5 дәріс

Турбулентті қозғалыстардың жартылай эмпирикалық теориясы. Прандтльдің «араласу жолы» теориясы, оның жетістіктері мен кемшіліктері. Карманның ұқсастық гипотезасы

Дәрістің мақсаты

Турбуленттік қозғалысты сипаттаудың жартылай эмпирикалық тәсілдерін түсіндіру, Прандтльдің араласу жолы мен Карманның ұқсастық гипотезасын салыстыру және олардың қолданылу шектерін ажырату.

Дәрістің мазмұны

1. Жартылай эмпирикалық теориялардың қажеттілігі.
2. Прандтльдің араласу жолы ұғымы.
3. Турбуленттік тұтқырлық және жанама кернеу.
4. Карманның ұқсастық гипотезасы.
5. Теориялардың жетістіктері мен шектеулері.

1. Турбулентті қозғалыстардың жартылай эмпирикалық теориясына кіріспе

Турбулентті қозғалыс — сұйық пен газ ағысының күрделі, ретсіз, көп масштабты тербелмелі қозғалысы болып табылады. Мұндай қозғалыста жылдамдық пен қысымның мәндері уақыт бойынша тұрақсыз, ал ағын құрылымы кеңістікте үнемі өзгеріп отырады. Ламинардын турбуленттілікке өтуі кезінде сұйықтың бөлшектері арасындағы өзара әсер күшейеді, инерциялық күштер басым болады, ал тұтқырлық күштері тек ағынның ең жұқа қабаттарында ғана маңызды рөл атқарады.

Турбулентті қозғалысты сипаттау үшін Навье–Стокс теңдеулерін қолдануға болады, бірақ бұл теңдеулердің аналитикалық шешімін алу іс жүзінде мүмкін емес. Сондықтан XX ғасырдың басында ғалымдар турбуленттілікті сипаттайтын **жартылай эмпирикалық теорияларды** ұсынды. Бұл теорияларда тәжірибелік мәліметтер мен физикалық болжамдарға сүйене отырып, турбулентті ағымдағы импульс, энергия және масса алмасу заңдылықтары жуық түрде сипатталады.

Жартылай эмпирикалық теориялардың негізгі мақсаты — **турбулентті тұтқырлықты** (ν_t) немесе **араласу интенсивтілігін** анықтау. Бұл шамалар арқылы турбулентті қозғалыстың орташа сипаттамалары (орташа жылдамдықтар, кернеулер, энергия ағындары) есептеледі.

2. Прандтльдің «араласу жолы» теориясы

Неміс ғалымы **Людвиг Прандтль (L. Prandtl)** 1925 жылы турбулентті қозғалыстарды сипаттаудың қарапайым және интуитивті моделін ұсынды. Ол бұл тәсілді **«араласу жолы теориясы»** (*Mixing length theory*) деп атады.

2.1 Негізгі идеясы

Прандтль турбулентті ағыстағы импульстің алмасуын молекулалардың диффузиясына ұқсас деп қарастырды. Бірақ мұнда “молекулалар” емес, **жеке сұйық бөлшектері немесе турбулентті құйынды құрылымдар** қозғалады.

Ол былай деді: турбулентті ортада сұйық бөлшегі орташа жылдамдық градиенті бар аймақ арқылы араласып, шамамен ℓ қашықтыққа жылжиды. Бұл арақашықтық **араласу жолы (mixing length)** деп аталады.

Прандтль мынадай байланыс енгізді:

$$\tau = \rho \left(l \frac{d\overline{u}}{dy}\right)^2$$

мұндағы:

- τ - турбулентті жанама кернеу,
- ρ - сұйықтың тығыздығы,
- l - араласу жолы,
- $\frac{d\overline{u}}{dy}$ - жылдамдықтың градиенті.

Осыдан турбулентті тұтқырлық анықталады:

$$\nu_t = l^2 \left|\frac{d\overline{u}}{dy}\right|$$

Бұл теңдеу турбуленттілік қарқындылығы мен градиентінің арасындағы байланысқа негізделген.

2.2 Прандтльдің логарифмдік жылдамдық профилі

Қабырғамен шектелген ағын үшін (мысалы, құбырдың ішінде немесе жазық пластина бойымен ағын) Прандтль араласу жолын ағынның қалыңдығына пропорционал деп қабылдады:

$$l=\kappa y$$

мұнда κ – **фон Карман тұрақтысы**, шамамен **0.4–0.41**,ал y – қабырғадан арақашықтық.

Осыны пайдаланып, қабырғаға жақын аймақтағы жылдамдық профилін алу үшін теңдеуді интегралдаймыз:

$$\frac{d\overline{u}}{dy} = \frac{u_*}{\kappa y}$$

интегралдау нәтижесінде:

$$\overline{u} = \frac{u_*}{\kappa} \ln(y) + C$$

мұнда $u_* = \sqrt{\tau_0/\rho}$ – **үйкеліс жылдамдығы**.

Бұл теңдеу – **Прандтль–Карман логарифмдік заңын** береді, ол турбулентті шекаралық қабаттағы жылдамдықтың таралуын жақсы сипаттайды.

2.3 Теорияның жетістіктері

Турбулентті қозғалысты түсіндірудің қарапайым физикалық моделі ұсынылды.

Жылдамдықтың логарифмдік профилін дәл сипаттайды – тәжірибемен жақсы сәйкес келеді.

Қабырғалық үйкеліс және шекаралық қабаттағы кернеу таралуын бағалауға мүмкіндік береді.

Көптеген инженерлік есептерде (құбыр ағындары, ағынды каналдар, аэродинамикалық кедергілер) пайдаланылады.

2.4 Кемшіліктері мен шектеулері

- Араласу жолының нақты физикалық табиғаты түсіндірілмейді (тек эмпирикалық түрде енгізілген).
- Прандтльдің формуласы тек **стационарлы, бірөлшемді және толық дамыған ағындарда** ғана дұрыс.
- Тұтқырлықтың өзгерісі, қысым градиенті және үшөлшемді әсерлер ескерілмейді.
- Логарифмдік профиль қабырғадан тым алыста немесе турбуленттіліктің әлсіз аймақтарында жарамсыз.

3. Карманның ұқсастық гипотезасы

Прандтльдің ізін ала **Теодор фон Карман** турбулентті қозғалыстың табиғатын түсіндіретін **ұқсастық гипотезасын (Similarity hypothesis)** ұсынды.

Оның идеясы — турбулентті ағынның белгілі бір аймақтарында (мысалы, шекаралық қабатта) жылдамдық пен турбулентті кернеулердің таралуы **өлшемсіз параметрлер** арқылы ұқсас заңдылықпен сипатталады.

3.1 Негізгі қағидасы

Карман болжамы бойынша, турбулентті ағынның құрылымы қабырға маңында бір ғана сипаттамалы жылдамдық (үйкеліс жылдамдығы $u*$) және бір ғана ұзындық масштабы (y) арқылы анықталады.

Ол ұқсастық теңдеуін ұсынды:

$$\frac{d\bar{u}}{dy} = \frac{u_*}{\kappa y}$$

Бұл теңдеу Прандтль моделінен алынғанымен, Карман оны **ұқсастықтың әмбебап заңы** ретінде қарастырды.

Осы гипотезадан логарифмдік заңды қайта шығарып, оның әмбебаптығын дәлелдеді.

3.2 Карман тұрақтысы және тәжірибелік расталуы

Карман тәжірибе нәтижелерін талдай отырып, тұрақтының мәнін $\kappa \approx 0.41$ деп анықтады.

Осы мән қазіргі уақытқа дейін **Карман тұрақтысы** ретінде қабылданады және барлық инженерлік турбуленттілік модельдерінде пайдаланылады.

Карманның гипотезасы кейінірек турбулентті шекаралық қабат, құбырдағы ағын, атмосферадағы турбуленттілікті зерттеу теорияларына негіз болды.

3.3 Артықшылықтары мен ғылыми маңызы

- Турбулентті қозғалыстардың әмбебап сипаттамасын ұсынды;

- Прандтль моделін математикалық тұрғыдан негіздеп, тұрақтыларды нақтылады;

- Логарифмдік жылдамдық профилінің әмбебап сипатын түсіндірді;

- Заманауи RANS және LES модельдеріндегі қабырғалық функциялардың негізін қалады.

3.4 Кемшіліктері

Ұқсастық гипотезасы нақты ағындардың геометриялық күрделілігін (мысалы, иілген қабырғалар, айналмалы ағындар) ескермейді;

Эксперименттік параметрлерге тәуелді (мысалы, Re санынан тәуелсіз деп болжанады, бірақ нақтыда бұл тәуелділік бар);

Тек қалыптасқан (fully developed) ағындарға қолданылады.

4. Қорытынды

Прандтль мен Карман ұсынған жартылай эмпирикалық теориялар турбуленттілікті түсіндіруде шешуші рөл атқарды.

- **Прандтльдің «араласу жолы» теориясы** турбулентті импульс алмасуын молекулалық диффузияға ұқсастырып, қарапайым және физикалық тұрғыда түсінікті модель ұсынды.
- **Карманның ұқсастық гипотезасы** бұл модельді жалпылап, турбулентті шекаралық қабаттардағы ағын заңдылықтарын әмбебап сипаттайтын негіз қалады.

Қазіргі заманғы CFD (Computational Fluid Dynamics) және турбуленттілік модельдері (мысалы, k–ε және k–ω SST) осы теориялардың физикалық қағидаларын пайдаланады.
Прандтль мен Карман еңбектері арқасында инженерлер құбырлардағы, арналардағы және аэродинамикалық жүйелердегі турбулентті ағындарды сандық және аналитикалық түрде сипаттай алады.

Өзін өзі тексеруге арналған сұрақтар

1. Турбуленттіліктің жартылай эмпирикалық теориялары не үшін енгізіледі?
2. Араласу жолының физикалық мағынасы қандай?
3. Прандтль моделінде турбуленттік тұтқырлық қалай анықталады?
4. Араласу жолы мен қабырғадан қашықтық қандай шарттарда байланыстырылады?
5. Логарифмдік жылдамдық заңы қандай жуықтаулардан алынады?
6. Карманның ұқсастық гипотезасының негізгі идеясы қандай?
7. Қысым градиенті мен ағынның ажырауы қарапайым модельдердің қолданылуына қалай әсер етеді?
8. Молекулалық және турбуленттік тұтқырлықтардың айырмашылығы қандай?