – С. 80–93.
16 Krall A.M. The development of general differential and general differential boundary systems// Rock. Moun. J. Math. – 1975. – Vol.5, № 4. – P. 493–542.

17 Дженалиев М.Т, Рамазанов М.И. Нагруженные уравнения как возмущения дифференциальных уравнений. – Алматы: Гылым, 2010.
18 Дикинов Х.Ж., Керефов А.А., Нахушев А.М. Об одной краевой задаче для нагруженного уравнения теплопроводности//Дифференц. уравнения. – 1976. – Т. 12, № 1. – С. 177–179.
19 Jenaliyev M.T., Bektemesov M.A., Yergaliyev M.G. On an inverse problem for a linearized system of Navier–Stokes equations with a final overdetermination condition // Journal of Inverse and Ill-posed Problems. . – 2023. – Vol.31, № 4. – P. 611–624.
20 Белогуров А.П. Краевые задачи для нагруженных параболических уравнений // Материалы Международного Российско-Казахского симпозиума «Уравнения смешанного типа и родственные проблемы анализа и информатики» и VI Школы молодых ученых «Нелокальные краевые задачи и проблемы современного анализа и информатики». Нальчик-Эльбрус, 22-26 мая 2004 г. С. 38-39.
21 Геккиева С.Х. Краевая задача для обобщенного уравнения переноса с дробной производной в полубесконечной области//Известия КБНЦ РАН. – 2002. – Т. 8, № 1. – С. 6–8.
22 Паровик Р.И. Решение нелокального уравнения аномальной диффузии-адвекцасии радона в системе грунт-атмосфера//Вестник КРАУНЦ. Физ.-мат. Науки.– 2011. – Т. 2, № 1. – С. 37–44.
23 Борок В.М., Житомирский Я.И. Задачи Коши для одного класса нагруженных уравнений //Успехи математических наук.– 1979. – Т. 34, №1. – С. 221–222.
24 Liu J., Xu M. Some exact solutions to Stefan problems with fractional differential equations // Journal of Mathematical Analysis and Applications. – 2008. – Vol.1. – P. 1–7.
25 Jenaliyev M.T., Kassymbekova A.S. On the boundary value problem for the loaded parabolic equations with irregular coefficients// Bulletin of the Karaganda University. Mathematics Series. – 2018. – Vol.89, № 1. – P. 20–27.
26 Dzhenaliev M.T. Loaded equations with periodic boundary conditions//Differential Equations. – 2001. – Vol.37, № 1. – P. 51–57.
27 Attaev A.Kh., Ramazanov M.I., Omarov M.T. On the correctness of boundary value problems for the two-dimensional loaded parabolic equation// Bulletin of the Karaganda university. Mathematics Series. – 2022. – Vol.108, № 4. – P. 34–41.
28 Akhmanova D.M., Shamatayeva N.K., Kasymova L.Zh. On boundary value problems for essentially loaded parabolic equations in bounded domains//Bulletin of the Karaganda University. Mathematics Series. – 2020. – Vol.98, № 2. – P. 6–14.
29 Aitzhanov S., Bekenayeva K., Abdikalikova Z. Boundary value problem for a loaded pseudoparabolic equation with a fractional Caputo operator// Mathematics. – 2023. – Vol.18, № 11. Article 3987.

30 Baltaeva U.I., Kosimova M.Sh., Hayitbayev H. Extension of the Tricomi problem for a third-order loaded parabolic-hyperbolic equation// Arabian Journal of Mathematics. – 2025. – Vol.14, № 1. – P. 1–13.
31 Abdullaev O. Kh., Sobirjonov A.Q. On an inverse problem for a nonlinear loaded parabolic-hyperbolic equation of fractional order// Uzbek Mathematical Journal. – 2025. – Vol.69, № 1. – P. 5–13.
32 Yuldashev T.K., Abdullaev O.Kh. Unique solvability of a boundary value problem for a loaded fractional parabolic-hyperbolic equation with nonlinear terms// Lobachevskii J. Math. – 2021. – Vol.42, № 5. – P. 1113–1123.
33 Yuldashev T.K., Islomov B.I., Alikulov E.K. Boundary-value problems for loaded third-order parabolic-hyperbolic equations in infinite three-dimensional domains//Lobachevskii J. Math. – 2020. – Vol.41, № 5. – P. 926–944.
34 Кочина Н.Н. Вопросы регулирования уровня грунтовых вод при поливах//Докл. АН СССР. – 1973. – Т. 213, № 1. – С. 51–54.
35 Шхануков М.Х. Разностный метод решения одного нагруженного уравнения параболического типа//Дифференц. уравнения. – 1977. –Т. 13, № 1. – С. 163–167.
36 Abdullayev V.M. Numerical solution of a boundary value problem for a loaded parabolic equation with nonlocal boundary conditions//Vestnik KRAUNTS. Fiz.-mat. Nauki. – 2020. – Vol.32, № 3. – P. 15–28.
37 Худалов М.З. Нелокальная краевая задача для нагруженного уравнения параболического типа // Владикавказский математический журнал. – 2002. – Т. 4, № 4. – С. 59–64.
38 Shweta Kumari, Mani Mehra. Numerical Approximation of Spatially Loaded Time-Fractional Diffusion Equation // IFAC PapersOnLine. – 2024. – Vol.58, № 12. – P. 89–94.
39 Бештокова З.В. Численный метод решения начально-краевой задачи для многомерного нагруженного параболического уравнения общего вида с условиями третьего рода //Вестн. Сам. гос. техн.ун-та. Сер. Физ.-мат. науки. – 2022. – Т. 26, № 1. – С. 7–35.
40 Abdullaev V.M., Aida-zade K.R. Numerical method of solution to loaded nonlocal boundary value problems for ordinary differential equations// Comput. Math. Math. Phys. – 2014. – Vol.54, № 7. – P. 1096–1109.
41 Abdullaev V.M., Aida-zade K.R. Finite-difference methods for solving loaded parabolic equations// Comput. Math. Math. Phys. – 2016. – Vol.56, № 1. – P. 93–105.
42 Alikhanov A.A., Berezkov A.M., Shkhanukhov-Lafishev M.Kh. Boundary value problems for certain classes of loaded differential equations and solving them by finite difference methods// Comput. Math. Math. Phys. – 2005. – Vol.48.– P. 1581–1590.

43 Abdullaev V.M. Numerical solution of a boundary value problem for a loaded parabolic equation with nonlocal boundary conditions// Vestnik KRAUNC. Fiz.-Mat. Nauki. – 2020. – Vol.32, № 3. – P. 15–28.
44 Дженалиев М. Т. К теории линейных краевых задач для нагруженных дифференциальных уравнений. – Алматы : Компьютер. центр ИТПМ, 1995. –270 с.
45 Дюво Г., Лионс Ж.-Л. Неравенства в механике и физике. – М.: Наука, 1980. – 383 с.
46 Шелухин В.В. Задача со средними по времени данными для нелинейных параболических уравнений//Сиб. матем. журнал. – 1991. – Т.32, № 2. – С. 154–165.
47 Ломов И.С. Теорема о безусловной базисности корневых векторов нагруженных дифференциальных операторов второго порядка//Дифференц. уравнения. – 1991. – Т. 27, № 9. – С. 1550–1563.
48 Самарский А.А., Гулин А. В. Численные методы. Москва: Наука, 1989. –432 с.
49 Pao C. Nonlinear Parabolic and Elliptic Equations. New York: Plenum, 1992.
50 Gil M.I. Stability of Fredholm type integro-parabolic equations// J. Math. Anal. Appl. – 2000. – Vol.244.– P. 318–332.
51 Chirot M., Lovat B. Some remarks on nonlocal elliptic and parabolic problems// Nonlinear Anal. – 1997. – Vol.30, № 7. – P. 4619–4627.
52 Friedman A., Huang C. Averaged motion of charged particles under their self-induced electric field//Indiana Univ. Math. J. – 1994. – Vol.43. – P. 1167–1125.
53 Huang C. Global solutions for dynamical systems modeling motion of charged particles//Nonlinear Anal. – 1997. – Vol.30, № 7. – P. 4663–4676.
54 Duan J., Ervin V.J. Dynamics of a nonlocal Kuramoto-Sivashinsky equation// J. Differential Equations. – 1998. – Vol.143. – P. 243–266.
55 Gonzales A., Castellanos A. Nonlinear electrodynamic waves on films falling down an inclined plane//Phys. Rev. E. – 1996. – Vol.53. – P. 3573–3578
56 Graham-Eagle J. A nonlocal equation arising in the theory of wet combustion//MA J. Appl. Math. – 1995. – Vol.54.– P. 1–8.
57 Lorenzi A., Prilepko A. Fredholm-type results for integrodifferential identification parabolic problems// Differential and Integral Equations. – 1993. – Vol.6. – P. 535–552.
58 Garroni M.G., Menaldi J.L. Green’s function and invariant density for an integro-differential operator of second order// Annali di Matematica Pura ed Applicata. – 1989. – Vol.154. – P. 147–222.
59 Castro J. Deep learning schemes for parabolic nonlocal integro-differential equations// Partial Differential Equations and Applications. – 2022. – Vol.77, № 3. – P. 77

60 Dehghan M., Shakeri F. Solution of parabolic integro-differential equations arising in heat conduction in materials with memory via He's variational iteration technique// Int. J. Numer. Methods Biomed. Eng. – 2010. – Vol.26. – P. 705–715.
61 Cannon J.R., Yin H.M. A class of non-linear non-classical parabolic equations// J. Differ. Equ. – 1989. – Vol.79. – P. 266–288.
62 Dehghan M. Numerical solution of a parabolic equation with non-local boundary specifications// Applied Mathematics and Computation. – 2003. – Vol.145, № 1. – P. 185-194.
63 El-Gamel M., El-Baghdady G.I., El-Hady M.A. Highly Efficient Method for Solving Parabolic PDE with Nonlocal Boundary Conditions// Applied Mathematics. – 2022. – Vol.13. – P. 101-119.
64 Borachok I., Chapko R., Palianytsia O., Brown J. On the numerical solution of a parabolic Fredholm integro-differential equation by the RBF methods//Results Appl. Math. – 2025. – Vol.26. – P. 100559.
65 Elango S., Govindarao L., Vadivel R. A comparative study on numerical methods for Fredholm integro-differential equations of convection-diffusion problem with integral boundary conditions// Appl. Numer. Math. – 2025 – Vol.207. – P. 323–338.
66 Boglaev I. A numerical method for solving nonlinear integro-differential equations of Fredholm type.//J. Comput. Math. – 2016. – Vol.34. – P. 262–284.
67 Miller R.K. An integrodifferential equation for rigid heat conductors with memory//J. Math. Anal. Appl. – 1978. – Vol.66. – P. 313–332.
68 Yang Z., Xie J. Holder regularity of solutions for certain degenerate parabolic integro-differential equation// Adv. Differ. Equ. Control Process. – 2024. – Vol.31. – P. 379–395.
69 Efendiev M., Vougalter V. Existence of solutions for some non-Fredholm integro-differential equations with mixed diffusion//Journal of Differential Equations. – 2021. – Vol.284, №3 – P. 83–101.
70 Attia A., El-Kalla I.L., Elsaid A., Abd El-Monem R. An accelerated iterative technique for solving mixed Fredholm-Volterra integral equations// Ain Shams Engineering Journal. – 2024. – Vol.15, №2 – P. 102755.
71 Prince P., Elango S.L., Govindarao L., Unyong B. Numerical techniques for two-parameter elastic foundation using integro-partial differential equations// Alexandria Engineering Journal. – 2026. – Vol.135. – P. 100–113.
72 Pao C.V. Numerical methods for nonlinear integro-parabolic equations of Fredholm type//Appl. Math. Comput. – 2001. – Vol.120. – P. 255–269.
73 Zafarullah A. Application of the method of lines to parabolic partial differential equations with error estimates//Journal of the ACM (JACM). – 1970. – Vol.17. – P. 294–304.

74 Джумабаев Д.С. Об одном методе исследования обыкновенных дифференциальных уравнений// Известия АН КазССР.Серия физико-математическая. – 1982. –№ 3. – С. 1-5.
75 Джумабаев Д.С. Обоснование метода ломаных для одной краевой задачи линейного параболического уравнения // Известия АН КазССР.Серия физико-математическая. – 1983. –№ 1. – С. 8-11.
76 Асанова А.Т., Джумабаев Д.С. Об оценках решений и их производных краевой задачи для параболического уравнения // Известия МОН РК, НАН РК.Серия физико-математическая. – 2000. –№ 5. – С. 3-8.
77 Будак Б.М. О методе прямых для некоторых квазилинейных краевых задач параболического типа// Ж. вычисл. матем. и матем. физ.– 1961. – Т. 1, № 6. – С. 1105–1112.
78 Khankishiyev Z.F. On solution of a nonlocal problem with dynamic boundary conditions for a loaded linear parabolic equation by straight-line methods// Bulletin of Computational Applied Mathematics, Universidad Simon Bolivar. – 2017. Vol.45, № 1. – P. 75-96.
79 Khankishiyev Z.F. Solution of one problem for linear loaded parabolic type of differential equation with integral conditions// Adv. Math. Models Appl. – 2022. Vol.7, № 2. – P. 178–190.
80 Voigt A. The method of lines for nonlinear parabolic differential equations with mixed derivatives// Numer. Math. – 1979. – Vol.32. – P.197–207.
81 Karimov I.K., Khujaev I.Q., Khujaev J.I. Application of the method of lines for solving one-dimensional equation of parabolic type under the boundary conditions of the second and first genera//Vestnik KRAUNC. Fiz.-Mat. Nauki. – 2018. Vol.27, № 1. – P. 78–92.
82 Verwer J.G., Sanz-Serna J.M. Convergence of method lines approximations to partial differential equations// Computing. – 1984. Vol.33. – P. 297–313.
83 Kuanysh S.K., Assanova A.T., Kadirbayeva Z.M. Method of lines for a loaded parabolic equation// J. Math. Mech. Comput. Sci. – 2025. Vol.125, № 1. – P. 3–17.
84 Assanova A.T., Liu Z., Kuanysh S.K., Kadirbayeva Z.M. Convergence, stability, and error analysis of the method of lines for solving loaded parabolic equations// AIMS Math. – 2025. Vol.10, № 12. – P. 29454–29469.
85 Assanova A.T., Kuanysh S.K. A numerical approach to solving parabolic Volterraintegro-differential equations.// Kazakh Mathematical Journal. – 2026. Vol.26, № 2. – P. 42–58.
86 Джумабаев Д. С. Признаки однозначной разрешимости линейной краевой задачи для обыкновенного дифференциального уравнения// Журнал вычислительной математики и математической физики. – 1989. Т.29, № 1. – С. 50–66.

87 Dzhumabaev D.S. On one approach to solve the linear boundary value problems for Fredholm integrodifferential equations//J. Comput. Appl. Math. – 2016. Vol.294. – P. 342–357.
88 Dzhumabaev D.S., Bakirova E.A. On the unique solvability of the boundary-value problems for Fredholm integrodifferential equations with degenerate kernel// J. Math. Sci. – 2017. Vol.220, № 4. – P. 1–21.
89 Assanova A.T., Imanchiyev A.E., Kadirbayeva Zh.M. A nonlocal problem for loaded partial differential equations of fourth order//Bulletin of the Karaganda University. Mathematics Series. – 2020. Vol.97, № 1. – P. 6–16.
90 Bakirova E.A., Kadirbayeva Zh.M., Tleulesova A.B. On one algorithm for finding a solution to a two-point boundary value problem for loaded differential equations with impulse effect//Bulletin of the Karaganda University. Mathematics Series. – 2017. Vol.87, № 3. – P. 43–50.
91 Assanova A.T., Kadirbayeva Zh.M., Medetbekova R.A., Mynbayeva S.T. Problem for differential-algebraic equations with a significant loads// Bulletin of the Karaganda University. Mathematics Series. – 2024. Vol.113, № 1. – P. 46–59.
92 Kadirbayeva Zh.M. On an algorithm for solving a problem with parameter for the essentially loaded differential equations// Lobachevskii J. Math. – 2022. Vol.43, № 11. – P. 3183–3191.
93 Bakirova E.A., Assanova A.T., Kadirbayeva Zh.M. A problem with parameter for the integro-differential equations//Mathematical Modelling and Analysis. – 2021. Vol.26, № 1. – P. 34–54.
94 Bakirova E.A., Assanova A.T., Kadirbayeva Z.M. Solving multi-point problem for Volterra-Fredholm integro-differential equations by using Dzhumabaev parametrization method// Open Math. . – 2024. Vol.22, № 1. – P. 20240024.
95 Assanova A.T., Uteshova R. Solution of a nonlocal problem for hyperbolic equations with piecewise constant argument of generalized type// Chaos, Solitons & Fractals. – 2022. Vol.165. – P. 112816.
96 Kadirbayeva Zh.M., Dzhumabaev A.D. Numerical implementation of solving a control problem for loaded differential equations with multi-point condition// Bulletin of the Karaganda University. Mathematics Series. – 2020. Vol.100, № 4. – P. 81–91.
97 Uteshova R., Kadirbayeva Z., Marat G., Minglibayeva B. A novel numerical implementation for solving problem for loaded depcag// International Journal of Mathematics and Physics. – 2022. Vol.13, № 2. – P. 50–57.
98 Assanova A.T., Imanchiev A.E., Kadirbayeva Zh.M. Numerical solution of systems of loaded ordinary differential equations with multipoint conditions // Computational Mathematics and Mathematical Physics. – 2018. Vol.58, № 4. – P.508–516.
99 Искакова Н.Б., Кадирбаева Ж.М., Бакирова Э.А., Қуаныш С.Қ. Параболалық теңдеу үшін шеттік есепті шешудің сандық

әдісі//Қазақстан-Британ техникалық университетінің хабаршысы. – 2024. – Т.21, № 3. – Б. 165–175.
100 Assanova A.T., Kadirbayeva Zh.M., Kuanysh S.K. Numerical-analytical method for solving initial-boundary value problem for loaded parabolic equation// Bulletin of the Karaganda University. Mathematics Series. – 2025. Vol.117, № 1. – P. 34–45.
101 Kuanysh S., Kadirbayeva Z.M. Analysis of nonlocal problem for loaded parabolic equation via numerical method// Lobachevskii Journal of Mathematics. – 2025. Vol.46, № 10. – P. 5417-5427.
102 Assanova A.T., Kadirbayeva Zh.M. On the numerical algorithms of parametrization method for solving a two-point boundary-value problem for impulsive systems of loaded differential equations// Computational and Applied Mathematics. – 2018. Vol.37, № 4. – P. 4966–4976.
103 Bakirova E.A., Iskakova N.B., Kadirbayeva Z.M. Numerical implementation for solving the boundary value problem for impulsive integro-differential equations with parameter// KazNU Bulletin. Mathematics, Mechanics, Computer Science Series. – 2023. Vol.119, № 3. – P. 19–29.
104 Temesheva S.M., Kadirbayeva Z.M., Kuanysh S.K. Analysis of semi-periodic problem for integro-differential equations of parabolic type// Lobachevskii J. Math. – 2025. Vol.46. – P. 6441–6454.
105 Bakirova E., Iskakova N., Assanova A. Numerical method for the solution of linear boundary-value problems for integro differential equations based on spline approximations// Ukr. Math. J. 2020.
106 Assanova A.T., Bakirova E.A., Kadirbayeva Zh.M. Numerically approximate method for solving of a control problem for integro-differential equations of parabolic type// News of the NAS RK. Phys.-Math. Series. – 2019. Vol.328, № 6. – P. 14–24.
107 Огнева В.В. Метод “прогонки” для решения разностных уравнений// Ж. вычисл. матем. и матем. физ. – 1967. Т.7, № 4. – С. 803–812.
108 Samarskii A.A. The Theory of Difference Schemes. New York: Marcel Dekker Inc., 2001.
109 Dzhumabaev D.S. A method for solving the linear boundary value problem for an integro-differential equation// Computational Mathematics and Mathematical Physics– 2010. Vol.50. – P. 1150–1161.