Әл-Фараби атындағы Қазақ ұлттық университеті

ӘОЖ 519.6:31(043.3) Қолжазба құқығында

Керімақын Айнұр

«Геометриясы күрделі облыстардағы есептеу гидродинамикасы есептерін бейімдегіш торлар әдісімен шешу»

«8D05405 Есептеу ғылымдары және статистика»

Философия докторы (PhD) дәрежесін
алу үшін дайындалған диссертация

Отандық ғылыми кеңесші:
ф.м.-ғ.д., профессор, ҚР ҰИА академигі,
РҒА құрметті докторы **Темірбеков Н.М.**

Шетелдік ғылыми кеңесші:
ф.м.-ғ.д., профессор, РҒА корреспондент-мүшесі, **Кабанихин С.И.**

Қазақстан Республикасы
Алматы, 2026

МАЗМҰНЫ

БЕЛГІЛЕУЛЕР МЕН ҚЫСҚАРТУЛАР 3
КІРІСПЕ 4
1. Цилиндрлік координаттардағы Навье–Стокс–Бринкман теңдеулері үшін бастапқы және шекаралық шартты есептің әлсіз шешімін зерттеу 23
1.1 Есептің қойылымы 23
1.2. Цилиндрлік координаттардағы Лаплас операторы және сызықтық емес (конвективтік) мүше 26
1.3 Айналмалы қозғалысы жоқ осьтік симметриялы ағыс 27
1.4 Әлсіз тұжырымын қарастыру 29
1.5 Есептің априорлық энергетикалық теңсіздігі 44
1.6. Ток функциясын анықтау және әлсіз тұжырым 60
1.7.**Геометриясы күрделі облыстағы Навье-Стокс-Бринкман теңдеулеріне қойылған (1.11)-(1.15) есебін FEniCS есептеу платформасында ақырлы элементтер әдісімен сандық жүзеге асыру** 62
1.8 1-ші бөлім бойынша қорытынды 70
2. Күрделі геометриялық облыстарда ортогоналды қисық сызықты торларды құру әдістері 71
2.1. Қисық сызықты ортогоналды торды құру 71
2.2 Ортогоналды қисық сызықты тор құру алгоритмі 72
2.3. Ортогональ қисық сызықты тор 80
2.4.Кез келген (произвольный) ортогоналды қисық сызықты координаттардағы grad, div, Δ операторларының сипаттамасы 82
2.4.1 Метрикалық тензор 85
2.5 Күрделі шекаралық облыстарда Навье–Стокс теңдеулерін сандық шешу үшін қисық сызықты координаттар әдісін қолдану 89
2.5.1 Ортогоналды координаттар жүйесіндегі Навье-Стокс теңдеулері 89
2.5.2 Ортогоналды қисық сызықты торды құру алгоритмі 92
2.6. Арна ішіндегі ағынды есептеудің ақырлы айырымдық алгоритмі. 94
2.7. Есептеу нәтижелері және талқылау 102
2.8 2-ші бөлім бойынша қорытынды 115
3. **Навье-Стокс теңдеулер жүйесін еркін қисық сызықты координаттарда қолдана отырып, каталитикалық нейтрализаторды математикалық және компьютерлік модельдеу.** 116
3.1 Математикалық модель 116
3.2 Шекаралық шарттар 119
3.3 Жаңа координаталар жүйесіндегі негізгі теңдеулер 120
3.4 Жаңа координаттар жүйесінде шекаралық шарттар: 126
3.5 Ақырлы айырымдық қатынастарының сипаттамасы 128
3.6. Нәтижелерді талдау. 131
3.7 3-ші бөлім бойынша қорытынды 135
ПАЙДАЛАНЫЛҒАН ӘДЕБИЕТТЕР ТІЗІМ 138

БЕЛГІЛЕУЛЕР МЕН ҚЫСҚАРТУЛАР

Ω	– есептеу облысы;
τ	– уақыт бойынша қадамы;
h_1, h_2	– кеңістіктегі тор қадамдары;
m	– кеуектілік коэффициенті;
$k_0(x,r)$	– кеуекті ортаның өткізгіштік коэффициенті;
ψ	– ток функциясы;
ω	– жылдамдық иірімі;
φ_i	– зиянды заттардың концентрациясы;
θ	– пайдаланылған газ температурасы,;
T	– кеуекті ортаның температурасы;
$\vec{u} = (u_x, u_\theta, u_r)$	– ағын жылдамдығы;
β	– жылудың кеңею коэффициенті;
g	– ауырлық күш үдеуі;
ΔT	– температура айырмасының шкаласы;
ν	– кинематикалық тұтқырлық коэффициенті;
k_T	– жылуөткізгіштік коэффициенті;
D_i	– бөлшектердің массалық өткізгіштігі;
Re	– Рейнольдс саны;
Pe	– Пекле саны;
Fr	– Фрудо саны;
Pr	– Прандтль саны;
Gr	– Грасгоф саны;
Nu	– Нуссельт саны;
P	– қысым;
Le_i	– Льюис саны;
C_ρ	– тұрақты қысымдағы газдың жылу сыйымдылығы;
M_{mix}	– молекулалық салмақ;
J	– Якобиан;
g^{km}	– контравариантты метрикалық тензор;
g_{km}	– ковариантты метрикалық тензор;
λ_i	– диффузия коэффициенті.
$d_{\text{ш}}$	–кеуекті ортадағы шарлардың диаметрі.
D_{an}	–аппарат диаметрі

КІРІСПЕ

Жұмыстың жалпы сипаттамасы. Диссертациялық жұмыс кіріспеден және үш бөлімнен тұрады және күрделі геометриялық аймақтардағы гидродинамикалық процестердің модельдерін қатаң математикалық және сандық зерттеуге арналған. Жұмыста тұтқыр сығылмайтын сұйықтықтың ағынын зерттеудің заманауи математикалық және сандық әдістері ұсынылады.

Бірінші бөлімде Навье–Стокса–Бринкман теңдеулері негізінде кеуекті ортадағы тұтқыр сығылмайтын сұйықтықтың осьтік-симметриялық ағыны қарастырылады. Есеп вариациялық түрде тұжырымдалған, ал оның әлсіз шешімі Соболев кеңістігінде анықталған. Есептің орнықтылығы мен жуық шешімнің жинақтылығы дәлелденді. Сандық шешім шекті элементтер әдісімен табылды. Сонымен қатар, классикалық Тейлор–Худ алгоритмі қолданылды.

Аталған тарауда сандық есептеулер FEniCS заманауи есептеу платформасында жүзеге асырылып, Рейнольдс санының әртүрлі мәндері үшін ағын құрылымы зерттелді. Рейнольдс санының артуымен ағын функциясының максималды мәні өсетіні көрсетілді, бұл инерциялық әсерлердің күшеюімен және айналым аймағының кеңеюімен түсіндіріледі. Сонымен қатар, құрылымдалмаған тордың тығыздығының әртүрлі мәндері үшін жүргізілген есептеулер нәтижесінде шешімнің тор параметрлеріне тәуелсіздігіне қол жеткізілді, бұл қолданылған ақырлы элементтер әдісінің орнықтылығы мен жинақтылығы растады.

Диссертацияның екінші бөлімінде ток функция және жылдамдық иірімі айнымалыларындағы Навье-Стокс теңдеулері еркін ортогональ қисық сызықты координатаға түрлендірілген. Еркін қисық сызықты координатадағы теңдеулер жүйесінің шешімі қарастырылды. Күрделі геометрия аймақтар үшін ортогональды қисық сызықты торлар құрастырылды, бұл есептеу аймағының геометриясын дәл сипаттауға және есептеу қателігін айтарлықтай азайтуға мүмкіндік береді. Түрлендірілген теңдеулер негізінде ақырлы-айырымдылық сұлба әзірленді, оның көмегімен есептің жуық сандық шешімі алынды.

Сонымен қатар ортогональ қисық сызықты торлар әдісі негізінде күрделі геометриялы облыстар үшін тиімді есептеу торлары құрылған. Теңдеулер жүйесін шешу үшін үшдеңгейлі айырымдық схема мен итерациялық алгоритм ұсынылған. Алгоритм тордың ортогоналдылығын, сандық шешімнің жоғары есептеу дәлдігін қамтамасыз етті. Сандық эксперименттер Python 3.11 бағдарламалау тілінде Jupyter ортасында жүргізілген. Алынған нәтижелердің Роуч есебінің эталондық деректерімен, сондай-ақ Napolitano және Orlandi [36] зерттеулерінің нәтижелерімен жақсы сәйкестігі, ұсынылған әдістің дұрыстығы мен сенімділігін дәлелдейді.

Диссертацияның үшінші бөлігінде Навье–Стокса теңдеулерін геометриясы күрделі облыстарда сандық шешу әдісі каталитикалық нейтрализатордағы ламинарлы ағындарды модельдеу мәселесіне қолданылған. Бұл тарауда цилиндрлік координаталардан қисықсызықты

ортогональ координаталар жүйесіне көшу қатаң математикалық өрнектер арқылы негізделген. Қисықсызықты облыстар үшін ортогональ торлар құруда Данаев Н.Т. ұсынған[22] сандық әдістер қолданылып, күрделі геометриялы есептік облыстар үшін тиімді есептеу торлары алынған.

Теңдеулерді шешу үшін ақырлы айырымдық әдіс қолданылып, есептеу үдерісі үшдеңгейлі алгоритм негізінде жүзеге асырылған. Ұсынылған схеманың орнықтылығы мен жинақтылығы теориялық тұрғыда негізделіп, сандық есептеулер арқылы расталған. Сандық шешімдер Python 3.11 бағдарламалау тілінде Jupyter ортасында алынған. Сонымен қатар FEniCS платформасында есептелген ақырлы элементтер әдісі (FEM) нәтижелері мен Python ортасында алынған ақырлы айырымдылық әдісі (FDM) нәтижелеріне салыстырмалы талдау жүргізіген. Олардың ток функциясының максимал мәнінің нәтижелерінің сәйкестігі (92%) ұсынылған сандық модельдердің дұрыстығы мен сенімділігін көрсетеді.

Диссертациялық жұмыста алынған нәтижелер күрделі геометриялы облыстардағы ламинарлы ағындарды дәл және қажетті деңгейде модельдеуге мүмкіндік береді. Қисындылығы дәлелденген математикалық есептер мен ұсынылған сандық алгоритмдер есептеу математикасы, гидродинамика және инженерлік есептер салаларында маңызды теориялық және практикалық мәнге ие.

Зерттеудің өзектілігі. Бүгінгі таңда геометриясы күрделі облыстардағы гидродинамика есептерін бейімделгіш торлар әдісімен шешу өзекті зерттеу тақырыптарының бірі болып табылады. Мұндай есептерде тек торды дұрыс құру жеткіліксіз, сонымен қатар физикалық процесті нақты сипаттайтын математикалық модельді дұрыс қалыптастыру қажет. Сапалы тор мен дұрыс қойылған есеп аппроксимациялық қателіктерді азайтып, сандық шешімнің орнықтылығы мен жинақтылығын қамтамасыз етеді.

Диссертациялық жұмыста цилиндрлік координаталардағы осьтік симметриялы ағынды еркін қисық сызықты облыстағы Навье–Стокс теңдеулерін сандық шешу әдісі арқылы қарастырылды. Сонымен қатар, осы бағыттағы ғылыми зерттеулерге шолу жасалды.

Ашық жарияланымдардағы ғылыми журналдар мен іргелі монографияларда Навье-Стокс теңдеулерін математикалық тұрғыда қисындылығын зерттеуге арналған жұмыстар өте көп. Атап айтқанда, бұл бағыттағы классикалық жұмыстар Ж.Лере, Ладыженская О.А., Солонников, Р.Теман, Жак-Луи Ленонс, Кобельков Г.М., Ольшанский М.А., Самарский А.А., Вабищевич П.Н., Смағұлов Ш., Данаев Н.Т. және т.б. еңбектерінде жарияланған.

Бұл ғылыми жұмыстарда Навье-Стокс теңдеулер жүйесі модельдік облыстарда, тікбұрышты Декарт координаталарда қарастырылған. Ал қисық сызықты координаталарда сызықтық емес Навье-Стокс теңдеулеріне қойылған бастапқы-шекаралық шартты есептердің қисындылығын қарастыру және оларға тиімді сандық әдістер құрастыру бүгінгі таңда өте өзекті тақырып.

Р. Темамның [1] еңбегінде тұтқыр сығылмайтын сұйық үшін Навье–Стокс теңдеулерінің математикалық теориясы және оларды сандық талдау әдістері қарастырылады. Жұмыста шешімдердің бар болуы, бірегейлігі және кейбір жағдайларда жүйелілігі зерттелген. Есеп Соболевтің функционалдық кеңістіктерінде қарастырылған, әлсіз шешім ұғымы енгізіліп, априорлық энергетикалық бағалар алынған. Сонымен қатар, Навье–Стокс теңдеулерін шешуге арналған әртүрлі сандық аппроксимация әдістері талданады. Бұл еңбек гидродинамикалық ағындарды математикалық талдау мен сандық модельдеу саласындағы іргелі жұмыстардың бірі болып табылады.

Ж. –Л. Лионстың [2] іргелі еңбегі дербес туындылы дифференциалдық теңдеулер теориясына арналған. Бұл монографияда математикалық физиканың сызықтық емес теңдеулерін зерттеудің қатаң математикалық жолы негізделген. Лионстың дамытқан негізгі идеясы – монотондылық қасиеті бар операторларды қолдану. Банах кеңістігінде монотонды және коэрцитивті операторлармен берілген теңдеу үшін әлсіз шешімнің бар және оның жалғыз болуы дәлелденген. Күрделі стационар емес гидродинамика теңдеулерінің шешімі үшін жинақылық әдісін ұсынған.

Ол келесі этаптардан тұрады:

- Галеркин әдісімен өлшемі шектеулі жуық шешім құру;
- Бұл жуықтаулар үшін априорлы бағалар алу;
- Әлсіз жинақаталатын тізбекшені бөліп алу;
- Дәл шешімнің бар болуын дәлелдеу үшін сызықтық емес мүшелерде шекке көшу.

О. А. Ладыженскаяның [3] еңбегінде сығылмайтын тұтқыр сұйықтың Навье–Стокс теңдеулерінің математикалық теориясы жасалды және функционалдық талдау әдістері арқылы зерттелген. Автор теңдеулерді Соболев кеңістіктерінде қарастырып, әлсіз шешім ұғымын қатаң түрде анықтайды және есептің вариациялық қойылымын математикалық тұрғыдан негіздейді. Энергетикалық әдіс арқылы априорлық бағалаулар мен энергетикалық теңсіздік алынып, екіөлшемді жағдайда глобалды әлсіз шешімнің бар болуы мен шешімнің біреу екені дәлелденген. Үш өлшемді жағдайда әлсіз шешімнің бар екендігі дәлелденіп, алынған нәтижелер кейінгі сандық әдістердің, соның ішінде ақырлы элементтер әдісінің, теориялық негізін қалыптастырды. О.А.Ладыженскаяның жұмысында жылдамдық-қысым айнымалыларындағы Навье-Стокс теңдеулері үшін айырымдық схемалардың орнықтылығы мен жинақтылығы дәлелденген [3].

Интегралдық сақталу заңдары мен жылжымалы бейімделгіш торлар концепциясы аппараты арқылы еркін қисық сызықты координаталарға түрлендіру алғаш Годунов С.К. [4] монографиясында келтірілген. Декарт координаталарынан қисық сызықты координаталарға көшкенде шешуші рөлді Якоби матрицасы және оның анықтаушы (түрлендіру Якобианы) атқарады. Түрлендіру Якобианы декарт кеңістігіндегі есептеу ұяшығының локальды көлемін сипаттайды, монографиясында [4] еркін қисық сызықты координаталарда беймделгіш торларды қолдану арқылы газ динамикасы

есептерін шешуге қатысты мәселелер қарастырылған. Күрделі есептеу аймақтарында торларды құру алгоритмдері, қисық сызықты координаталардағы газ динамикасы теңдеулер жүйесі және нақты есептер мен олардың ерекшеліктеріне бейімделетін есептеудің айырымдық схемалары сипатталған.

Көптеген физикалық процестер күрделі геометриямен қатар біртексіз тұтас ортаны сипаттайтын коэффициенттермен өрнектеледі. Кеуек орта арқылы ағысты сипаттайтын Дарси, Брикман модельдерінде теңдеулердің коэффициенттері үзілісті, жылдам өзгеретін функциялар. Мұндай теңдеулерді сандық шешудің өзіндік ерекшеліктері бар. Ақырлы айырымдар әдісін немесе ақырлы элементтер әдісін қолданғанда пайда болатын сызықтық немесе сызықтық емес сызықтық алгебралық теңдеулердің коэффициенттері жылдам өзгеретін болады. Матрицаның шарттылық саны өседі де, нашар шартталған болады. Мұндай сызықтық алгебралық теңдеулер жүйесін шешудің өз қиындықтары бар екені белгілі. Сондықтан мұндай теңдеулерді тиімді сандық әдістерін қолдану өзекті мәселе.

Г.М. Кобельковтың [5] еңбегінде Навье–Стокс теңдеулерінің модификацияланған түрлері және олардың аппроксимациясы қарастырылады. Автор шешімдердің қасиеттерін, сондай-ақ осы теңдеулерді шешуге қолданылатын сандық схемалардың орнықтылығын зерттейді. Мақалада итеративті әдістер талданады және қарастырылып отырған есептің қисынды қойылуын негіздеуге мүмкіндік беретін априорлық бағалаулар алынады. Сонымен қатар, қарастырылып отырған гидродинамикалық модельдер үшін шешімдердің болуы мен бірегейлігінің шарттары талқыланады.

М.А. Ольшанскийдің [6] еңбегінде тұтқыр сығылмайтын сұйық үшін стационар Навье–Стокс теңдеулерінің ақырлы-элементтер әдісі арқылы аппроксимациясы қарастырылады. Автор Галеркиннің төмен дәрежелі әдісін зерттеп, сандық схеманың орнықтылығы мен жинақтылығын талдайды, сондай-ақ жылдамдық пен қысым үшін қателік бағаланады.

Н.Т. Данаев, Ш. Смағұлов және Н.М. Темірбеков [7] еңбегінде кеуекті ортасы бар қисық арналардағы тұтқыр сығылмайтын сұйықтықтың тұрақты ағынын сандық зерттеу жүргізілген. Жұмыстың негізгі мақсаты - кеуекті ортаның әсерін ескере отырып, Навье-Стокс теңдеулерін шешудің тиімді итеративті алгоритмін әзірлеу және қолдану, сондай-ақ пайда болатын ағынның құрылымын егжей-тегжейлі талдау. Кеуекті қабаттың әсері көлемдік Дарси мүшесін қосу арқылы модельденеді. Бұл тәсіл еркін аймақтағы және кеуекті ортадағы ағынды бір математикалық модель шеңберінде сипаттауға мүмкіндік береді.

Нәтижесінде арнадағы жылдамдықтардың таралуын, қысымның өзгеруін және құйынды аймақтардың қалыптасуын кешенді талдау мүмкіндігі туындайды.

Ш. Смағұлов, Н.Т. Данаев және Н.М. Темірбеков [8] жұмысында гидродинамикалық есептердегі қысым мен толық арынға арналған шекаралық шарттарды модельдеу мәселелері қарастырылған. Есептеу торын қайта

құруды қажет етпестен, шекаралардың күрделі геометриясын ескеруге мүмкіндік беретін жалған аймақтар әдісі қолданылады. Ұсынылған тәсіл шекаралық шарттарды дұрыс тұжырымдауды қамтамасыз етеді. Сандық әдістің орнықтылығы мен тиімділігі дәлелденген. Алынған нәтижелер күрделі облыстардағы ағыстарды модельдеу барысында қолданылады.

Н.М. Темирбеков [9] еңбегінде цилиндрлік координаталардағы Навье–Стокс теңдеулері еркін қисық сызықты координаталар жүйесіне түрлендіріліп, алынған жүйе үшін ақырлы-айырымдық схема құрылған. Құрылған ортогональды қисық сызықты торлар негізінде сандық шешім табылып, ток функциясы мен жылдамдық иірім арқылы ағын құрылымы сипатталған. Ұсынылған әдіс күрделі геометриялы аймақтардағы ламинарлы ағындарды тиімді есептеуге мүмкіндік береді.

Vafai, K.; Tien, C. [10] еңбегінде кеуекті ортадағы ағын мен жылу алмасу үдерісіне шекаралық және инерциялық әсерлердің ықпалы жан-жақты зерттелген. Авторлар классикалық Дарси моделінің қолданылу аймағы шектеулі екенін көрсетіп, жоғары жылдамдықтарда және қатты қабырға маңында инерциялық әрі тұтқырлық әсерлерді ескеру қажеттігін негіздейді. Мақалада модельді Бринкман және Форшгеймер типті мүшелерді қосу арқылы кеңейту қарастырылып, кеуекті ортадағы ағынды тек Дарси заңымен сипаттау жеткіліксіз екендігі дәлелденген. Нәтижесінде инерциялық және шекаралық эффектілерді қамтитын жалпыланған модельдердің қажеттілігі көрсетіледі. Бұл зерттеу Бринкман типті теңдеулерді қолданудың теориялық негізін қалыптастырып, еркін ағын мен кеуекті аймақ арасындағы интерфейсті сипаттауда маңызды рөл атқарады.

Angot, P.; Bruneau, C.-H.; Fabrie, P. [11] еңбегінде сығылмайтын тұтқыр сұйық ағынында қатты кедергілерді есепке алудың тиімді сандық әдісі ұсынылған. Авторлар Навье–Стокс теңдеулеріне Бринкман типті айып (penalization) мүшесін енгізу арқылы сұйық пен қатты аймақты біртұтас орта түрінде қарастыру тәсілін дамытады, бұл күрделі геометриялы аймақтарда біртекті тор құру арқылы модельдеуге мүмкіндік береді. Айыптау параметрі арқылы қатты аймақта жылдамдық нөлге ұмтылады, ал сұйық аймақта классикалық Навье–Стокс теңдеулері сақталады, осылайша есептеу алгоритмінің орнықтылығы мен әмбебаптығы қамтамасыз етіледі.

Masud және Khurram [12] еңбегінде сығылмайтын Навье–Стокс теңдеулері үшін вариациялық көпмасштабты (VMS) ақырлы элементтер әдісі ұсынылған. Авторлар стандартты Галеркин әдісінің орнықтылық мәселесін шешу үшін жылдамдық өрісін ірі және ұсақ масштабтарға жіктеп, ұсақ масштабты компонентті қалдыққа негізделген модель арқылы анықтайды. Алынған әдіс вариациялық тұрғыдан үйлесімді және SUPG пен GLS тұрақтандыру әдістеріне құрылымдық жағынан жақын. Ұсынылған тәсіл ірі торларда да жоғары дәлдік пен орнықтылық көрсетіп, стационарлық және стационарлы емес ағын есептерінде жақсы жинақталу қасиеттерін қамтамасыз етеді.

Ingram [13] еңбегінде Darcy заңынан ауытқитын (non-Darcian) ағындарды сипаттайтын Стокс–Бринкман және Навье–Стокс–Бринкман теңдеулері үшін аралас ақырлы элементтер әдісі ұсынылған. Автор кеуекті және қатты аймақтарда өтімділік коэффициенті мен Бринкман тұтқырлығының күрт өзгеретін жағдайларын қарастырып, есептің әлсіз шешімін Соболев кеңістіктерінде зерттейді. Жұмыста үздіксіз және дискреттік есептердің қисындылығы мен априорлық орнықтылық бағалары дәлелденіп, тор қадамы мен мәжбүрлі параметрі нөлге ұмтылғандағы жинақталуы көрсетіледі. Сонымен қатар конвективтік мүшеге жалған қиғаш симметрияланған дискреттік форма енгізіліп, сызықтық емес Бринкман моделінің орнықтылығы қамтамасыз етіледі. Бұл зерттеуде Бринкман типті есептерді аралас ақырлы элементтер әдісімен шешудің теориялық негізін салған.

Anand, Ebrahimi Pour, Klimach және Roller [14] еңбегінде Бринкманның пенализация әдісін жоғары ретті үзілісті Галеркин схемасында күрделі геометрияларды модельдеу үшін қолдану қарастырылған. Авторлар қабырға шекараларын торды өзгертпей енгізу мақсатында Бринкман мүшесін пайдаланып, енгізілген шекара тәсіліне ұқсас әдісті дамытады. Жұмыста жоғары ретті аппроксимациялардың артықшылықтары көрсетіліп, кубтық элементтері бар октоағаш торлар негізінде қисықсызықты шекараларды тиімді модельдеуге болатыны дәлелденген.

Сонымен қатар айып параметрінің тұрақтылық пен дәлдікке әсері талданған. Ұсынылған әдіс күрделі шекараларды айқын торлау жүргізбей-ақ есепке алуға мүмкіндік береді.

Garcke және Nürnberg [15] еңбегінде қозғалмалы беттегі сығылмайтын Навье–Стокс теңдеулерін шешуге арналған параметрлік ақырлы элементтер әдісі ұсынылған. Авторлар бет динамикасын жылдамдық өрісімен байланыстырылған толық модель түрінде қарастырып, есептің әлсіз қойылымын және энергетикалық орнықтылығын негіздейді. Үздіксіз және толық дискреттік схемалар үшін орнықтылық шарттары, соның ішінде LBB шарты, талданған. Жоғары ретті параметрлік элементтер қолдану арқылы қисық беттердің дәл геометриялық аппроксимациясы қамтамасыз етіледі. Бұл жұмыс Навье–Стокс теңдеулерін теориялық тұрғыдан негізделген және сандық тұрғыдан орнықты әдіспен шешудің маңызды нәтижелерін ұсынады.

Rahim Bux Khokhar және т.б. авторлар [16] еңбегінде цилиндр тәрізді құбырдағы Ньютондық түрдегі сұйықтың араласу және бөліну үдерістері сандық әдіспен зерттелген. Жұмыста кеуекті және кеуексіз орта жағдайында Рейнольдс санының, Darcy санының және өтімділік коэффициентінің ағын құрылымына әсері талданады. Басқарушы теңдеулер ретінде цилиндрлік координаталардағы Навье–Стокс–Бринкман жүйесі қарастырылып, Darcy мүшесі арқылы кеуекті ортаның ықпалы ескерілген. Кеңістіктік дискреттеу Галеркиннің ақырлы элементтер әдісімен, ал уақыт бойынша Тейлор – Галеркин қысымға әсер ету алгоритмімен жүзеге асырылған. Нәтижелер кеуексіз ортада Re артқан сайын құйындардың қарқынының күшейетінін, ал

кеуекті ортада олардың әлсірейтінін көрсетеді. Бұл зерттеу Бринкман теңдеулері негізіндегі осесимметриялық ағындарды сандық зерттеу үшін маңызды теориялық және әдістемелік негіз болып табылады.

Li және т.б. авторлар [17] еңбегінде цилиндрлік координаталардағы үшөлшемді стационар емес Навье–Стокс теңдеулерін шешуге арналған спектрлі коллокациялық әдісі ұсынылған. Кеңістіктік аппроксимация үшін радиал бағытта Чебышев көпмүшелері, ал бұрыштық бағытта Фурье қатары қолданылған. Уақыт бойынша жартылай айқын схема енгізіліп, сығылмау шарты қысымға арналған Пуассон теңдеуі арқылы қамтамасыз етіледі.

Авторлар схеманың Курант–Фридрихс–Леви(CFL) шарты орындалғанда орнықты және уақыт бойынша екінші ретті дәлдікке ие екенін көрсетеді. Бұл жұмыс цилиндрлік координаталардағы Навье–Стокс теңдеулерін жоғары дәлдікпен шешуге арналған спектрлі әдістердің теориялық және сандық негізін ұсынады.

Domenichini және Baccani [18] еңбегінде цилиндрлік координаталардағы үшөлшемді Навье–Стокс теңдеулері үшін жалған спектрлік әдісі ұсынылған. Авторлар поляр осіндегі сингулярлықты дұрыс өңдеуге арналған математикалық тұжырым жасап, Фурье гармоникалары үшін регулярлық шарттарды енгізеді. Кеңістіктік дискреттеу спектралды әдіспен жүзеге асырылып, қойылым цилиндрлік құбыр ішіндегі 3D кіріс ағынын модельдеуге қолданылған. Нәтижелер цилиндрлік координаталарда дұрыс математикалық тұжырымның жоғары дәлдік пен орнықтылықты қамтамасыз ететінін көрсетеді.

Pauli және Behr [19] еңбегінде сығылмайтын Навье–Стокс теңдеулерін анизотропты торларда шешуге арналған кеңістік және уақытқа байланысты ақырлы элементтер әдісі ұсынылған. Авторлар кеңістік пен уақытты біртұтас вариациялық қойылымда қарастырып, тұрақтандыру мүшелері арқылы LBB шартынан туындайтын тұрақсыздықтарды жояды. Жаңа масштабқа тәуелді тұрақтандыру стратегиясы енгізіліп, әдістің жоғары Рейнольдс сандарында да орнықты және дәл екендігі сандық мысалдар арқылы көрсетілген.

Осы зерттеулер шеңберінде алынған нәтижелер кеуекті және еркін орта арасындағы өзара әсердің ағын құрылымына елеулі ықпал ететінін көрсетеді. Әсіресе, тұтқырлық коэффициентінің кеңістікте өзгеруі және Дарси типті көлемдік кедергі мүшесінің енгізілуі жылдамдық өрісінің өзгеруіне және қысым градиентінің күшеюіне алып келеді. Вариациялық қойылым негізінде құрылған әлсіз форма күрделі геометриясы бар облыстарда есепті орнықты шешуге мүмкіндік береді және коэффициенттердің үзілісті болуын табиғи түрде ескеруге жағдай жасайды. Алынған энергетикалық априорлық бағалар сандық схеманың орнықтылығын теориялық тұрғыдан негіздеп, тор қадамының ұсақталуы кезінде шешімнің жинақталуын қамтамасыз етеді. Жүргізілген есептеулер цилиндрлік координаталардағы Навье–Стокс–Бринкман моделінің кеуекті ортадағы осесимметриялық ағындарды сипаттауда тиімді математикалық аппарат екенін дәлелдейді және әлсіз

шешімге негізделген ақырлы элементтер әдісінің күрделі инженерлік есептерді модельдеуде қолданылу мүмкіндігін көрсетеді.

Ал екінші бөлімде біз сандық есепті қарастырамыз. Күрделі геометриялық пішіндер үшін сандық шешімдерді есептеу гидродинамикадағы өзекті мәселе болып табылады. Компьютерлер жылдамдығы мен жадысының тұрақты әрі қарқынды дамуы, сондай-ақ дәлдіктің артуы күрделі геометриялы аймақтарда Навье–Стокс теңдеулерін шешуге мүмкіндік бере бастады. Шекараларды неғұрлым дәл көрсету үшін бейімделгіш құрылымдалған немесе құрылымдалмаған торларға негізделген әдістер әзірленді. Күрделі геометриясы бар аймақтардағы гидродинамика есептері үшін ақырлы элементтер әдісі негізгі құрал болып табылады, сондықтан күрделі геометриялық аймақтарда тиімді болып табылады.

M.Bercovier, мен M.S. Engelman [20] еңбегінде сығылмайтын сұйықтық үшін Навье–Стокс теңдеулері изопараметрлік параболалық элементті қолданатын ақырлы элементтер әдісімен шешілген. Айыптау әдісін қолдану шешілетін теңдеулер жүйесінен белгісіз қысымды алып тастауға мүмкіндік береді. Әртүрлі түйіндер саны бар ақырлы элементтер әдісі зерттеледі. Әдістің орнықтылығы мен жинақталуы әртүрлі сандық мысалдар арқылы көрсетілген. Үзіліссіздік шартын орындау үшін айыптау әдісі және азайтылған интеграция қолданылады.

Мақалада [21] айыптау әдістері, соның ішінде сығылмайтын ағын есептерін шешуде жиі қолданылатын қысқартылған интегралдау әдісі қарастырылған. Зерттелген алты қырлы элементтердің шектеулі саны үшін аталған әдіске тізбекті айыптау әдісімен салыстыра отырып сыни талдау жасалып, бірінші әдістің екіншісіне тек жекелеген дербес жағдайларда ғана эквивалентті екені көрсетілген. Жалпы жағдайда тізбекті айыптау әдісінің дәлірек нәтиже беретіні анықталған. Биквадраттық немесе триквадраттық жылдамдық пен сызықтық қысымды қолданатын жаңа элементтің, сол жылдамдықты пайдаланып, бірақ қысымның қоссызықтық немесе үшсызықтық аппроксимациясын қолданатын элементтермен салыстырғандағы елеулі артықшылықтары негізделген.

J.P.Huffenus пен D.Khaletzky [22] жұмысында Навье–Стокс теңдеулерін табиғи айнымалыларда шешуге арналған ақырлы элементтердің қарапайым әрі тиімді әдісі ұсынылған.

Айқын жоғары ағындық схема мен диффузиялық мүшелер үшін уақыт қадамына ешқандай теориялық шектеу қоймайтын айқын емес қадам қолданылды, ал қысым Пуассон теңдеуін шешу арқылы анықталады. Ламинарлық ағыстың екі есептеу нәтижесі ұсынылып, олар қолда бар сандық және эксперименттік мәліметтермен салыстырылған. Навье–Стокс теңдеулерін ақырлы элементтер әдісімен шешудің сандық әдістерін дамыту бүгінгі күнге дейін жалғасуда.

L. Beirao da Veiga, F. Dassi және G. Vacca [23] еңбегінде Навье–Стокс теңдеулеріне арналған ақырлы элементтер құрастырылып, зерттелді; олардың орнықтылығы Петров–Галеркиннің ағынға қарсы әдісі (SUPG) арқылы

қамтамасыз етілді. Бұл жұмыста [23] ақырлы элементтердің қазіргі заманғы әдістеріне ауқымды шолу жасалған. Навье–Стокс теңдеулеріне арналған ақырлы элементтер әдісінің болашағы мен даму перспективалары [24] мақаласында қарастырылған.

Навье–Стокс теңдеулерін табиғи айнымалылар арқылы шешу үшін ақырлы айырымдар әдісі сәтті қолданылған. P. L. Viollet, J. P. Benque және J. Goussebaile [25] мақаласында сандық алгоритм үшін табиғи айнымалылардағы Навье–Стокс теңдеулері қолданылған. Конвективті-диффузиялық қадамнан және үзіліссіздік теңдеуі бар қадамнан тұратын ыдырату әдісінің алгоритмі келтірілген. Соңғы қадамды екі тәсілмен: ағын функцияларын немесе қысымды анықтау әдісімен жүзеге асыруға болады. Жылдам нейтрондардағы сұйық металлды көбейткіш-реактордың жылулық талдауы бойынша қолданбалы есептер шешілген.

Эксперименттік зерттеулермен және нақты реакторларға қолдану нәтижелерімен салыстырмалы талдау көрсетілген.

Б. Жұмағұлов, Н. Темірбеков және Д. Тамабайдың [26] жұмысында Навье–Стокс теңдеулерін табиғи айнымалыларда шешуге арналған физикалық үдерістер бойынша бөлудің модификацияланған үш қадамды схемасының орнықтылығы мен жинақтылығы зерттелген. Навье–Стокс теңдеулерін табиғи айнымалыларда шешу үшін физикалық үдерістер бойынша бөлудің модификацияланған үш қадамды сызбасының орнықтылығы мен жинақтылығы зерттеледі. Айырымдық схема үшін қысым градиентінің априорлық бағалаулары алынды. Айырымдық схеманың орнықтылығы мен бастапқы есептің шешіміне $O(\tau + h^2)$ дәлдігімен жинақталатыны дәлелденген.

У. С. Әбдібеков, Д. Б. Жакебаев және Б. Т. Жұмағұловтың [27] жұмысында ірі иірімдер әдісі (LES) арқылы пропеллері бар цилиндрлік ыдыстағы біртекті сұйықтықтың турбуленттік араласуы зерттелген. Есептеулер үшін үш сатылы ыдырату әдісі арқылы шешілген Навье–Стокс теңдеулері мен Пуассон теңдеуі қолданылды. Нәтижелер Рейнольдс санының өсуімен иірімдер құрылымының күрделілене түсетінін, сондай-ақ модельдің эксперименттік деректермен жоғары деңгейде сәйкестенетінін көрсетті.

Ю.В. Василевский мен М. Гарбей [28] еңбегінде стационарлық емес, сығылмайтын сұйықтықтың үш өлшемді қозғалысын сипаттайтын Навье–Стокс теңдеулерін шешуге арналған ыдырату (splitting) әдісі қарастырылған. Бірінші кезеңде конвективтік мүшенің арнайы аппроксимациясы бар Кранк-Николсон схемасы пайдаланылады. Әзірленген схема шаршы қималы үш өлшемді арнадағы дөңгелек цилиндрді іштей ағып өту есебін сандық шешу үшін қолданылады. Авторлар құрылымсыз торлардағы есептеу тиімділігін арттыру мақсатында облысты декомпозициялау әдісін және көп процессорлы есептеу архитектурасын қолданады.

М.А. Ольшанский мен Ю.В. Василевскийдің [29] жұмысында кіші Рейнольдс сандарындағы ықшамдалған Навье–Стокс теңдеулері үшін Шура толықтырмасына арналған әртүрлі алдын ала шарттау мүмкіндіктері

қарастырылған. Авторлар екі белгілі тәсілге талдау жасайды және спектрлік қасиеттері жақсартылған жаңа алдын ала шарттау әдісін ұсынады. Ұсынылған әдіс *h*-тәуелсіз жинақталуды, тұтқырлық коэффициенттері кіші болған кездегі орнықтылықты және конвективті тасымалдануы бар есептердегі жоғары тиімділікті қамтамасыз етеді. Бұл жұмыс Навье–Стокс теңдеулерін шешудің итерациялық әдістерін дамытуға елеулі үлес қосады.

Енді құрылымдалмаған және құрылымдалған қисық сызықты торларды тұрғызуға арналған ғылыми еңбектерге қысқаша шолу жасайық. Мысалы, А.А. Даниловтың диссертациясында [30] инженерлік есептеулерде пайдаланылатын күрделі торларды автоматты түрде құрудың заманауи әдістері қарастырылған. Есептеу математикасы мен инженерлік практикада қолданылатын құрылымдық емес есептеу торларын тұрғызудың автоматтандырылған технологиялары әзірленген.

Н.М. Темірбеков, Е. Қанағатов және Д. Тамабайдың мақаласында [31] құрылымдалмаған торларды құру алгоритмі сипатталады шепті алға жылжыту әдісін қолдана отырып, триангуляциялау сипатталған. Торларды құру кезінде әдетте орын алатын қабырғалардың қиылысу қателерін түзету әдісі ұсынылған. Қателіктер және оларды түзету нәтижелері диаграммалар түрінде көрсетілген. Күрделі ағын үдерістері бар ішкі аймақтарда сипаттаудың жоғары дәлдігін қамтамасыз ету маңыздылығын ескере отырып, мақалада осы аймақтарда торды ұсақтау мүмкіндігі қарастырылған. Сонымен қатар мақалада берілген мысалдардың триангуляция нәтижелері диаграммалар мен кестелер түрінде келтірілген.

Жоғарыда аталған алгоритмнің коды Python бағдарламалау тілінде жүзеге асырылған. Мақала аясында кодтың жалпы сипаттамасы беріледі. Кодтың толық нұсқасы мақалада көрсетілген сілтемеде орналасқан. Нәтижелерді визуализациялау үшін matplotlib пакеті пайдаланылды.

В.Д. Лисейкиннің [32] мақаласында құрылымдық бейімделгіш торларды құру әдістеріне шолу келтірілген. Мақалада бейімделгіш торлардың есептеу алгоритмдерінің дәлдігі мен тиімділігін айтарлықтай арттыра алатыны атап өтіледі. Мұндай торлар әсіресе шешімнің үлкен градиенттері бар тар аймақтарын қамтитын көпөлшемді және стационарлық емес есептерді шығаруда тиімді. Бейімделу арқылы осцилляцияларды жоюға, жасанды тұтқырлықты азайтуға және гидрогазодинамикалық есептердің қолайлы шешімін алу үшін тор түйіндерінің санын айтарлықтай қысқартуға болады.

В.Д. Лисейкин мен Ю.И. Шокиннің [33] монографиясы координаттық түрлендіру әдісі арқылы алынатын бейімделгіш торлардағы сингулярлы ауытқыған теңдеулерді сандық шешу мәселелеріне арналған. Қабаттарды жоятын түрлендірулерді құрастырудың бірөлшемді және көпөлшемді әдістемесі келтірілген.

Хомпыш Х., Шакир А.Г., Кабидолданова А.А. [34] мақаласында тұтқыр сығылмайтын серпімді бейньютондық сұйықтардың ағынын сипаттайтын сызықтық емес Навье–Стокс–Фойгт жүйесі үшін кері есептер қарастырылған. Жұмыста сыртқы күштің уақытқа тәуелді қарқындылығын, сондай-ақ

сұйықтың жылдамдығы мен қысымын анықтау мәселесі зерттеліп, әлсіз және күшті шешімдердің бар болуы мен бірегейлігі дәлелденген.

М.Т. Дженалиев, А.М. Серик және М.Г. Ергалиев [35] еңбегінде конус тәрізді облыстағы екіөлшемді Навье–Стокс теңдеулері үшін шеттік есептің шешімі зерттелген. Авторлар Фадеев–Галеркин әдісін және априорлық бағалауларды қолдана отырып, Соболев кеңістіктерінде шешімнің бар болуы, бірегейлігі және регулярлығы дәлелденген.

М. Наполитано мен П. Орландидің [36] мақаласы Халықаралық гидравликалық зерттеулер қауымдастығының (International Association for Hydraulic Research, IAHR) есептеу гидродинамикасы бойынша жұмыс тобының «Күрделі геометриялық облыстардағы ламинарлық ағынды есептеу» тақырыбындағы есебі болып табылады. Жұмыс тобы «әртүрлі әдістерді бір нақты есепте салыстыру маңызды мәселе» деген қорытындыға келді. Конвекция есептерін алдын ала талқылау олардың көбі конвективті мүшелерді дискреттеуге өте сезімтал екенін көрсетеді. Сондықтан, конвективті тасымалдау екінші дәрежелі рөл атқаратын тесттік есебі таңдап алынды, атап айтқанда, Роуч ұсынған біртіндеп кеңейетін арна арқылы өтетін ламинарлық ағын таңдалды.

Роучтың тесттік есебі күрделі геометриялық облыстардағы, яғни кеңейетін кіріс бөлігі бар жазық арнадағы сұйықтықтың ламинарлық ағынын зерттеуге арналған.

Бұл мақалада тесттік мысалды шешу үшін ψ, ω айнымалыларындағы айнымалы бағыттар схемасы қолданылды. Ортогоналды қисық сызықты торды құру үшін Н.Т.Данаевтың [37]-еңбегінде ұсынған әдісі пайдаланылды.

Жоғарыда әзірлеген әдіс арқылы 3 -бөлімде біз ортогоналды қисық сызықты торды құрып, оны автомобильдің каталитикалық нейтрализаторына сұйықтық қозғалысын сандық модельдеу үшін қолдандық.

Автокөліктердің шығарған газдарды атмосфераның төменгі қабатында қозғалып, адамның тыныс алу жолдарына кері әсерін тигізеді. Сондықтан автомобиль жасау индустриясында оның зиянды шығарындыларын азайту мақсатында каталитикалық нейтрализаторлардың конструкциясы жылдан-жылға жетілдіріліп келеді. Ал Қазақстан сияқты дамушы мемлекеттерде ескі автомобильдер қолданыста көп, олардың көбінде каталитикалық нейтрализатор жоқтың қасы. Қоршаған ортаға зиянды заттарды шығару мөлшерін барынша азайту мақсатында каталитикалық нейтрализаторлардың тиімді модельдерін жасау өте өзекті мәселе.

Сонымен қатар кателитикалық нейтрализатор автомобиль двигателінің жану камерасындағы улы заттарды синтездеп оның қалдығын атмосфераға шығаратын өзінше бір химиялық реактор.

Каталитикалық нейтрализаторлардың формасы қисық сызықты геометриялы болады және онда температуралық әсері бар каталитикалық реакция жүреді, газдық қоспа тасымалданады. Бұл процестерді толығымен математикалық сипаттау үшін сызықтық емес Навье-Стокс теңдеулерін қолдану керек.

Сондықтан бұл жұмыста еркін қисық сызықты координаталардағы Навье-Стокс теңдеулерін сандық шешу әдісі автомобильдің каталитикалық нейтрализаторларын математикалық модельдеу мысалы арқылы берілген.

Навье-Стокс теңдеулері цилиндрлік координаталар жүйесінен еркін қисық сызықты координаталар жүйесіне түрлендіріліп, алынған дифференциалдық теңдеулер үшін үшқадамды айырымдық схема мен ортогональды қисық сызықты торлар әдісі қолданылды, осы торлардың түйіндерінде теңдеулердің сандық шешімі табылады.

Кеуекті ортадағы тұтқыр сұйықтықтың ағысын сипаттау үшін, Навье-Стокс теңдеулер жүйесі ток функциясы мен жылдамдық иірімі айнымалыларында қарастырылды. Ток функциясы арқылы, ағынның жылдамдық өрісінің құрылымы, ал жылдамдық иірімі арқылы сұйықтың айналмалы қозғалысы сипатталды.

Навье-Стокс теңдеулерін цилиндрлік координаталардан еркін ортогональды қисық сызықты координаталарға түрлендіргенде келесі қиындықтар туындады. Олар мынадай мәселелер, жаңа координаталарға түрлендіру барысында теңдеудің сызықтық емес мүшелері күрделенді, координаталық метрика коэффициенттері кірісуі арқылы теңдеулер жүйесі күрделенді. Түрлендірілген градиент, дивергенция және Лаплас дифференциалдық операторларының айырымдық схемасын жасау белгілі ғылыми әдебиеттерде көп қарастырылмаған. Қисық сызықты ортогональ торды генерациялау және шекаралық шарттарды дәл қанағаттандыру мәселесі де өте өзекті. Сандық шешу әдістерінің аппроксимациясы, орнықтылығы, жинақтылығы мен дәлдігін зерттеу мәселелері бүгінгі таңда өте өзекті болып табылады.

Бұл диссертацияны орындау барысында жүргізілген зерттеу нәтижелері кеуекті ортада ағынның таралуын және оның динамикасын түсінуге мүмкіндік береді.

Геометриясы күрделі облыстардағы Навье-Стокс теңдеулеріне арналған шекаралық есептерді сандық шешудің бірнеше әдістері бар.

Қолданылуы оңай жалған облыстар әдісі R. Glowinski, T-W.Pan, J.Periaux [38-42] еңбектерінде ұсынылған. Бұл әдіс вариациялық принциптерді қолдану арқылы нақты шекарадағы шарттарды қанағаттандыруға мүмкіндік береді

Әдістің негізгі мақсаты күрделі геометриялық облыстарды қарапайым пішіндермен жабу арқылы есептеуді жеңілдету.

Математикалық физика есептерін еркін облыстарда сандық шешу үшін Смағулов Ш., Данаев Н.Т., Темірбеков Н.М. [8] мақаласында ұсынылған жалған облыстар әдісін қолдану тиімді екенін дәлелдеді.

Жалған облыстар әдісінің бұл модификациясының ерекшелігі жалған облыстың шекарасында қысым мен жылдамдықтың жанама компоненттерін беру арқылы бірден бірнеше маңызды мәселелерді шешуге мүмкіндік береді. Атап айтқанда, облыстың қисық сызықты шекарасы мәселесі шешіледі, қысым

үшін шекаралық шарт қойылады, біртекті айырымдық схема құру мүмкіндігі туады.

Бұл әдіс өнеркәсіпте және ғылымның әртүрлі салаларындағы қолданбалы есептерде пайдаланылады. Бұл жұмыстың [8] авторлары күрделі геометриялық облыстарда математикалық және компьютерлік модельдеу арқылы жалған облыстар әдісінің тиімділігі мен өнімділігін көрсетуді мақсат еткен.

Бұл әдіс есептеу күрделілігін азайтуға және қарапайым шекаралық есептерді жеңіл шешуге мүмкіндік береді. Алайда, күрделі шекаралар үшін дәлдік төмен болуы мүмкін. Есептеу тиімділігі жоғары болғандықтан, бұл әдіс жылдам шешім алу үшін қолайлы.

Есептеу практикасында кең қолданылатын ақырлы элементтер әдісі (FEM) облысты әртүрлі элементтерге, оның ішінде үшбұрыштарға, төртбұрыштарға, алтыбұрыштарға немесе үш өлшемді жағдайда тетраэдрлерге бөледі, және әр бөлікте есептеулер жүргізіледі. Геометрия күрделі болған сайын тор құру қиындайды, себебі элементтердің пішіндерін дұрыс таңдау және оларды үйлестіру күрделі болады.

Бұл FEM әдісі автомобиль өнеркәсібінде, әсіресе, шығарындыларды азайту мақсатында каталитикалық нейтрализаторларды жобалау мен жетілдіруде қолданылады.

FEM әдісімен каталитикалық нейтрализаторларды зерттеген жұмыстар жеткілікті. Ал соның бірі Chuah T.G., Gimbun J., Choong T.S.Y., Barkawi B.S. [43] өз мақаласында автомобильдердегі үш фазалы каталитикалық нейтрализаторлардың (TWCC) азот тотығын азайту үшін тиімділігін сандық есептеуге бағытталған. Жұмыста FEM әдісіне негізделген NEUTRALISATOR программалық пакеті құрылған. Бұл жұмыста қолданылған әдіс автокөліктегі газ шығару процесін, ондағы химиялық реакцияларды және геометриялық параметрлерді интеграциялау үшін кешенді құрал екенін көрсетеді, Яғни бұл әдістің инженерлік есептерді шешуде қолдану аясы кең.

Геометрия күрделенген сайын құрылымсыз торлар құру қиындайды, сондықтан FEM әдісінде торлар саны көбейеді [44].

Сондықтан заманауи компьютерлік техниканың дамуына байланысты қисық сызықты торлар әдісі кеңінен қолданыла бастады, тұтқыр сығылмайтын сұйық ағынын математикалық модельдеу көбінесе ток функциясы, жылдамдық иірімі айнымалыларындағы Навье-Стокс теңдеулер жүйесінің сандық шешімі негізінде жүзеге асырылады [9].

Темірбеков Н.М. [9] өз зерттеуінде кеуек ортаға арналған Навье-Стокс теңдеулерін Рейнольдс саны 100-ден 1000-ға дейінгі аралықта қарастырып, сұйықтық ағынының динамикасына кеуекті ортаның әсерін анықтаған.

Laurenzi, Matteo, and Spigler, Renato. [45] өз мақаласында цилиндрлік симметриялы құбыр жүйесінің бірнеше конфигурациялары үшін газ динамикасының Эйлер теңдеулерін және жанбай қалған газдар фракциясын сипаттайтын қосымша теңдеуді шешті. Бұл тәсіл құбыр пішіндерінің қалдық газдарды азайтуға әсерін бағалауға мүмкіндік берді. Каталитикалық нейтрализатордың

тиімділігін арттыруда құбырлардың геометриялық пішіндерінің маңызды рөл атқаратынын көрсетеді. Құбыр пішінін дұрыс таңдау арқылы зиянды газдардың деңгейін төмендету мүмкіндігі бар, бұл қоршаған ортаны қорғау үшін маңызды болып табылады. Осы жұмыс зерттеулерінде атап өтілгендей каталитикалық нейтрализатордың геометриялық пішіндері маңызды рөл атқарады. Нейтрализатор пішінін дұрыс таңдау оның тиімділігін арттырады.

Settar, A., Nebbali, R., Brahim, M., and Abboudi, S. [46] өз мақаласында бу арқылы метанды өңдеуде SMR процесінің тиімділігін арттыру мақсатында қабырғаға қапталған катализаторлар қабаттарының конфигурациялары сандық әдіспен зерттелген. Каталитикалық қабаттардың екі конфигурациясы салыстырылады, үздіксіз катализатор қабаттары және бос орындармен бөлінген дискретті катализатор қабаттары. Нәтижесінде дискретті қабаттарды пайдалану суық аймақтарды болдырмайтынын және метанның конверсиясын 60% жақсартатынын көрсетеді. Бұған каталитикалық аймақты ұзарту және үздіксіз жылумен қамтамасыз ету арқылы қол жеткізілген. Осы зерттеулер қозғалыс, энергия және газ динамикасының теңдеулерімен қарастырған, қоспа үшін Навье-Стокс теңдеулері қолданылған.

Қисық сызықты торлар әдісін сандық есептерді шешуге қолдану үшін теңдеулерді қисық сызықты координаталарға түрлендіру қажет, бұл бастапқы теңдеулерге қарағанда күрделірек формаға ие. Қисық сызықты торлар әдісінің артықшылығы тор түйіндерінің санын арттырмай-ақ сандық шешімді зерттеуге мүмкіндік береді яғни бастапқы физикалық облыста тордың өлшемі үлкен, ал есептеу облысында тор біркелкі болады.

[47] мақаласында қисық сызықты торларды генерациялау әдісі ұсынылған. Әдіс қисық сызықты шекарасы бар, тіктөртбұрышқа бейнеленетін облыстарда эллипстік теңдеулер жүйесін сандық шешуге негізделген. Осы жұмыста әзірленген әдіс заманауи тор генераторларын құрудың негізін қалады.

Қисық сызықты торлар әдісі күрделі геометриялық есептерді жоғары дәлдікпен шешу үшін ең тиімді болып табылады. Бұл әдіс басқа әдістермен салыстырғанда шекаралық шарттарды дәл орындайды, күрделі аймақтарды тиімді модельдейді және көпсалалы зерттеулер үшін әмбебаптығымен ерекшеленеді. Лисейкин В.Д. [48] монографиясында бейімделгі қисық сызықты торлар тензорлық салмақтық функциялары бар эллипстік теңдеулер арқылы тұрғызылады.

Данаев Н.Т., Лисейкин В.Д., Н.Н. Яненконың жұмысында түрлендірілген Навье-Стокстың газ динамикасына арналған теңдеулері қозғалмалы қисық сызықты ортогональ торда сандық шешуге қолданылған [49].

Диссертацияда ұсынылған айырымдық схеманың әдістемелік жаңалығы теңдеулер жүйесін шешу үшін үш деңгейлі айырымдық схема және облыс шекарасындағы жылдамдық иірімін итерациясыз анықтау әдісі ұсынылды. Мұндай схема П.Н.Вабищевич жұмысында ток функциясы мен жылдамдық иірімі (ψ, ω)-айнымалыдағы Навье-Стокс теңдеулері үшін қолданылған [50].

Алынған айырымдық схемаларды жүзеге асырғанда уақыт қадамына шектеу, тек есептің сызықсыздығына байланысты болды. Яғни уақыт бойынша қадамды өсірсек, есептеу орнықсыз болады. Сызықсыз есептерде айнымалылар арасындағы тәуелділіктер күрделі болып, үлкен уақыт қадамдары есептеулердің орнықтылығын жоғалтуына және қателіктердің ұлғаюына әкеледі. Сондықтан уақыт қадамының шектеуі шешімнің дәл және орнықты болуын қамтамасыз ету үшін қажет.

Отандық авторлардың [6,51,52] жұмыстарында геометриясы күрделі облыстарда Навье-Стокс теңдеулерінің сандық шешіміне арналған жаңа нәтижелер келтірілген.

Бұл диссертацияда Рейнольдс санын кең ауқымда (100-нан 10000-ға дейін) өзгерту және неғұрлым жиі торды қолдану арқылы турбуленттілік деңгейі мен ағынның құрылымына әсері жан-жақты талданды. Рейнольдс санының жоғары мәндері үшін кедергінің ағын құрылымына және энергия тиімділігіне ықпалы кеңінен зерттелді. Бұл нәтижелер каталитикалық нейтрализатордың тиімділігін арттыру жолындағы қосымша мүмкіндіктерді ашып көрсетеді.

Ғылыми зерттеулеріміз қолданбалы жағы каталитикалық нейтрализатордың жұмысын математикалық модельдеуге бағытталған. Бұл мақсатта математикалық модель ретінде цилиндрлік координаталарда өрнектелген екі өлшемді Навье-Стокс теңдеулері қолданылды. Навье-Стокс теңдеулері ток функциясы мен жылдамдық иірімі айнымалылары арқылы сипатталып, олардың шекаралық шарттары күрделі геометриялы қисық сызықты облыстарда дәл берілді.

Қарастырылған есепте осьтік симметрия бар, сондықтан екі өлшемді модельмен үш өлшемді есептің қасиеттерін зерттеуге болады.

Зерттеуде ортогоналды қисық сызықты торлар әдісінің талдану себебі

есептеу облысы бірлік квадрат болғандықтан сандық есептеулерді тор өлшемін үлкейтпей-ақ облыстың қажетті бөлігінде торды жиілету арқылы шешуге болады, ал физикалық облыста тордың қадамы үлкен болуы да мүмкін. Ал ақырлы элементтер әдісінде бұлай санау мүмкін емес, себебі үшбұрыштардың аудандары өлшемдес болу қажет. Ақырлы элементтер әдісі тор сапасына өте тәуелді.

Қисық сызықты координаталардағы Навье-Стокс теңдеулерін ары қарай түрлендіру арқылы есепті бірлік квадратта сандық шешуге қол жеткізілді, бірақ бастапқы теңдеулер күрделене түсті.

Геометриясы күрделі облыстарда біртекті айырымдық схема құру өте қиын, бұл қиындықты шешудің жолы Навье-Стокс теңдеулерін еркін қисық сызықты координаталарға түрлендіру. Осы координаталарда дискретті сандық шешім табу үшін ортогональ қисық сызықты тор құрылды. Қисық сызықты тор құру үшін Н.Т. Данаевтың [37] әдісі қолданылды.

Бұл әдістің жинақталу жылдамдығы коэффициенттердің және параметрлердің өзгерісінен аз тәуелді екені сандық эксперименттер жүргізу арқылы дәлелденді.

Көптеген методикалық есептеулер жүргізілді, нәтижелері көрнекілік үшін графиктермен, ток функциясының изосызықтары түрінде берілген.

Біздің бұл модельді үш компонентті каталитикалық түрлендіргіштерді (TWCC) және олардың азот тотығы шығарындыларын азайтудағы тиімділігін зерттеу үшін кеңейтуге болады. Бірақ келесі жетілдірулер қажет болады. Ол үшін химиялық кинетика теңдеулерін модельге қосу, температуралық әсерлерді есепке алу, жылулық динамиканы теңдеулерін қосу, катализаторға жылудың әсерін зерттеу керек.

Бұл жұмыста модель сығылмайтын сұйықтық үшін қарастырылған. Егер оны сығылатын газдарға бейімдейтін болсақ, онда газ динамикасы теңдеулерін қарастыру керек, газдың күй теңдеуін қолдану қажет, қарастырылған есепте жылдамдық жоғары емес, тығыздық көп өзгермейді, сондықтан бұл модельмен де есептеуге болады.

Зерттеудің мақсаты

Геометриясы күрделі облыстардағы тұтқыр сығылмайтын сұйық ағынын сипаттайтын Навье-Стокс теңдеулеріне қойылған бастапқы және шекаралық шартты есепті бейімделгіш торлар әдісімен сандық модельдеу, сондай-ақ ұсынылған әдістің тұрақтылығы, дәлдігі және есептеу тиімділігін теориялық және сандық тұрғыдан дәлелдеу.

Зерттеу жұмысының негізгі міндеттері:

1. Күрделі геометриялы облыстардағы Навье–Стокс теңдеулеріне қойылған бастапқы және шекаралық шартты есепті сандық шешу әдістерін талдау, бейімделгіш қисықсызықты торларды әзірлеу және есептің әлсіз қойылымын ақырлы элементтер әдісі негізінде тұжырымдау.
2. Навье–Стокс теңдеулерін еркін ортогоналды қисықсызықты координаталар жүйесіне түрлендіру және дәлдігі жоғары әрі орнықты шешім алуға мүмкіндік беретін сандық сұлбаны құру.
3. Ұсынылған әдістерге бағдарлама құрып, әртүрлі Рейнольдс сандары үшін есептеулер жүргізіп, параметрлердің дәлдік пен тиімділікке әсерін зерттеу.
4. Әзірленген әдісті тесттік есептерде верификациялап, нәтижелерді эталондық деректермен салыстыру және ақырлы айырымдар мен ақырлы элементтер әдістері шешімдеріне салыстырмалы талдау жүргізу.

Зерттеудің бағыты- шекарасы еркін қисық сызықты облыстағы Навье–Стокс теңдеулеріне қойылған бастапқы және шекаралық шартты есепті сандық шешу әдісін автомобильдің каталитикалық нейтрализаторы мысалында зерттеу

Зерттеу пәні – бейімделгіш торлар әдісін қолдану арқылы күрделі геометриялық аймақтардағы есептеу гидродинамикасы есептерін шешу.

Зерттеу әдістері – Жұмыста тұтқыр сығылмайтын сұйықтықтың Навье–Стокс теңдеулеріне қойылған бастапқы және шекаралық шартты есепке арналған сандық және компьютерлік модельдеу әдістері қолданылады. Теңдеулер жүйесін шешу үшін еркін ортогоналды қисық сызықты координаттарға көшу әдісі, ақырлы айырымдар әдісі және ақырлы элементтер

әдісі пайдаланылады. Сонымен қатар есептеу облысын дискреттеу үшін құрылымдалған және құрылымдалмаған торлар қарастырылып, шекаралық және бастапқы шарттар тиісті түрде беріледі. Есептердің әлсіз шешімінің орнықтылығы мен жинақтылығы априорлық бағалау әдісімен дәлелденіп, алынған нәтижелердің дәлдігін бағалау үшін салыстырмалы талдау жүргізіледі. Сандық есептеулер Python бағдарламалау тілінде заманауи есептеуіш FEniCS платформасын Visual Studio және Jupyter ортасында қолдану арқылы орындалды. Есептеу нәтижелері графиктер мен кестелер түрінде ұсынылады.

Ғылыми жаңалығы

Цилиндрлік координаталардағы Навье-Стокс-Бринкман теңдеулеріне қойылған бастапқы және шекаралық шартты есептің әлсіз шешімін априорлық бағалау әдісімен орнықтылыққа және жинақтылыққа зерттеу.

Тұтқыр сығылмайтын сұйықтық Навье-Стокс-Бринкман теңдеулеріне қойылған бастапқы және шекаралық шартты есепті цилиндрлік координаталардан еркін қисық сызықты координаталарға метрикалық тензорлар аппаратын пайдаланып түрлендіру.

Еркін қисық сызықты координаталардағы Навье-Стокс-Бринкман теңдеулеріне қойылған бастапқы және шекаралық шартты есепті сандық шешу үшін құрылымдалған және құрылымдалмаған бейімделгіш торлар құру.

Осы қойылған есепті ақырлы элементтер әдісімен (FEM) әлсіз шешімін сандық табу үшін интегралдық тепе-теңдіктерді құрастыру, айнымалылар кеңістіктерін анықтау. Сандық шешімді есептеуге Python бағдарламалау тілінде Jupyter және Visual Studio ортасында FEniCS заманауи есептеу платформасында бағдарлама жазып, сандық нәтижелер алу.

Қисық сызықты координаталардағы ток функциясы, жылдамдық иірімі, айнымалылардағы Навье-Стокс теңдеулеріне қойылған Пуазейль есебін сандық шешуге арналған ақырлы айырымдар әдісін (FDM) тұрғызып, бағдарлама жазып, сандық шешім алу. Сандық нәтижелерді Пуазейль тестік есебінің белгілі шешімдерімен верификациялау.

FEM әдісімен табылған әлсіз шешімі мен FDM арқылы алынған жуық шешім өзара салыстырылып, олардың жоғары дәлдікпен сәйкес келетіні көрсетілген. Навье-Стокс-Бринкман теңдеулеріне қойылған бастапқы және шекаралық шартты есепті радиусы айнымалы облыста сандық шешу. Радиусы айнымалы канал үшін осьтік жылдамдықтың бастапқы аналитикалық мәні беріліп, радиалды жылдамдық анықталды. Осьтік симметрия ағын үшін жылдамдық иірімі арнайы түрде өрнектелді.

Зерттеудің теориялық және практикалық маңыздылығы

Зерттеудің теориялық маңыздылығы Навье–Стокс теңдеулерін жуықтап шешудің сандық әдістерін жетілдірумен, олардың орнықтылығы мен жинақтылық жылдамдығын арттырумен, сондай-ақ күрделі геометриялы аймақтарда есептеу дәлдігін жоғарылатумен сипатталады. Сонымен қатар, ұсынылған әдістер тиімді есептеу торларын қолдануға және сандық алгоритмдердің сенімділігін арттыруға мүмкіндік береді.

Зерттеудің практикалық маңыздылығы әзірленген әдісті автомобильдің каталитикалық нейтрализаторларындағы және күрделі геометриясы бар өзге де инженерлік жүйелердегі сұйықтық ағындарын модельдеуде қолдану мүмкіндігімен айқындалады.

Қорғауға ұсынылатын негізгі қағидалар.

1. Цилиндрлік координаталардағы сығылмайтын тұтқыр сұйық үшін Навье–Стокс–Бринкман теңдеулерімен сипатталатын осесимметриялық есептің әлсіз шешіміне математикалық негіздеме жасалды және сандық шешілді.

2. Ток функциясы ψ және жылдамдық иірімі ω айнымалыларында еркін ортогоналды қисық сызықты координаттарда Навье–Стокс теңдеулеріне қойылған есепті шешудің сандық әдісі әзірленді.

3. Рейнольдс саны жоғары болғанның өзінде шешімнің жоғары дәлдігі мен орнықтылығын қамтамасыз ететін бейімделгіш қозғалмалы ортогоналды тор қолданылды, жоғары деңгейлі бағдарламалармен код жазылып сандық шешім алынды.

4. Нәтижелер Роуч тестік есебі арқылы верификацияланды, бұл ұсынылған сандық әдістің дәлдігі мен орнықтылығын айқындап берді.

5. Автомобильдің каталитикалық нейтрализаторларындағы ағынды сандық модельдеу жүзеге асырылып, ұсынылған әдістің дұрыстығы мен тиімділігі көрсетілді.

Диссертациялық жұмыстың ғылыми қағидалары, тұжырымдары мен ғылыми нәтижелердің сенімділігі мен негізділігі қолданылған математикалық модельдер мен сандық әдістердің дұрыстығымен, сондай-ақ оларды ғылыми әдебиеттерде келтірілген белгілі теориялық және эксперименттік нәтижелермен салыстыру арқылы дәлелденеді.

Жұмысты сынақтан өткізу.

1. Nurlan Temirbekov., Kerimakyn Ainur. Mathematical and Computational Modeling of Catalytic Converter Using Navier–Stokes Equations in Curvilinear Coordinates,Mathematics 2025, 13(8),1355; https://doi.org/10.3390/math13081355, Scopus quartile – Q1, Процентиль: ≈ 96%.

2. Temirbekov N., Khakimzyanov G., Kerimakyn A. Application of the Curvilinear Coordinate Method for the Numerical Solution of the Navier–Stokes Equations in Domains with Complex Boundaries // Computation. – 2026. – Vol. 14. – No. 3. – Article 58. – DOI: 10.3390/computation14030058, Scopus quartile – Q2, Процентиль: ≈ 75%.

3. Temirbekov Nurlan M., Kerimakyn Ainur. Methods for Creating Orthogonal Curvilinear Grids in Media with Complex Geometry. Bulletin of the National Engineering Academy of the Republic of Kazakhstan, 2025, 3(97), 242–250. https://doi.org/10.3390/math13081355

4. Kerimakyn A., Shekerbeva Sh., Kerimakyn C., Talpakova B. Construction of an Adaptive Grid in a Domain with Complex Geometry Based on the Equivalent

Distribution Method. Bulletin of Abai Kazakh National Pedagogical University. Series of Physical and Mathematical Sciences, 2025, 2(90), 72–80. https://doi.org/10.51889/2959-5894.2025.90.2.006

Ізденушінің жарияланымдары мен жеке үлесі.

1. Nurlan Temirbekov., Kerimakyn Ainur. Solving differential equations in two-dimensional space using the method of creating an adaptive grid. // Proceedings of the VII World Congress of Turkic World Mathematicians (TWMS-2023). – Turkestan, Kazakhstan, 20–23 September 2023. – Turkic World Mathematical Society, 2023.

2.Nurlan Temirbekov., Kerimakyn Ainur. Studies of the dynamics of catalytic converters of automobiles using the Navier–Stokes equations in arbitrary curved coordinates, "Computational and Information Technologies in Science, Engineering and Education" (CITech-2024) and made a presentation entitled,Almaty, October 23-24, 2024

3.Темірбеков Н.М., Керімақын А. Қисық сызықты координаталардағы Навье–Стокс теңдеулері негізінде каталитикалық нейтрализаторды математикалық және компьютерлік модельдеу // Математическое моделирование, уравнения математической физики и геометрия: материалы Международной научной конференции, посвященной 60-летию Института математики и математического моделирования. –. Алматы, 2025.

4.Nurlan Temirbekov., Kerimakyn Ainur. Mathematical and Computational Modeling of Catalytic Converter Using Navier–Stokes Equations in Curvilinear Coordinates, Mathematical and Computational Modeling of Catalytic Converter Using Navier–Stokes Equations in Curvilinear Coordinates,ISAAC CONGRESS ASTANA 2025,in the 15nISAAC congress ,held at Nazarbayev University,Kazakhstan, from July 21 to July 25,2025.

5. Nurlan Temirbekov., Kerimakyn Ainur. Mathematical and Computational Modeling of Catalytic Converter Using Navier–Stokes Equations in Curvilinear Coordinates, ABSTRACT BOOK of the X International Scientific Conference on "Mathematics, Mechanics and information technologies", al-Farabi Kazakh National University, Republic of Kazakhstan, Almaty, September 24–26, 2025.

6. Nurlan Temirbekov., Kerimakyn Ainur. Application of curvilinear coordinate methods for flow modeling in complex geometries, in recognition of their active participation in the International Scientific and Practical Conference titled **"**Future Engineering: Science, Technologies, Artificial Intelligence**,"** which was hosted by the International Engineering Technological University from April 16 to 17, 2026.

Диссертацияның құрылымы мен көлемі: Диссертация кіріспеден, үш бөлімнен, қорытындыдан, әдебиеттер тізімінен және қосымшалардан тұрады. Диссертация жүйелі және логикалық тұрғыдан ұйымдастырылған құрылымға ие. Диссертацияның қосымшасыз көлемі 142 бетті құрайды.

1.Цилиндрлік координаттардағы Навье–Стокс–Бринкман теңдеулері үшін бастапқы және шекаралық шартты есептің әлсіз шешімін зерттеу

1.1 Есептің қойылымы

Келесі цилиндрлік облыста

$$\Omega = \{(x, \theta, r):\ 0 < x < L\,, 0 < \theta < 2\pi, 0 < r < f(x)\}$$

Кеуекті орта арқылы сығылмайтын сұйықтықтың қозғалысы Навье-Стокс-Бринкман теңдеулерімен сипатталады

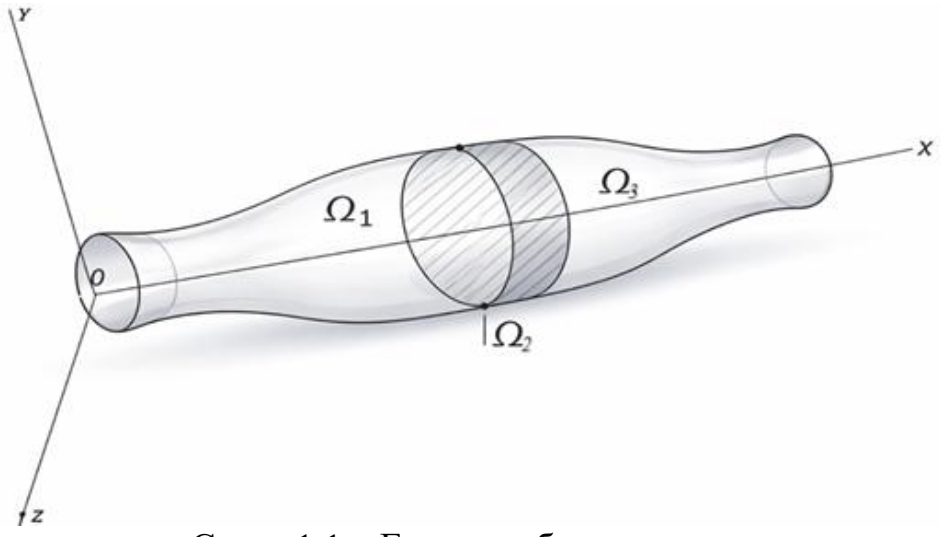
$$\begin{cases} \dfrac{\partial \vec{\boldsymbol{u}}}{\partial t} + (\vec{\boldsymbol{u}} \cdot \nabla)\vec{\boldsymbol{u}} = -\nabla p + \mu \Delta \vec{\boldsymbol{u}} - k(x,r)\vec{\boldsymbol{u}} + \vec{\boldsymbol{f}}, & (1.1) \\ \nabla \cdot \vec{\boldsymbol{u}} = 0, & (1.2) \end{cases}$$

мұндағы $\vec{\boldsymbol{u}} = (u_x, u_\theta, u_r)$- жылдамдық өрісі , p — қысым, $\mu > 0$ - тұтқырлық коэффициенті, $k(x,r)\vec{\boldsymbol{u}}$ —кеуекті ортаның кедергі күші, $\vec{\boldsymbol{f}} = (f_x, f_\theta, f_r)$ - сыртқы күш.

Кеуекті ортаның өткізгіштік коэффициенті [6]:

$$k(x,r) = \begin{cases} \dfrac{C(1-m)}{m^3}\left(\dfrac{D_{an}}{d_{\text{ш}}}\right)^2, & (x,r) \in \Omega_2 \\ 0, & (x,r) \in \Omega_1 \cup \Omega_3 \end{cases}$$

мұндағы C- эмпирикалық тұрақты, m - кеуектілік коэффициенті, D_{an} - аппарат диаметрі, $d_{\text{ш}}$ - кеуекті ортадағы шарлардың диаметрі, Ω_2 - кеуекті орта орналасқан аймақ, Ω_1, Ω_3 - еркін сұйық аймақтары.



Сурет 1.1 – Есептеу облысы геометриясы

Жоғарыдағы (1.1)–(1.2) теңдеулер жүйесі үшін келесі бастапқы және шекаралық шарттарды қоямыз.

$$\vec{\boldsymbol{u}}\Big|_{t=0} = \overrightarrow{u^0}\,(x,\theta,r),$$

$$x = 0,\ 0 < r \le r_0\ ,\ 0 < \theta < 2\pi, u_x = g(r),\ u_r = 0,\ u_\theta = 0,$$

$$0 \le x \le L,\ \ |r| = f(x),\ 0 < \theta < 2\pi,\ u_x = 0,\ u_r = 0,\ u_\theta = 0, \qquad (1.3)$$

$$x = L,\ r = 0,\ \ \frac{\partial u_x}{\partial x} = 0,\ \ u_r = 0,\ u_\theta = 0.$$

Есептің вариациялық қойылымын тұжырымдау үшін функционалдық кеңістіктерді енгіземіз.

Жалпы жағдайда Ω облысының Г шекарасы локальды Липшиц шартын қанағаттандырады. бұл Г шекарасы кез-келген (x,θ,r) нүктесінде $x = \varphi(r,\theta)$ функциясымен бейнеленеді, ал φ Липшиц шартын қанағаттандырады.

$V = \{\vec{\boldsymbol{u}} = (u_x, u_r, u_\theta) \in (H^1(\Omega))^3\colon\ u_x = g(r)\ ,\ u_\theta = 0,\ u_r\ = 0,\ x = 0,$ $\vec{\boldsymbol{u}} = 0,\ r = f(x)\ \}.$

Функциялардың ішкі кеңістігі:

$$V_{div} = \{\vec{\boldsymbol{u}} \in V\colon\ div\,\vec{\boldsymbol{u}} = 0\}$$

Қысым айнымалысының кеңістігі

$$Q = \left\{p \in L^2(\Omega)\colon\ \int_\Omega p\ d\Omega = 0\ \right\},$$

Есептің шешімі стационар емес болғандықтан:

$$\vec{\boldsymbol{u}} \in L^2(0,T;V), \qquad \frac{\partial \vec{\boldsymbol{u}}}{\partial t} \in L^{\frac{4}{3}}(0,T;V^*), \qquad p \in (0,T;Q).$$

мұнда V^* − қосалқы кеңістік.

Уақыт бойынша туынды үшін функционалдық кеңістікті таңдау

Қарастырылып отырған есепте жылдамдық өрісі үшін келесі априорлық шарт қабылданады:

$$\vec{\boldsymbol{u}} \in L^2(0,T;V), V \subset (H^1(\Omega))^2$$

одан шығатыны:

$$\vec{\boldsymbol{u}} \in (0,T;\ H^1(\Omega))$$

Екі өлшемді жағдайда Соболевтің теоремасы бойынша:

$$\vec{\boldsymbol{u}} \in L^2\big(0,T;L^4(\Omega)\big), \qquad \nabla\vec{\boldsymbol{u}} \in L^2\big(0,T;L^2(\Omega)\big),$$

Навье–Стокса–Бринкман теңдеулеріндегі негізгі қиындық сызықтық емес конвективті мүшеге байланысты:

$$(\vec{\boldsymbol{u}}\cdot\nabla)\vec{\boldsymbol{u}} = u_r\frac{\partial\vec{\boldsymbol{u}}}{\partial r} + u_x\frac{\partial\vec{\boldsymbol{u}}}{\partial x}$$

Осы мүшені бағалау үшін $\vec{\boldsymbol{\varphi}} \in V$ тест функциясы бар интегралды қарастырамыз

$$\left|\int_\Omega (\vec{\boldsymbol{u}}\cdot\nabla)\vec{\boldsymbol{u}}\,\vec{\boldsymbol{\varphi}}\,d\Omega\right| \le \int_\Omega |\vec{\boldsymbol{u}}|\,|\nabla\vec{\boldsymbol{u}}|\,|\,\vec{\boldsymbol{\varphi}}|\,d\Omega$$

Гёльдер теңсіздігін қолдана отырып, келесі теңсіздікті аламыз:

$$\int_\Omega |\vec{\boldsymbol{u}}|\,|\nabla\vec{\boldsymbol{u}}|\,|\vec{\boldsymbol{\varphi}}|\,d\Omega \le \|\vec{\boldsymbol{u}}\|_{L^4(\Omega)}\|\nabla\vec{\boldsymbol{u}}\|_{L^2(\Omega)}\|\vec{\boldsymbol{\varphi}}\|_{L^4(\Omega)}$$

Лебег кеңістіктерінің қасиеттерінен мынадай тұжырым шығады [4]:

$$L^4(\Omega)\cdot L^2(\Omega) \subset L^p(\Omega)$$

мұнда

$$\frac{1}{p} = \frac{1}{4} + \frac{1}{2} \Rightarrow p = \frac{4}{3}$$

Сондықтан

$$(\vec{\boldsymbol{u}}\cdot\nabla)\vec{\boldsymbol{u}} \in L^{\frac{4}{3}}(\Omega)$$

Уақытқа тәуелділікті ескере отырып, конвекті мүшенің келесі кеңісте жататынын аламыз

$$(\vec{\boldsymbol{u}}\cdot\nabla)\vec{\boldsymbol{u}} \in L^{\frac{4}{3}}\left(0,T;L^{\frac{4}{3}}(\Omega)\right)$$

Сонымен уақыт бойынша туынды келесі кеңістікте жатады

$$\frac{\partial\vec{\boldsymbol{u}}}{\partial t} \in L^{\frac{4}{3}}(0,T;V^*)$$

Цилиндрлік координаталар жүйесінде скаляр көбейтінді мен норма келесідей анықталады:

$$(\vec{\boldsymbol{u}}, \vec{\boldsymbol{v}}) = \int_{\Omega} \vec{\boldsymbol{u}}\, \vec{\boldsymbol{v}}\, r\, dr\, dx,$$

$$\|\vec{\boldsymbol{u}}\|_{L^2(\Omega)} = (\int_{\Omega} |\vec{\boldsymbol{u}}|^2\, r\, dr\, dx)^{1/2}.$$

1.2. Цилиндрлік координаттардағы Лаплас операторы және сызықтық емес (конвективтік) мүше

Цилиндрлік координаттар жүйесінде (u_x, u_θ, u_r) жылдамдық векторы үшін $\vec{\boldsymbol{u}} = (u_x, u_\theta, u_r)$ Лаплас операторы келесі түрде өрнектеледі:

$$\Delta u_r = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u_r}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u_r}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 u_r}{\partial x^2} - \frac{u_r}{r^2} - \frac{2}{r^2}\frac{\partial u_\theta}{\partial \theta}. \tag{1.4}$$

Навье–Стокс теңдеулерінің цилиндрлік координаттар жүйесіндегі сызықтық емес (конвективті) мүшесі компоненттер бойынша келесі түрде жазылады:

Радиалды компоненті:

$$[(\vec{\boldsymbol{u}} \cdot \nabla)\vec{\boldsymbol{u}}]_r = u_r \frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{u_\theta}{r}\frac{\partial u_r}{\partial \theta} + u_x \frac{\partial u_r}{\partial x} - \frac{u^2{}_\theta}{r} \tag{1.5}$$

Соңғы мүшесі $\frac{u^2{}_\theta}{r}$ геометриялық (центрден тепкіш) болып табылады, азимуталдық компонент:

$$[(\vec{\boldsymbol{u}} \cdot \nabla)\vec{\boldsymbol{u}}]_\theta = u_r \frac{\partial u_\theta}{\partial r} + \frac{u_\theta}{r}\frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + u_x \frac{\partial u_\theta}{\partial x} + \frac{u_r u_\theta}{r} \tag{1.6}$$

$\frac{u_r u_\theta}{r}$ мүшесі айналмалы қозғалыстың (құйынның) тасымалын сипаттайды.

Бойлық (остік) компонент

$$[(\vec{\boldsymbol{u}} \cdot \nabla)\vec{\boldsymbol{u}}]_x = u_r \frac{\partial u_x}{\partial r} + \frac{u_\theta}{r}\frac{\partial u_x}{\partial \theta} + u_x \frac{\partial u_x}{\partial x} \tag{1.7}$$

Толық векторлық формасы

$$(\vec{\boldsymbol{u}} \cdot \nabla)\vec{\boldsymbol{u}} = \begin{pmatrix} u_r \frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{u_\theta}{r}\frac{\partial u_r}{\partial \theta} + u_x \frac{\partial u_r}{\partial x} - \frac{u^2{}_\theta}{r} \\ u_r \frac{\partial u_\theta}{\partial r} + \frac{u_\theta}{r}\frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + u_x \frac{\partial u_\theta}{\partial x} + \frac{u_r u_\theta}{r} \\ u_r \frac{\partial u_x}{\partial r} + \frac{u_\theta}{r}\frac{\partial u_x}{\partial \theta} + u_x \frac{\partial u_x}{\partial x} \end{pmatrix} \tag{1.8}$$

Егер $\frac{\partial(.)}{\partial\theta} = 0$, онда осьтік симметриялы жағдай

$$[(\vec{\boldsymbol{u}}\cdot\nabla)\vec{\boldsymbol{u}}]_r = u_r\frac{\partial u_r}{\partial r} + u_x\frac{\partial u_r}{\partial x} - \frac{u^2{}_\theta}{r}$$
$$[(\vec{\boldsymbol{u}}\cdot\nabla)\vec{\boldsymbol{u}}]_\theta = u_r\frac{\partial u_\theta}{\partial r} + u_x\frac{\partial u_\theta}{\partial x} + \frac{u_r u_\theta}{r} \qquad (1.9)$$
$$[(\vec{\boldsymbol{u}}\cdot\nabla)\vec{\boldsymbol{u}}]_x = u_r\frac{\partial u_x}{\partial r} + u_x\frac{\partial u_x}{\partial x}$$

Айналмалы қозғалысы жоқ $u_\theta = 0$, болғандағы жеке жағдайын қарастырайық. Бұл жағдайда сызықтық емес мүше екі өлшемді болады:

$$(\vec{\boldsymbol{u}}\cdot\nabla)\vec{\boldsymbol{u}} = \begin{pmatrix} u_r\frac{\partial u_r}{\partial r} + u_x\frac{\partial u_r}{\partial x} \\ 0 \\ u_r\frac{\partial u_x}{\partial r} + u_x\frac{\partial u_x}{\partial x} \end{pmatrix} \qquad (1.10)$$

1.3 Айналмалы қозғалысы жоқ осьтік симметриялы ағыс

Енді $\Omega = \{0 \le x \le L,\ 0 < r \le f(x)\},\ \Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2 \cup \Omega_3$ облысындағы кеуекті бөлік арқылы үзіліссіз ортаның осьтік симметриялы ағынын сипаттайтын келесі сызықтық емес теңдеулер жүйесін қарастырайық [53].

Қозғалыс теңдеулері

$$\frac{\partial u_r}{\partial t} + u_r\frac{\partial u_r}{\partial r} + u_x\frac{\partial u_r}{\partial x} + \frac{\partial p}{\partial r} = \mu\left(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u_r}{\partial r}\right) + \frac{\partial^2 u_r}{\partial x^2}\right) - k(x,r)u_r + f_r, \qquad (1.11)$$
$$\frac{\partial u_x}{\partial t} + u_r\frac{\partial u_x}{\partial r} + u_x\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial p}{\partial x} = \mu\left(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u_x}{\partial r}\right) + \frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2}\right) - k(x,r)u_x + f_x, \qquad (1.12)$$

Үзіліссіздік теңдеуі

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(ru_r) + \frac{\partial u_x}{\partial x} = 0 \qquad (1.13)$$

Жоғарыдағы (1.11)–(1.13) теңдеулер жүйелері үшін келесі бастапқы және шекаралық шарттарды қоямыз.

$$u_x(x,r,0) = u_x^0(x,r),\ u_r(x,r,0) = u_r^0(x,r)$$

кіріс шекарасы Γ_1: $x = 0,\ 0 < r \le f(0);$ (1.14)
$$u_x(0,r,t) = g(r),\ u_r(0,r,t) = 0,$$

қатты қабырғада Γ_2: $0 \le x \le L,\ r = f(x);$

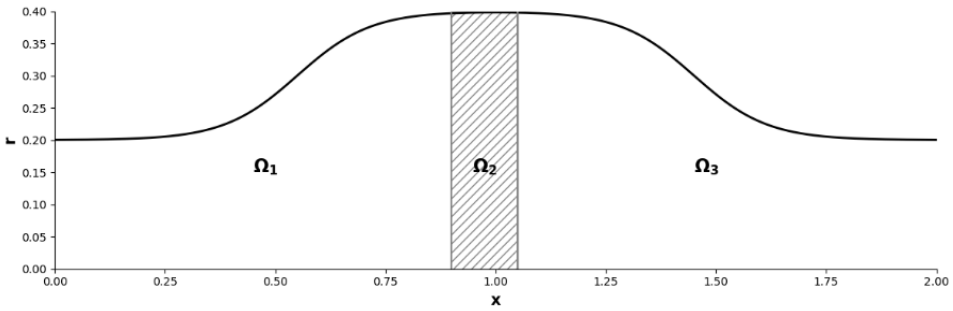
$$u_x(x, f(x), t) = 0,\ u_r(x, f(x), t) = 0,$$

симметрия осінде Γ_3: $0 \le x \le L,\ r = 0;$

$$\frac{\partial u_x(x,0,t)}{\partial r} = 0,\ u_r(x, 0, t) = 0,$$

шығыс шекарасында Γ_4: $x = L,\ 0 < r \le f(L);$ (1.15)

$$\frac{\partial u_x(L, r, t)}{\partial x} = 0,\quad u_r(L, r, t) = 0,$$



Сурет 1.2 – Есептеу облысы

Ω облысында анықталған $u_r^0(x, r)$, $u_x^0(x, r)$ функциялары үзіліссіздік теңдеуі орындалатындай етіп алынады

$$\frac{\partial}{\partial r}(ru_r^0) + r\frac{\partial u_x^0}{\partial x} = 0, \tag{1.16}$$

$k(x, r)$ функциясы белгілі және келесі шартты қанағаттандырады:

$$0 \le k(x, r) \le k_0. \tag{1.17}$$

орталар шекарасында, яғни $\Omega_2 = \{x \in [\xi_1, \xi_2], r = f(x)\}$ болғандағы $R = \xi_1, \xi_2$ тұтас сызықтарында келесі шарттар орындалады:

$$\left[p - \mu\frac{\partial u_r}{\partial x}\right] = 0,\quad [u_x] = [u_r] = 0 \tag{1.18}$$

$$\left[p - \frac{\mu}{r}\frac{\partial(ru_r)}{\partial r}\right] = 0.$$

мұнда $[\Phi] = \Phi(\xi + 0, r, t) - \Phi(\xi - 0, r, t)$ сызық бойындағы функцияның үзілісі $x = \xi$.

Функциялардың анықталу облысы мен кеңістіктері

Есеп екі өлшемді облыста қарастырылады

$$\Omega = \{(x,r):\ 0 < x < L, 0 < r < f(x)\}.$$

(1.11)-(1.15) есебінің әлсіз шешімін келесі кеңістікте анықтаймыз

$$V = \left\{\vec{\boldsymbol{u}} = (u_x, u_r) \in (H^1(\Omega))^2 : div\vec{\boldsymbol{u}} = 0,\ \ u|_{\Gamma_1} = (g(r), 0),\ \ u|_{\Gamma_2} = (0,0)\right\}.$$

Тестілік функцияны келесі кеңістікте анықтаймыз

$$V_0 = \left\{\vec{\boldsymbol{\varphi}} = (\varphi_x, \varphi_r) \in (H^1(\Omega))^2 :\ div\vec{\boldsymbol{\varphi}} = 0\ ,\ \ \varphi|_{\Gamma_1} = (0,0),\ \ \varphi|_{\Gamma_2} = (0,0)\ \right\}.$$

Қысымға арналған тесттік функцияны төмендегі кеңістікте анықтаймыз

$$Q = \left\{p \in L^2(\Omega) : \int_\Omega p\, d\Omega = 0\right\},$$

Есептің стационарлық еместігін ескере отырып, ізделіп отырған функциялар уақытқа тәуелді және келесі шарттарды қанағаттандырады:

$$\vec{\boldsymbol{u}} \in L^2(0,T;V), \qquad \frac{\partial \vec{\boldsymbol{u}}}{\partial t} \in L^2(0,T;V^*), \qquad p \in (0,T;Q).$$

1.4 Әлсіз тұжырымын қарастыру

Тестілік функция әрқашан біртекті Дирихле шарттарын қанағаттандыратындай етіп таңдалады. Себебі тестілік функция шешімнің вариацияларын сипаттайды. Шешімнің мәні бекітілген нүктелерде вариациялар нөлге тең болуы тиіс.

(1.11) теңдеуін φ_x –ке, ал (1.12) теңдеуін φ_r -ке көбейтеміз, цилиндрлік координаттардағы әлсіз қойылымды уақыт бойынша интегралдап, келесі теңдіктерді аламыз.

$$\int_0^T \int_\Omega \left(\frac{\partial u_r}{\partial t}\varphi_r + u_r\frac{\partial u_r}{\partial r}\varphi_r + u_x\frac{\partial u_r}{\partial x}\varphi_r + \frac{\partial p}{\partial r}\varphi_r\right) r dr dx dt\ = \\ \mu\int_0^T \int_\Omega \left(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u_r}{\partial r}\right) + \frac{\partial^2 u_r}{\partial x^2} - k(x,r)u_r + f_r\right)\varphi_r r dr dx dt \qquad (1.19)$$

$$\int_0^T \int_\Omega \left(\frac{\partial u_x}{\partial t}\varphi_x\ + u_r\frac{\partial u_x}{\partial r}\varphi_x\ + u_x\frac{\partial u_x}{\partial x}\varphi_x\ + \frac{\partial p}{\partial x}\varphi_x\right) r dr dx dt\ = \\ \mu\int_0^T \int_\Omega \left(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u_x}{\partial r}\right) + \frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2}\ - k(x,r)u_x\ + f_x\right)\varphi_x r dr dx dt \qquad (1.20)$$

$$\int_0^T \int_\Omega \left(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\frac{\partial(ru_r)}{\partial r} + \frac{\partial u_x}{\partial x}\right) q\ r\ dr\ dx\ dt\ = 0 \qquad (1.21)$$

Енді (1.19)–(1.21) теңдеулерін қосып, төмендегідей нәтиже аламыз:

$$\int_0^T \int_\Omega \left(\frac{\partial u_r}{\partial t}\varphi_r + \frac{\partial u_x}{\partial t}\varphi_x\right) r dr dx dt + \int_0^T \int_\Omega \left[\left(u_r \frac{\partial u_r}{\partial r} + u_x \frac{\partial u_r}{\partial x}\right)\varphi_r + \right.$$
$$\left. + \left(u_r \frac{\partial u_x}{\partial r} + u_x \frac{\partial u_x}{\partial x}\right)\varphi_x\right] r dr dx\, dt + \int_0^T \int_\Omega \left(\frac{\partial p}{\partial r}\varphi_r + \frac{\partial p}{\partial x}\varphi_x\right) r\, dr dx dt =$$
$$= \int_0^T \int_\Omega \left[\left(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u_r}{\partial r}\right) + \frac{\partial^2 u_r}{\partial x^2}\right)\varphi_r + \left(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u_x}{\partial r}\right) + \frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2}\right)\varphi_x\right] r dr dx dt \qquad (1.22)$$
$$- \int_0^T \int_\Omega [k(x,r)u_r\varphi_r + k(x,r)u_x\varphi_x] r dr dx dt + \int_0^T \int_\Omega \left(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\frac{\partial (ru_r)}{\partial r} + \right.$$
$$\left. + \frac{\partial u_x}{\partial x}\right) q r dr dx dt = \int_0^T \int_\Omega (f_r\varphi_r + f_x\varphi_x) r dr dx dt$$

Қысым мүшелерін қарастырайық. Шекаралық шарттар мен үзіліссіздік теңдеуін ескере отырып бөліктеп интегралдаймыз.

$$\int_\Omega \left(\frac{\partial p}{\partial r}\varphi_r + \frac{\partial p}{\partial x}\varphi_x\right) r dr dx = \begin{vmatrix} U = r\varphi_r,\ dU = \frac{\partial (r\varphi_r)}{\partial r} dr \\ dV = \frac{\partial p}{\partial r} dr\ , V = p \\ U = r\varphi_x,\ dU = r\frac{\partial \varphi_x}{\partial x} dx \\ dV = \frac{\partial p}{\partial x} dx\ , V = p \end{vmatrix} = \qquad (1.23)$$
$$\int_0^L \left([r\ p\ \varphi_r]_0^{f(x)} - \int_0^{f(x)} p\ \frac{\partial (r\varphi_r)}{\partial r}\ dr\right) dx + \int_0^{f(x)} \left([p\ r\ \varphi_x]_0^L - \right.$$
$$\left. \int_0^L r\ p\ \frac{\partial \varphi_x}{\partial x}\ dx\right) dr = \int_0^L [p\ r\ \varphi_r]_0^{f(x)} dx + \int_0^{f(x)} [r\ p\ \varphi_x]_0^L\ dr -$$
$$\int_0^L \int_0^{f(x)} p\left(\frac{1}{r}\frac{\partial r\varphi_r}{\partial r} + \frac{\partial \varphi_x}{\partial x}\right) r dr dx = -\int_0^L \int_0^{f(x)} p\left(\frac{1}{r}\frac{\partial r\varphi_r}{\partial r} + \frac{\partial \varphi_x}{\partial x}\right) r dr dx$$

Сызықтық емес мүшелерді түрлендіру кезінде келесі теңдікті құрамыз:

$$\int_{\Omega}\left[\left(u_r\frac{\partial u_r}{\partial r}+u_x\frac{\partial u_r}{\partial x}\right)\varphi_r+\left(u_r\frac{\partial u_x}{\partial r}+u_x\frac{\partial u_x}{\partial x}\right)\varphi_x\right]rdrdx$$

$$=\int_{\Omega}\left[\left(\frac{\partial ru_r^2}{\partial r}+\frac{\partial ru_xu_r}{\partial x}-u_r\frac{\partial ru_r}{\partial r}-u_r\frac{\partial ru_x}{\partial x}\right)\varphi_r\right.$$

$$\left.+\left(\frac{\partial ru_ru_x}{\partial r}+\frac{\partial ru_x^2}{\partial x}-u_x\frac{\partial ru_r}{\partial r}-u_x\frac{\partial ru_x}{\partial x}\right)\varphi_x\right]drdx$$

$$=\left|\begin{array}{l} U=\varphi_r,\qquad dU=\dfrac{\partial\varphi_r}{\partial r}dr \\ dV=\dfrac{\partial ru_r^2}{\partial r}dr\,,V=u_r^2r \\ U=\varphi_r,\qquad dU=\dfrac{\partial\varphi_r}{\partial x}dx \\ dV=\dfrac{\partial(ru_ru_x)}{\partial x}dx\,,V=r.u_ru_x \end{array}\right| \tag{1.24}$$

$$=\int_0^L\left([u_r^2\,\varphi_r\,r]_0^{f(x)}-\int_0^{f(x)}r\,u_r^2\frac{\partial\varphi_r}{\partial r}dr\right)dx$$

$$+\int_0^{f(x)}\left([r\,u_r\,u_x\,\varphi_r]_0^L-\int_0^L r\,u_r\,u_x\frac{\partial\varphi_r}{\partial x}dx\right)dr$$

$$+\int_0^L\left([r\,u_r\,u_x\,\varphi_x]_0^{f(x)}-\int_0^{f(x)}r\,u_r\,u_x\frac{\partial\varphi_x}{\partial r}dr\right)dx$$

$$+\int_0^{f(x)}\left([r\,u_x^2\,\varphi_x]_0^L-\int_0^L r\,u_x^2\frac{\partial\varphi_x}{\partial x}dx\right)dr$$

Интеграл сыртында тұрған мүшелерді қарастырайық

$$[u_r^2\,\varphi_r\,r]_0^{f(x)}=ru_r^2(x,f(x))\varphi_r((x,f(x))-ru_r^2(x,0)\varphi_r(x,0)=0$$

$$[r\,u_r\,u_x\,\varphi_r]_0^L=r\,u_r(L,r)u_x(L,r)\,\varphi_r(L,r)-$$
$$r\,u_r(0,r)u_x(0,r)\,\varphi_r(0,r)=0 \tag{1.25}$$

$$[r\,u_r\,u_x\,\varphi_x]_0^{f(x)}=r\,u_r(x,f(x))u_x(x,f(x))\,\varphi_x((x,f(x))-$$
$$r\,u_r(x,0)u_x(x,0)\,\varphi_x(x,0)=0$$

$$[r\,u_r^2\,\varphi_x]_0^L=r\,u_x^2(L,r)\varphi_x(L,r)-ru_x^2(0,r)\varphi_x(0,r)=0$$

Сонымен, мынадай нәтижені аламыз

$$\int_\Omega \left[\left(u_r\frac{\partial u_r}{\partial r}+u_x\frac{\partial u_r}{\partial x}\right)\varphi_r+\left(u_r\frac{\partial u_x}{\partial r}+u_x\frac{\partial u_x}{\partial x}\right)\varphi_x\right]rdrdx-$$
$$=-\int_\Omega ru_r^2\frac{\partial\varphi_r}{\partial r}drdx-\int_\Omega u_ru_x\frac{\partial\varphi_r}{\partial x}rdrdx-\int_\Omega u_ru_x\frac{\partial\varphi_x}{\partial r}rdrdx$$
$$-\int_\Omega u_x^2\frac{\partial\varphi_x}{\partial x}rdrdx$$

Скалярлы түрде тесттік функцияға көбейтілген диффузиялық мүшелерді қарастырайық

$$\int_\Omega \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u_r}{\partial r}\right)\varphi_r rdrdx=\left|\begin{matrix} U=\varphi_r, & dU=\frac{\partial\varphi_r}{\partial r}dr \\ dV=\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u_r}{\partial r}\right)dr, & V=r\frac{\partial u_r}{\partial r}\end{matrix}\right|$$
$$=\int_0^L\left(\left[r\ \varphi_r\ \frac{\partial u_r}{\partial r}\right]_0^{f(x)}-\int_\Omega r\frac{\partial u_r}{\partial r}\ \frac{\partial\varphi_r}{\partial r}\ dr\right)dx \quad (1.26)$$
$$=\int_0^L\left[r\ \varphi_r\ \frac{\partial u_r}{\partial r}\right]_0^{f(x)}dx-\int_\Omega r\frac{\partial u_r}{\partial r}\ \frac{\partial\varphi_r}{\partial r}\ dr\,dx,$$

$$\int_\Omega \frac{\partial^2 u_r}{\partial x^2}\varphi_r rdrdx=\left|\begin{matrix} U=r\ \varphi_r, & dU=\frac{\partial\varphi_r r}{\partial x}dx \\ dV=\frac{\partial^2 u_r}{\partial x^2}\ dx, & V=\frac{\partial u_r}{\partial x}\end{matrix}\right|$$
$$=\int_0^{f(x)}\left(\left[r\ \varphi_r\ \frac{\partial u_r}{\partial x}\right]_0^{L}-\int_0^L\frac{\partial u_r}{\partial x}\ \frac{\partial\varphi_r r}{\partial x}dx\right)dr \quad (1.27)$$
$$=\int_0^{f(x)}\left(\left[r\ \varphi_r\ \frac{\partial u_r}{\partial x}\right]_0^{L}-\int_\Omega\frac{\partial u_r}{\partial x}\ \frac{\partial\varphi_r}{\partial x}\ rdx\right)dr,$$

$$\int_\Omega \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u_x}{\partial r}\right)r\varphi_x drdx=\left|\begin{matrix} U=\varphi_x, & dU=\frac{\partial\varphi_x}{\partial r}dx \\ dV=\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u_x}{\partial r}\right)dr, & V=r\frac{\partial u_x}{\partial r}\end{matrix}\right|$$
$$=\int_0^L\left(\left[r\ \varphi_x\ \frac{\partial u_x}{\partial r}\right]_0^{f(x)}-\int_\Omega\frac{\partial u_x}{\partial r}\ \frac{\partial\varphi_x}{\partial r}\ rdr\right)dx, \quad (1.28)$$

$$\int_\Omega \frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2}\varphi_x r dr dx = \left| \begin{matrix} U = r\,\varphi_x, \qquad dU = \dfrac{\partial \varphi_x r}{\partial x} dx \\ dV = \dfrac{\partial^2 u_x}{\partial x^2}\, dx \;, V = \dfrac{\partial u_x}{\partial x} \end{matrix} \right| \tag{1.29}$$

$$= \int_0^{f(x)} \left(\left[r\varphi_x \frac{\partial u_x}{\partial x} \right]_0^L - \int_\Omega \frac{\partial u_x}{\partial x}\, \frac{\partial \varphi_x}{\partial x}\, r dx \right) dr,$$

Интеграл сыртында тұрған мүшелерді қарастырайық

$$\int_\Omega \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r \frac{\partial u_r}{\partial r} \right) \varphi_r r dr dx =$$

$$= \int_0^L \left(\left[r\ \varphi_r\ \frac{\partial u_r}{\partial r} \right]_0^{f(x)} - \int_\Omega r \frac{\partial u_r}{\partial r}\, \frac{\partial \varphi_r}{\partial r}\, dr \right) dx,$$

$$\int_\Omega \frac{\partial^2 u_r}{\partial x^2}\varphi_r r dr dx = \int_0^{f(x)} \left(\left[r\,\varphi_r\ \frac{\partial u_r}{\partial x} \right]_0^L - \int_0^L \frac{\partial u_r}{\partial x}\, \frac{\partial \varphi_r r}{\partial x} dx \right) dr,$$

$$\int_\Omega \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r \frac{\partial u_x}{\partial r} \right) r\varphi_x dr dx =$$

$$= \int_0^L \left(\left[r\ \varphi_x\ \frac{\partial u_x}{\partial r} \right]_0^{f(x)} - \int_\Omega \frac{\partial u_x}{\partial r}\, \frac{\partial \varphi_x}{\partial r}\, r dr \right) dx, \tag{1.30}$$

$$\int_\Omega \frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2}\varphi_x r dr dx = \int_0^{f(x)} \left(\left[r\varphi_x \frac{\partial u_x}{\partial x} \right]_0^L - \int_\Omega \frac{\partial u_x}{\partial x}\, \frac{\partial \varphi_x}{\partial x}\, r dx \right) dr.$$

Нәтижесінде келесі интегралдық тепе-теңдік шығады

$$\begin{aligned} &\int_0^T \int_\Omega \left(\frac{\partial u_r}{\partial t}\varphi_r + \frac{\partial u_x}{\partial t}\varphi_x \right) r dr dx dt \\ &- \int_0^T \int_\Omega \left(u_r^2 \frac{\partial \varphi_r}{\partial r} + u_r u_x \frac{\partial \varphi_r}{\partial x} + u_r u_x \frac{\partial \varphi_x}{\partial r} + u_x^2 \frac{\partial \varphi_x}{\partial x} \right) r dr dx dt \\ &+ \mu \int_0^T \int_\Omega \left(\frac{\partial u_r}{\partial r}\frac{\partial \varphi_r}{\partial r} + \frac{\partial u_r}{\partial x}\frac{\partial \varphi_r}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial r}\frac{\partial \varphi_x}{\partial r} + \frac{\partial u_x}{\partial x}\frac{\partial \varphi_x}{\partial x} \right) r dr dx dt \end{aligned} \tag{1.31}$$

$$+ \int_0^T \int_\Omega k(x,r)(v_r\varphi_r + v_x\varphi_x) r dr dx dt = \int_0^T \int_\Omega (f_r\varphi_r + f_x\varphi_x) r dr dx dt$$

Бөліктеп интегралдау нәтижесінде барлық интегралдан тыс мүшелер нөлге тең болады.

Нәтижесінде келесі интегралдық тепе-теңдікті аламыз.

$$\int_0^T \left(\frac{\partial \vec{u}}{\partial t}, \vec{\varphi}\right) dt - \int_0^T \left((\vec{u} \cdot \nabla)\vec{\varphi}, \vec{u}\right) dt - \int_0^T (div\vec{\varphi}, p)\, dt + \int_0^T (div\vec{u}, q\,)\, dt + \mu \int_0^T (\nabla \vec{u} : \nabla \vec{\varphi})\, dt + \int_0^T (k(x,r)\vec{u}, \vec{\varphi})\, dt = \int_0^T \left(\vec{f}, \vec{\varphi}\right) dt \quad (1.32)$$

Анықтама 1. Егер кез келген $\vec{\varphi} \in V_0$ тесттік функциясы үшін келесі интегралдық тепе-теңдік орындалса, онда $\vec{u} \in V$ функциясы, (1.11)-(1.15) есебінің әлсіз шешімі деп аталады

$$\int_0^T \left(\frac{\partial \vec{u}}{\partial t}, \vec{\varphi}\right) dt - \int_0^T \left((\vec{u} \cdot \nabla)\vec{\varphi}, \vec{u}\right) dt - \int_0^T (div\vec{\varphi}, P\,)\, dt + \int_0^T (div\vec{u}, q\,)\, dt + \mu \int_0^T (\nabla \vec{u} : \nabla \vec{\varphi})\, dt + \int_0^T (k(x,r)\vec{u}, \vec{\varphi})\, dt = \int_0^T \left(\vec{f}, \vec{\varphi}\right) dtdt \quad (1.33)$$

Енді Γ_1 шекарасындағы біртекті емес Дирихле шартын жою қажет. Ол үшін көтеру функциясын енгіземіз

$$u_x^g(x,r,t) = g(r)(1\text{-}x),\ u_x^g(0,r,t) = g(r),\ u_x^g(1,r,t) = 0, u_r^g = 0 \quad (1.34)$$

Шешімді (1.33) қосынды түрінде өрнектейміз

$$u_x(x,r,t) = \tilde{u}_x(x,r,t) + u_x^g(x,r,t)$$
$$u_r(x,r,t) = \tilde{u}_r(x,r,t) + u_r^g(x,r,t)$$

Векторлық форма

$$\vec{u}(x,r,t) = \vec{\tilde{u}}(x,r,t) + \vec{u}^g(x,r,t)$$

мұндағы $\vec{\tilde{u}} \in V_0$, онда (1.31) теңдігі мынадай түрге ие болады

$$\int_0^T \left[\left(\frac{\partial \vec{\tilde{u}}}{\partial t}, \vec{\varphi}\right) - \left((\vec{\tilde{u}}\ \cdot \nabla)\vec{\varphi}, \vec{\tilde{u}}\right) + \left((\vec{u}^g\ \cdot \nabla)\vec{\varphi}, \vec{\tilde{u}}\right) + \left((\vec{\tilde{u}}\ \cdot \nabla)\vec{\varphi}, \vec{u}^g\right)\right] dt \quad (1.35)$$
$$+\mu \int_0^T \left(\nabla \vec{\tilde{u}} : \nabla \vec{\varphi}\right) dt + \int_0^T k\left(\vec{\tilde{u}}\,, \vec{\varphi}\right) dt - \int_0^T (p\,, div\vec{\varphi})\, dt +$$

$$+\int_0^T \left(div\vec{\vec{u}}, q\right) dt = -\int_0^T \left(\frac{\partial \vec{u}^g}{\partial t}, \vec{\varphi}\right) dt + \int_0^T \left((\vec{u}^g \cdot \nabla)\vec{\varphi}, \vec{u}^g\right) dt -$$
$$-\mu \int_0^T (\nabla \vec{u}^g : \nabla \vec{\varphi})\, dt - \int_0^T k(\vec{u}^g, \vec{\varphi})\, dt + \int_0^T \left(\vec{f}, \vec{\varphi}\right) dt$$

Егер шешім әр уақыт мезетінде қарастырылса, онда (1.32) теңдігінің әлсіз формасы мынадай түрде болады:

$$\left(\frac{\partial \vec{u}}{\partial t}, \vec{\varphi}\right) - \left((\vec{u} \cdot \nabla)\vec{\varphi}, \vec{u}\right) - (p, div\vec{\varphi}) + (div\vec{u}, q) + \mu(\nabla \vec{u} : \nabla \vec{\varphi}) + (k(x,r)\vec{u}, \vec{\varphi}) = \left(\vec{f}, \vec{\varphi}\right) \quad (1.36)$$

Уақыт бойынша Галеркин дискретизациясын қолданып,

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} \approx \frac{\vec{u}^{\,n+1} - \vec{u}^{\,n}}{\triangle t}$$

Дискретті әлсіз схеманы келесі түрде ашамыз

$$\left(\frac{\vec{u}^{\,n+1} - \vec{u}^{\,n}}{\triangle t}, \vec{\varphi}\right) - \left(\left(\vec{u}^{\,n+1} \cdot \nabla\right)\vec{\varphi}, \vec{u}^{\,n+1}\right) - (p^{n+1}, div\vec{\varphi}) + \mu\left(\nabla \vec{u}^{\,n+1}, \nabla \vec{\varphi}\right) + \left(k(x,r)\vec{u}^{\,n+1}, \vec{\varphi}\right) = \left(\vec{f}^{\,n+1}, \vec{\varphi}\right) \quad (1.37)$$

Үзіліссіздік теңдеуі

$$\left(div\vec{u}^{\,n+1}, q\right) = 0$$

Ізделінді функциялар және тесттік функциялары келесі кеңістіктерге тиесілі:

$$\vec{u}^{\,n+1} \in V, \quad p^{n+1} \in Q$$
$$\vec{\varphi} \in V_0, \qquad q \in Q$$

Әр уақыт қадамындағы толығымен дискретті әлсіз схема

$$\int_\Omega \frac{\vec{u}^{\,n+1} - \vec{u}^{\,n}}{\triangle t} \cdot \vec{\varphi}\, r\, dr\, dx - \int_\Omega \left(\left(\vec{u}^{\,n+1} \cdot \nabla\right)\vec{\varphi}\right) \cdot \vec{u}^{\,n+1}\, r\, dr\, dx - \int_\Omega p^{n+1}\, div\vec{\varphi}\, r\, dr\, dx + \mu \int_\Omega \nabla \vec{u}^{\,n+1} : \nabla \vec{\varphi}\, r\, dr\, dx + \int_\Omega k(x,r)\, \vec{u}^{\,n+1} \cdot \vec{\varphi}\, r\, dr\, dx = \int_\Omega \vec{f}^{\,n+1} \cdot \vec{\varphi}\, r\, dr\, dx \quad (1.38)$$

Үзіліссіздік теңдеуі:

$$\int_{\Omega}\left(div\vec{\boldsymbol{u}}^{\,n+1}\right)q\ \ r\,dr\,dx=0 \tag{1.39}$$

Галеркин әдісінде дискретті шешім келесі түрде беріледі:

$$\vec{\boldsymbol{u}}_{h}^{\,n+1}=\sum_{i=1}^{N}u_{i}^{\,n+1}\vec{\boldsymbol{\omega}}_{i}(x)\,,\qquad p_{h}^{n+1}(x)=\sum_{m=1}^{M}p_{m}^{n+1}\eta_{m}(x)$$

Галеркин әдісінде ізделінетін функциялар ақырлы өлшемді ішкі кеңістіктерде базистік функциялардың сызықтық комбинациясы түрінде жуықталады. Базистік функциялар функциялар кеңістігінің сызықтық тәуелсіз жүйесін құрайды және осы кеңістіктегі кез келген жуық шешімді сипаттауға мүмкіндік береді. Жылдамдық пен қысым әртүрлі функционалдық кеңістіктерге тиесілі болғандықтан, олар үшін сәйкесінше векторлық және скалярлық базистік функциялар пайдаланылады. Ақырлы элементтер әдісінде базистік функциялар есептік тордың элементтерінде анықталып, локальды тасымалдағышқа ие болады және Кронекер қасиетін қанағаттандырады:

Барицентрлік координаталар арқылы үшбұрышта жатқан $x-$ нүктесі келесі формуламен анықталады

$$x=\lambda_1A_1+\lambda_2A_2+\lambda_3A_3$$

мұндағы, $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3-$ барицентрлік координаталары, A_1,A_2,A_3 $-$үшбұрыштың төбелері.

Барицентрлік координаталар келесі шарттарды қанағаттандырады

$$\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3=1$$

Барицентрлік координаталардың осы қасиеттері ақырлы элементтің базистік функцияларын құруға мүмкіндік береді.

Лагранж элементінің базистік функциялары келесі интерполяциялық шартпен Кронекер символы арқылы анықталады.

Жылдамдық үшін

$$\vec{\boldsymbol{\omega}}_i(x_j)=\delta_{ij}=\begin{cases}1, i=j,\\0, i\neq j.\end{cases}$$

Қысым үшін

$$\eta_i\,(x_j)=\delta_{ij}=\begin{cases}1, i=j,\\0, i\neq j.\end{cases}$$

$\delta_{ij}-$ Кронекер символы

Барицентрлік координаталар арқылы жылдамдықтың функциялары келесі түрде анықталады:

$$\vec{\boldsymbol{\omega}}_i=\lambda_i(2\lambda_i-1), i=1,2,3.$$

Орта нүктелерге сәйкес келетін базистік функциялар келесі түрде жазылады:

$$\vec{\boldsymbol{\omega}}_4=4\lambda_1\lambda_2,\vec{\boldsymbol{\omega}}_5=4\lambda_2\lambda_3,\ \vec{\boldsymbol{\omega}}_6=4\lambda_3\lambda_1,$$

Қысым өрісін аппроксимациялау үшін 1-ші ретті Лагранж элементі пайдаланылады. Қысымның базистік функциялары үшбұрыштың барицентрлік координаталары арқылы анықталады:

$$\eta_1 = \lambda_1,\ \eta_2 = \lambda_2, \eta_3 = \lambda_3$$

Бұл қасиет әрбір базистік функцияның тек өзіне сәйкес түйінде 1-ге, ал қалған түйіндерде нөлге тең болатынын көрсетеді. Соның нәтижесінде дискретті шешімнің белгісіз коэффициенттері есептік тордың сәйкес түйіндеріндегі функция мәндерімен тікелей сәйкестендіріледі, яғни ақырлы элементтер әдісінде белгісіздерді анықтау есебі осы коэффициенттерді есептеуге келтіріледі.

$\vec{\omega}_i(x) -$ жылдамдықтың векторлық базистік функциялары,
$\eta_m(x) -$ қысымның скалярлық базистік функциялары,
$p_m^{n+1}, u_i^{n+1} -$ белгісіз коэффициенттер.
$N, M -$ сәйкесінше жылдамдық пен қысым үшін қолданылатын базистік функциялар саны.

Тесттік функциялардың орнына базистік функцияларды қоямыз

$$\vec{\varphi} = \vec{\omega}_j, \qquad q_h = \eta_k,$$

Галеркин әдісі бойынша импульс теңдеуінің дискретті әлсіз түрі келесі түрде жазылады

$$\begin{aligned} &\frac{1}{\triangle t}\int_\Omega \left(\vec{u}_h^{\,n+1} - \vec{u}_h^{\,n}\right)\cdot\vec{\omega}_j\, r dr dx \\ &-\int_\Omega \left(\vec{u}_h^{\,n+1}\cdot\nabla\right)\vec{\omega}_j\cdot\vec{u}_h^{\,n+1} r dr dx - \int_\Omega p_h^{n+1} div\vec{\omega}_j\ r dr dx \\ &+\mu\int_\Omega \nabla\vec{u}_h^{\,n+1} : \nabla\vec{\omega}_j\, r dr dx + \int_\Omega k(x,r)\vec{u}_h^{\,n+1}\cdot\vec{\omega}_j\, r dr dx \\ &= \int_\Omega \vec{f}^{\,n+1}\cdot\vec{\omega}_j\, r dr dx, \qquad j = 1,2,..,N \end{aligned} \tag{1.40}$$

Үзіліссіздік теңдеуі

$$\int_\Omega \left(div\vec{u}_h^{\,n+1}\right)\eta_k\, r dr dx = 0, \qquad k = 1,2,..,M \tag{1.41}$$

(1.40), (1.41) дискретті теңдеулеріндегі айнымалыларды базистік функциялар арқылы өрнектегенде келесі теңдеу шығады

$$\begin{aligned} &\frac{1}{\triangle t}\int_\Omega \left(\sum_{i=1}^{N} u_i^{n+1}\vec{\omega}_i - \sum_{i=1}^{N} u_i^{n}\vec{\omega}_i\right)\cdot\vec{\omega}_j\, r dr dx \\ &-\int_\Omega \left[\left(\sum_{i=1}^{N} u_i^{n+1}\vec{\omega}_i\right)\cdot\nabla\right]\vec{\omega}_j\cdot\left(\sum_{m=1}^{N} u_m^{n+1}\vec{\omega}_m\right) r dr dx \end{aligned}$$

$$-\sum_{m=1}^{M} p_m^{n+1}\int_\Omega \eta_m div\vec{\boldsymbol{\omega}}_j\, rdrdx+\mu\sum_{i=1}^{N} u_i^{n+1}\int_\Omega \nabla\vec{\boldsymbol{\omega}}_i:\nabla\vec{\boldsymbol{\omega}}_j\, rdrdx \qquad (1.42)$$

$$+\sum_{i=1}^{N} u_i^{n+1}\int_\Omega k(x,r)\vec{\boldsymbol{\omega}}_i\cdot\vec{\boldsymbol{\omega}}_j\, rdrdx=\int_\Omega \vec{\boldsymbol{f}}^{\,n+1}\cdot\vec{\boldsymbol{\omega}}_j\, rdrdx,$$

$$j=1,2..N.$$

Базистік функциялар арқылы үзіліссіздік теңдеуі келесі түрде жазылады

$$\int_\Omega \left(div\vec{\boldsymbol{u}}_h^{\,n+1}\right)\eta_k\, rdrdx=0,\qquad k=1,2,..,M \qquad (1.43)$$

(1.42) , (1.43) теңдеулер жүйесін ықшам түрде жазайық

$$\frac{1}{\triangle t}\sum_{i=1}^{N}\left(u_i^{n+1}-u_i^{n}\right)\int_\Omega \vec{\boldsymbol{\omega}}_i\cdot\vec{\boldsymbol{\omega}}_j\, rdrdx$$

$$-\sum_{i=1}^{N}\sum_{m=1}^{N} u_i^{n+1}u_m^{n+1}\int_\Omega\left((\vec{\boldsymbol{\omega}}_i\cdot\nabla)\vec{\boldsymbol{\omega}}_j\right)\cdot\vec{\boldsymbol{\omega}}_m\, rdrdx$$

$$-\sum_{m=1}^{M} p_m^{n+1}\int_\Omega \eta_m div\vec{\boldsymbol{\omega}}_j\, rdrdx+\mu\sum_{i=1}^{N} u_i^{n+1}\int_\Omega \nabla\vec{\boldsymbol{\omega}}_i:\nabla\vec{\boldsymbol{\omega}}_j\, rdrdx+ \qquad (1.44)$$

$$+\sum_{i=1}^{N} u_i^{n+1}\int_\Omega k(x,r)\vec{\boldsymbol{\omega}}_i\cdot\vec{\boldsymbol{\omega}}_j\, rdrdx=\int_\Omega \vec{\boldsymbol{f}}^{\,n+1}\cdot\vec{\boldsymbol{\omega}}_j\, rdrdx,$$

$$j=1,2,..,N.$$

Үзіліссіздік теңдеуінен шығатын дискреттік жүйе

$$\sum_{i=1}^{N} u_i^{n+1}\int_\Omega (div\,\vec{\boldsymbol{\omega}}_i)\,\eta_k\, r\, dr\, dx=0,\qquad k=1,..,M \qquad (1.45)$$

Мұнда цилиндрлік координаталардағы дивергенция келесі түрге ие болады:

$$div\,\vec{\boldsymbol{\omega}}_j=\frac{\partial\omega_{j,x}}{\partial x}+\frac{\partial\omega_{j,r}}{\partial r}+\frac{\omega_{j,r}}{r}$$

Жоғарыдағы теңдеулер жүйесін матрицалық түрде жазу үшін келесі матрицаларды енгізейік. Бірінші қосылғыштағы интегралыды $M_{ij}-$ арқылы белгілейік:

$$M_{ij}=\int_\Omega \vec{\boldsymbol{\omega}}_i\cdot\vec{\boldsymbol{\omega}}_j\, r\, dr\, dx$$

Мысалы бұл интегралды базалық элемент үшін есептелуін көрсетейік, $A_1(0,0), A_2(0,0),\ A_3(0,0)$.

$$M_{11}^{(e)} = \int_{K^{(e)}} \vec{\omega}_1^2(x,r)\, r\, dr\, dx$$

мұнда $K^{(e)} \subset \Omega$- физикалық элемент, ω_1 - бірінші базистік функция.

Интегралды есептеуді жеңілдету мақсатында физикалық элементтен эталондық үшбұрышқа көшеміз:

$$\widehat{K} = \{(\xi,\eta);\ \xi \geq 0, \eta \geq 0, \xi + \eta \leq 1,\}$$

Бұл жағдайда интеграл келесі түрге келеді:

$$M_{11}^{(e)} = |J| \int_{\widehat{K}} \vec{\omega}_1^2(\xi,\eta)\, r(\xi,\eta)\, d\xi\, d\eta = = |J| \int_0^1 \int_0^{1-\xi} \vec{\omega}_1^2(\xi,\eta)\, r(\xi,\eta)\, r(\xi,\eta) d\xi\, d\eta$$

мұндағы $|J|$ - координаталарды түрлендірудің Якобиан анықтауышының модулі.

Бірінші базистік функция

$$\vec{\omega}_1 = (1 - \xi - \eta)(2(1 - \xi - \eta) - 1)$$

түрінде берілген.

Демек келесі түрде жазылады:

$$M_{11}^{(e)} = |J| \int_0^1 \int_0^{1-\xi} [(1 - \xi - \eta)(2(1 - \xi - \eta) - 1)]^2\, r(\xi,\eta) d\xi\, d\eta$$

Физикалық элементтен эталондық элементке көшу барысында нүктенің координаталары барицентрлік координаталар арқылы өрнектеледі:

$$r(\xi,\eta) = r_1\lambda_1 + r_2\lambda_2 + r_3\lambda_3 = r_1(1 - \xi - \eta) + r_2\xi + r_3\eta$$
$$= 0 \cdot (1 - \xi - \eta) + 1 \cdot \xi + 0 \cdot \eta = \xi$$

мұндағы r_i=(x_i,y_i) - үшбұрыш төбелерінің координаталары, ал $\lambda_i (i = 1,2,3)$ - барицентрлік координаталар.

$$M_{11}^{(e)} = |J| \int_0^1 \int_0^{1-\xi} [(1 - \xi - \eta)(2(1 - \xi - \eta) - 1)]^2\, \xi\, d\xi\, d\eta$$
$$= \left| \begin{matrix} t = (1 - \xi - \eta) \\ dt = -d\eta \end{matrix} \right| = |J| \int_0^1 \int_0^{1-\xi} (4t^4 - 4t^3 + t^2)\, \xi\, d\xi\, dt$$
$$= |J| \int_0^1 \xi\, d\xi \int_0^{1-\xi} (4t^4 - 4t^3 + t^2)\ dt = |J| \int_0^1 \xi \left(\frac{4}{5}t^5 - t^4 + \frac{1}{3}t^3\right) |_0^{1-\xi} d\xi =$$

$$= |J| \int_0^1 \xi \left[\frac{4}{5}(1-\xi)^5 - (1-\xi)^4 + \frac{1}{3}(1-\xi)^3\right] d\xi$$
$$= |J| \left[\frac{1}{15}\xi^2 - \frac{1}{3}\xi^3 + \frac{3}{4}\xi^4 - \frac{13}{15}\xi^5 + \frac{1}{2}\xi^6 - \frac{13}{35}\xi^7\right] |_0^1 = \frac{1}{420}$$

Сәйкесінше қалған мүшелерін келесі матрицалармен белгілейк.

Конвективтік тензордың элементтері

$$C_{ijm} = \int_\Omega \left((\vec{\boldsymbol{\omega}}_i \cdot \nabla)\vec{\boldsymbol{\omega}}_j\right) \cdot \vec{\boldsymbol{\omega}}_m \, r \, dr \, dx,$$

мұндағы $i = 1,..,N;\ m = 1,..,N;\ j = 1,..,N.$

Дивергенция матрицасының элементтері

$$B_{mj} = \int_\Omega \eta_m \, div \, \vec{\boldsymbol{\omega}}_j \, r \, dr \, dx,$$

мұндағы $m = 1,..,M;\ j = 1,..,N.$

Тұтқырлық матрицасының элементтері

$$A_{ij} = \int_\Omega \nabla\vec{\boldsymbol{\omega}}_i : \nabla\vec{\boldsymbol{\omega}}_j \ r \, dr \, dx,$$

мұндағы $i = 1,..,N;\ j = 1,..,N.$

Бринкман матрицасының элементтері

$$K_{ij} = \int_\Omega k(x,r)\vec{\boldsymbol{\omega}}_i \cdot \ \vec{\boldsymbol{\omega}}_j \, r \, dr \, dx,$$

мұндағы $i = 1,..,N;\ j = 1,..,N.$

Оң жақ бөліктің векторының элементтері

$$F_j = \int_\Omega \vec{\boldsymbol{f}}^{\,n+1} \cdot \vec{\boldsymbol{\omega}}_j \, r \, dr \, dx,$$

мұндағы $j = 1,..,N.$

Жоғарыда енгізілген матрицалар мен векторларды пайдалансақ, импульс теңдеуінің дискретті алгебралық түрде

$$\frac{1}{\triangle t}\sum_{i=1}^{N}\left(u_i^{n+1} - u_i^{\,n}\right)M_{ij} - \sum_{i=1}^{N}\sum_{m=1}^{N} u_i^{\,n+1} u_m^{\,n+1} C_{ijm}$$
$$- \sum_{m=1}^{M} p_m^{n+1} B_{mj} + \mu \sum_{i=1}^{N} u_i^{n+1} A_{ij} + \sum_{i=1}^{N} u_i^{\,n+1} K_{ij} = F_j$$

Байланыспау функциясы

$$R_j(u^{n+1}, p^{n+1}) = \frac{1}{\triangle t}\sum_{i=1}^{N}\left(u_i^{\,n+1} - u_i^{\,n}\right)M_{ij} - \sum_{i=1}^{N}\sum_{m=1}^{N} u_i^{\,n+1} u_m^{n+1} C_{ijm} \qquad (1.46)$$

$$-\sum_{m=1}^{M} p_m^{n+1} B_{mj} + \mu \sum_{i=1}^{N} u_i^{n+1} A_{ij} + \sum_{i=1}^{N} u_i^{n+1} K_{ij} - F_j$$

Үздіксіздік теңдеуі

$$R_k^{div} = \sum_{i=1}^{N} B_{ki} u_i^{n+1} = 0, \quad k = 1,2,\dots,M \tag{1.47}$$

(1.46)–(1.47) теңдеулерінен алынған алгебралық жүйеде конвекциялық мүше жылдамдық коэффициенттерінің көбейтіндісінен тұратындықтан, жүйе сызықтық емес болып табылады. Оны шешу үшін Ньютон әдісі қолданылып, әрбір итерацияда жүйе сызықтық түрге келтіріледі.

Мұндағы $R_j(u^{n+1}, p^{n+1})$— импульс теңдеуінің j - ші дискретті байланыспау функциясы. Ол Галеркин әдісі бойынша алынған дискретті теңдеудің сол және оң жақ бөліктерінің айырмасын сипаттайды. Байланыспау функциясы жылдамдықтың $u = (u_1^{n+1}, \dots, u_N^{n+1})^T$ және қысымның $p = (p_1^{n+1}, \dots, p_M^{n+1})^T$ белгісіз коэффициенттеріне тәуелді. Дискретті шешім теңдеуді дәл қанағаттандырған жағдайда нөлге тең болады

$$R_j(u^{n+1}, p^{n+1})=0, \quad R_k^{div} = 0,\ j = 1,2,..,N, k = 1,2,..,M.$$

Сондықтан есепті шешу жылдамдық пен қысым коэффициенттерінің байланыспау функциясын нөлге айналдыратын мәндерін анықтауға келтіріледі.

Уақыттың $n+1$ −қабатындағы сызықтық емес алгебралық жүйені шешу үшін Ньютон әдісі қолданылады. s -Ньютон итерациясының нөмірі болсын.

Якоби матрицасын анықтау

Байланыспау функциясы белгісіз коэффициенттерге сызықтық емес түрде тәуелді болғандықтан, оларды тікелей шешу мүмкін емес. Сондықтан әрбір Ньютон итерациясында байланыспау функциясы бірінші ретті Тейлор жіктелуі арқылы сызықтандырылып, олардың бірінші ретті туындыларынан тұратын Якоби матрицасы құрылады.

Якоби матрицасының блоктары келесі түрде анықталады

$$j_{jk}^{uu} = \frac{\partial R_j^{mom}}{\partial u_k}, \quad j_{jm}^{up} = \frac{\partial R_j^{mom}}{\partial p_m}, j_{kj}^{pu} = \frac{\partial R_k^{div}}{\partial u_j}, \quad j_{km}^{pp} = \frac{\partial R_k^{div}}{\partial p_m},$$

Осыған сәйкес Якоби матрицасы жалпы түрде $\begin{pmatrix} j_{jk}^{uu} & j_{jm}^{up} \\ j_{kj}^{pu} & j_{km}^{pp} \end{pmatrix}$.

Мұндағы R_j^{mom} −Импульс теңдеуінің байланыспау функциясы, R_k^{div} −үзіліссіздік теңдеуінің байланыспау функциясы.

Белгісіз айнымалылар жылдамдық және қысым коэффициенттерінен тұратындықтан, Якоби матрицасы төрт блокқа бөлінеді. $j_{jk}^{uu}-$ импульс теңдеуінің жылдамдық коэффициенттері бойынша алынған туындылары, $j_{jm}^{up}-$ импульс теңдеуінің қысым коэффициенттері бойынша алынған туындылары, $j_{kj}^{pu}-$ үзіліссіздік теңдеудің жылдамдық коэффициенті бойынша алынған жартылай туындылары, үзіліссіздік теңдеуі қысымға тәуелді болмағандықтан, $j_{km}^{pp}-$ блогы нөлдік матрица болып табылады.

Сызықтық мүшелердің туындылары

Импульс массалық, диффузиялық және Бринкман мүшелері жылдамдық коэффициенттеріне сызықтық тәуелді. Сондықтан олардың туындылары тікелей есептеледі.

Массалық мүшенің байланыспау функциясы

$$R_j^{mass}=\frac{1}{\triangle t}\sum_{i=1}^{N}\left(u_i^{n+1}-u_i^{n}\right)M_{ij}$$

u_k-бойынша туынды аламыз:

$$\frac{\partial R_j^{mass}}{\partial u_k}=\frac{\partial}{\partial u_k}\left(\frac{1}{\triangle t}\sum_{i=1}^{N}\left(u_i^{n+1}-u_i^{n}\right)M_{ij}\right)$$

$$=\frac{1}{\triangle t}\sum_{i=1}^{N}\frac{\partial\left(u_i^{n+1}-u_i^{n}\right)}{\partial u_k}M_{ij}=\frac{1}{\triangle t}\sum_{i=1}^{N}\delta_{ik}M_{ij}=\frac{1}{\triangle t}M_{kj}$$

$\frac{\partial u_i^n}{\partial u_k}=0-$алдыңғы уақыт қабатындағы белгілі шама (константа)

Сондықтан

$$\frac{\partial\left(u_i^{n+1}-u_i^{n}\right)}{\partial u_k}=\frac{\partial u_i^{n+1}}{\partial u_k}=\delta_{ik}$$

Кронекер символының қасиеті бойынша қосындыдағы $i=k$ болатын мүшесі ғана сақталады. Сондықтан массалық мүшенің туындысы $M_{kj}-$ матрицасының элементіне тең болады.

Диффузиялық мүше

$$\frac{\partial}{\partial u_k}\left(\mu\sum_{i=1}^{N}u_i\,A_{ij}\right)=\mu A_{kj}$$

Бринкман мүшесі

$$\frac{\partial}{\partial u_k}\left(\sum_{i=1}^{N}u_iK_{ij}\right)=K_{kj}$$

Диффузиялық және Бринкман мүшелері де белгісіз коэффициенттерге сызықтық тәуелді болғандықтан, олардың туындылары сәйкесінше μA_{kj} және K_{kj} түрінде анықталады.

Төмендегі өрнек конвекциялық мүшенің жылдамдық коэффициенттері бойынша Якоби элементтерін сипаттайды. Бұл мүше жүйенің сызықтық емес қасиетін анықтайтын негізгі бөлік болып табылады

$$R_j^{conv} = -\sum_{i=1}^{N}\sum_{m=1}^{N} u_i\, u_m\, C_{imj}$$

конвекциялық мүшенің u_k- бойынша туындысын есептеу үшін көбейтіндіні дифференциалдау ережесі қолданылады

$$\frac{\partial(u_i\, u_m)}{\partial u_k} = \frac{\partial u_i}{\partial u_k}u_m + u_i\frac{\partial u_m}{\partial u_k} = \delta_{ik}u_m + u_i\delta_{mk}$$

Онда

$$\frac{\partial R_j^{conv}}{\partial u_k} = -\sum_{i=1}^{N}\sum_{m=1}^{N}(\delta_{ik}u_m + u_i\delta_{mk})C_{imj} \;= -\sum_{m=1}^{N} u_m\, C_{kmj} - \sum_{i=1}^{N} u_i\, C_{ikj},$$

$$i = 1,..,N;\; j = 1,..,N.$$

Жоғарыда алынған туындыларды біріктіру арқылы Якоби матрицасының жылдамдық блогы алынады

$$j_{jk}^{uu} = \frac{1}{\triangle t}M_{kj} + \mu A_{kj} + K_{kj} - \sum_{m=1}^{N} u_m\;\; C_{kmj} - \sum_{i=1}^{N} u_i\;\; C_{ikj}$$

Қысым блогы

$$R_j^{press} = -\sum_{m=1}^{N} p_m^{n+1}B_{mj},$$

Оның туындысы $\frac{\partial R_j}{\partial p_k} = -\sum_{m=1}^{M}\frac{\partial p_m^{(n+1)}}{\partial p_k}B_{mj} = -B_{kj},$

Демек, $j_{jk}^{up} = -B_{kj}.$

Үзіліссіздік теңдеудің байланыспау функциясы

$$R_k^{div} = \sum_{i=1}^{N} B_{ki}u_i$$

$\frac{\partial R_k}{\partial u_j} = B_{kj}$ −теңдеудің u_j жылдамдық коэффициенті бойынша туындысы, үзіліссіздік функциясының байланыспау функциясы қысым коэффициенттеріне тәуелді емес, сондықтан

$$j_{km}^{pp} = \frac{\partial R_k^{div}}{\partial p_m} = 0$$

Соңында Якобиан

$$J\left(u^{(s)}, p^{(s)}\right) = \begin{pmatrix} j^{uu}(u^{(s)}) & -B^T \\ B & 0 \end{pmatrix}, \; j_{jk}^{uu} = j^{uu}.$$

түрінде жазылады.

Алынған Якоби матрицасын пайдаланып, байланыспау функцияның бірінші ретті Тейлор жіктелуі нәтижесінде әрбір Ньютон итерациясында шешілетін сызықтық алгебралық жүйе алынады.

$$R(u,p) = 0, \; u^{(s+1)} = u^{(s)} + \delta u^{(s)}, \quad p^{(s+1)} = p^{(s)} + \delta p^{(s)}$$
$$R\left(u^{(s)} + \delta u^{(s)}, p^{(s)} + \delta p^{(s)}\right) \approx R\left(u^{(s)}, p^{(s)}\right) + \left(u^{(s)}, p^{(s)}\right)\begin{pmatrix} \delta u^{(s)} \\ \delta p^{(s)} \end{pmatrix}$$

Ньютон әдісінің толық жүйесі

Ньютон итерациясы келесі жүйеге келтіріледі

$$J\left(u^{(s)}, p^{(s)}\right)\begin{pmatrix} \delta u^{(s)} \\ \delta p^{(s)} \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} R^{mom}\left(u^{(s)}, p^{(s)}\right) \\ R^{div}\left(u^{(s)}\right) \end{pmatrix}$$

мұндағы $J -$ байланыспау функция үшін Якоби матрицасы, ал $\delta u^{(s)}$ және $\delta p^{(s)}$ жылдамдық пен қысым коэффициенттеріне енгізілетін Ньютон түзетулері.

Ньютон түзетулері табылғаннан кейін шешім:

$$u^{(s+1)} = u^{(s)} + \delta u^{(s)}$$
$$p^{(s+1)} = p^{(s)} + \delta p^{(s)}$$

Компоненттік жазба

$$u_i^{(s+1)} = u_i^{(s)} + \delta u_i^{(s)}, \qquad i = 1,2,..,N,$$
$$p_m^{(s+1)} = p_m^{(s)} + \delta p_m^{(s)}, \quad m = 1,2,..,M.$$

Итерациялық процесс Ньютон түзетулерінің нормасы немесе байланыспау функцияларының нормасы алдын ала берілген дәлдікке жеткенше жалғасады

$$\left\|\delta u^{(s)}\right\| + \left\|\delta p^{(s)}\right\| < \varepsilon$$

немесе

$$\|R^{mom}\| + \left\|R^{div}\right\| < \varepsilon$$

1.5 Энергетикалық теңсіздік

(1.11)–(1.15) есебінің әлсіз шешімі үшін (1.33) интегралдық тепе-теңдіктен априорлық энергетикалық бағалауды аламыз. Ол үшін тестік функция ретінде келесіні болады:

$$\vec{\boldsymbol{\varphi}} = \vec{\boldsymbol{u}}(x, r, t),\ q = p(x, r, t)$$

$\vec{\boldsymbol{u}} \in V$ векторлық өрісі беріліп, соленоидалдық шарты орындалса, онда:

$$div\vec{\boldsymbol{u}} = 0$$

Барлық қосылғыштарды жеке-жеке қарастырайық.
Уақыт бойынша туынды мынаны береді.

$$\left(\frac{\partial \vec{\boldsymbol{u}}}{\partial t}, \vec{\boldsymbol{u}}\right) = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\vec{\boldsymbol{u}}\|^2_{L^2(\Omega)}.$$

Конвективтік мүше

$$\left((\vec{\boldsymbol{u}} \cdot \nabla)\vec{\boldsymbol{u}}, \vec{\boldsymbol{u}}\right) = \frac{1}{2}\int_{\Gamma_4} |\vec{\boldsymbol{u}}|^2\, u_x\, r\, dl - \frac{1}{2}\int_{\Gamma_1} |\vec{\boldsymbol{u}}|^2\, u_x\, r\, dl \qquad (1.48)$$

Оны есептеу үшін келесі лемманы қолданамыз

Лемма $\vec{\boldsymbol{u}} = (u_x, u_r) \in$ V— осьтік симметриялы жағдайда сығылмайтын шартын қанағаттандыратын жеткілікті тегіс функция болса:

$$div\,\vec{\boldsymbol{u}} = \frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{1}{r}\frac{\partial (r\, u_r)}{\partial r} = 0,$$

онда конвективті мүше үшін мына теңдік орындалады

$$\left((\vec{\boldsymbol{u}} \cdot \nabla)\vec{\boldsymbol{u}}, \vec{\boldsymbol{u}}\right) = \frac{1}{2}\int_{\Gamma_4} |\vec{\boldsymbol{u}}|^2\, u_x\, r\, dl - \frac{1}{2}\int_{\Gamma_1} |\vec{\boldsymbol{u}}|^2\, u_x\, r\, dl,$$

Дәлелдеу.
Сызықтық емес мүшені қарастырайық:

$$\left((\vec{\boldsymbol{u}} \cdot \nabla)\vec{\boldsymbol{u}}, \vec{\boldsymbol{u}}\right) = \int_{\Omega} (\vec{\boldsymbol{u}} \cdot \nabla)\vec{\boldsymbol{u}} \cdot \vec{\boldsymbol{u}}\ r\, drdx,$$

Сызықтық емес мүшелерді компоненты арқылы жазсақ

$$(\vec{\boldsymbol{u}} \cdot \nabla)\vec{\boldsymbol{u}} = \begin{cases} u_r \dfrac{\partial u_r}{\partial r} + u_x \dfrac{\partial u_r}{\partial x} \\ u_r \dfrac{\partial u_x}{\partial r} + u_x \dfrac{\partial u_x}{\partial x} \end{cases}$$

Осы мүшені $\vec{\boldsymbol{u}} = (u_x, u_r)$ көбейтсек, келесі скаляр өрнекті аламыз

$$\begin{aligned} \left((\vec{\boldsymbol{u}} \cdot \nabla)\vec{\boldsymbol{u}}, \vec{\boldsymbol{u}}\right) &= {u_r}^2 \frac{\partial u_r}{\partial r} + u_r u_x \frac{\partial u_r}{\partial x} + u_x u_r \frac{\partial u_x}{\partial r} + {u_x}^2 \frac{\partial u_x}{\partial x} \\ &= \frac{1}{2} u_r \left(\frac{\partial {u_r}^2}{\partial r} + \frac{\partial {u_x}^2}{\partial r} \right) + \frac{1}{2} u_x \left(\frac{\partial {u_r}^2}{\partial x} + \frac{\partial {u_x}^2}{\partial x} \right) \\ &= \frac{1}{2} u_r \frac{\partial ({u_x}^2 + {u_r}^2)}{\partial r} + \frac{1}{2} u_x \frac{\partial ({u_x}^2 + {u_r}^2)}{\partial r} = \frac{1}{2} (\vec{\boldsymbol{u}} \cdot \nabla |\vec{\boldsymbol{u}}|^2) \end{aligned}$$

Келесі тепе-теңдікті аламыз:

$$(\vec{\boldsymbol{u}} \cdot \nabla)\vec{\boldsymbol{u}} \cdot \vec{\boldsymbol{u}} = \frac{1}{2} \vec{\boldsymbol{u}} \cdot \nabla(|\vec{\boldsymbol{u}}|^2).$$

Онда:

$$\left((\vec{\boldsymbol{u}} \cdot \nabla)\vec{\boldsymbol{u}}, \vec{\boldsymbol{u}}\right) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \vec{\boldsymbol{u}} \cdot \nabla(|\vec{\boldsymbol{u}}|^2)\, r\, dr dx.$$

Ашып жазсақ

$$\vec{\boldsymbol{u}} \cdot \nabla(|\vec{\boldsymbol{u}}|^2) = u_x \frac{\partial |\vec{\boldsymbol{u}}|^2}{\partial x} + u_r \frac{\partial |\vec{\boldsymbol{u}}|^2}{\partial r}$$

Демек,

$$\left((\vec{\boldsymbol{u}} \cdot \nabla)\vec{\boldsymbol{u}}, \vec{\boldsymbol{u}}\right)_r = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \left(u_x \frac{\partial |\vec{\boldsymbol{u}}|^2}{\partial x} + u_r \frac{\partial |\vec{\boldsymbol{u}}|^2}{\partial r} \right) r\, dr dx$$

Онда:

$$\begin{aligned} &\frac{\partial}{\partial x}(r u_x |\vec{\boldsymbol{u}}|^2) + \frac{\partial}{\partial r}(r u_r |\vec{\boldsymbol{u}}|^2) \\ &\quad = r \left(u_x \frac{\partial |\vec{\boldsymbol{u}}|^2}{\partial x} + u_r \frac{\partial |\vec{\boldsymbol{u}}|^2}{\partial r} \right) + |\vec{\boldsymbol{u}}|^2 \left(r \frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial (r u_r)}{\partial r} \right) \end{aligned} \tag{1.49}$$

Сығылмайтындық шартын ескере отырып:

$$r \frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial (r u_r)}{\partial r} = r \left(\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{1}{r} \frac{\partial (r u_r)}{\partial r} \right) = 0$$

Онда (1.49) келесі түрге келтіреміз:

$$r\left(u_x\frac{\partial|\vec{\boldsymbol{u}}|^2}{\partial x}+u_r\frac{\partial|\vec{\boldsymbol{u}}|^2}{\partial r}\right)=\frac{\partial}{\partial x}(ru_x|\vec{\boldsymbol{u}}|^2)+\frac{\partial}{\partial r}(ru_r|\vec{\boldsymbol{u}}|^2).$$

Демек,

$$\left((\vec{\boldsymbol{u}}\cdot\nabla)\vec{\boldsymbol{u}},\vec{\boldsymbol{u}}\right)=\frac{1}{2}\int_\Omega\left[\frac{\partial}{\partial x}(ru_x|\vec{\boldsymbol{u}}|^2)+\frac{\partial}{\partial r}(ru_r|\vec{\boldsymbol{u}}|^2)\right]drdx$$

Гаусс–Остроградский теоремасын қолдану арқылы келесі нәтижені аламыз

$$\left((\vec{\boldsymbol{u}}\cdot\nabla)\vec{\boldsymbol{u}},\vec{\boldsymbol{u}}\right)=\frac{1}{2}\int_{\partial\Omega}|\vec{\boldsymbol{u}}|^2\cdot(\vec{\boldsymbol{u}}\cdot\vec{n})\,r\,dl$$

Ω облысының шекарасы 4 бөліктен тұрады:

$$\partial\Omega=\Gamma_1\cup\Gamma_2\cup\Gamma_3\cup\Gamma_4.$$

Онда сызықтық емес мүшені келесі түрде жазуға болады

$$\left((\vec{\boldsymbol{u}}\cdot\nabla)\vec{\boldsymbol{u}},\vec{\boldsymbol{u}}\right)=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{4}\int_{\Gamma_i}|\vec{\boldsymbol{u}}|^2\cdot(\vec{\boldsymbol{u}}\cdot\vec{\boldsymbol{n}})\,r\,dl$$

Шекаралық шарттарды қарастырайық

Γ_2: қатты қабырғада $u_x=0,\ u_r=0,$

$$\vec{\boldsymbol{u}}=0\Rightarrow\vec{\boldsymbol{u}}\cdot\vec{\boldsymbol{n}}=0,\int_{\Gamma_2}|\vec{\boldsymbol{u}}|^2\cdot(\vec{\boldsymbol{u}}\cdot\vec{\boldsymbol{n}})\,r\,dl=0$$

Γ_3: симметрия өсінде $r=0;\ u_r=0,\ \frac{\partial u_x}{\partial r}=0$

$$\int_{\Gamma_3}|\vec{\boldsymbol{u}}|^2\,(\vec{\boldsymbol{u}}\cdot\vec{\boldsymbol{n}})\,r\,dl=0$$

Γ_1: кіріс шекарасында $x=0,\vec{n}=(-1,0),u_x=g(r),\ u_r=0,$

$$\int_{\Gamma_1}|\vec{\boldsymbol{u}}|^2\,(\vec{\boldsymbol{u}}\cdot\vec{\boldsymbol{n}})\,r\,dl=-\int_{\Gamma_1}|\vec{\boldsymbol{u}}|^2\,u_x\,r\,dl$$

$$\vec{u}\cdot\vec{n}=-u_x=-g(r)$$

Γ_4: шығыс шекарасында $x=L,\vec{n}=(1,0),\frac{\partial u_x}{\partial x}=0,u_r=0,$

$$\int_{\Gamma_4} |\vec{u}|^2 \, (\vec{u} \cdot \vec{n}) \, r \, dl = \int_{\Gamma_4} |\vec{u}|^2 \, u_x \, r \, dl$$

Нәтижесінде, сызықтық емес мүше үшін келесі өрнекті аламыз

$$\left((\vec{u} \cdot \nabla)\vec{u}, \vec{u}\right) = \frac{1}{2}\int_{\Gamma_4} |\vec{u}|^2 \, u_x \, r \, dl - \frac{1}{2}\int_{\Gamma_1} |\vec{u}|^2 \, u_x \, r \, dl \tag{1.50}$$

Лемма дәлелденді.
Тұтқыр мүше мынадай түрге ие болады

$$\mu(\nabla\vec{u} : \nabla\vec{u}) = \mu\|\nabla\vec{u}\|^2_{L^2(\Omega)} \tag{1.51}$$

Кеуекті ортаның кедергісі мүшесі,

$$\int_{\Omega} k(x,r) \, |\vec{u}|^2 \; r \, dr \, dx \geq 0. \tag{1.52}$$

Нәтижесінде төмендегідей энергетикалық теңдікке қол жеткіземіз

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\vec{u}\|^2_{L^2(\Omega)} + \mu\|\nabla\vec{u}\|^2_{L^2(\Omega)} + \int_{\Omega} k(x,r)|\vec{u}|^2 \, r \, dr \, dx + \\ &+\frac{1}{2}\int_{\Gamma_4} |\vec{u}|^2 \, u_x \, r \, dl - \frac{1}{2}\int_{\Gamma_1} |\vec{u}|^2 \, u_x \, r \, dl = \left(\vec{f}, \vec{u}\right) \end{aligned} \tag{1.53}$$

Коши-Буняковский және Юнг теңсіздіктерінің көмегімен өрнектің оң жақ бөлігін бағалай отырып, келесі энергетикалық теңсіздік алыннады

$$\left(\vec{f}, \vec{u}\right) \leq \frac{1}{2\varepsilon}\left\|\vec{f}\right\|^2_{L^2(\Omega)} + \frac{\varepsilon}{2}\|\vec{u}\|^2_{L^2(\Omega)}$$

Пуанкаре теңсіздігін қолданып:

$$\|\vec{u}\|^2_{L^2(\Omega)} \leq C_p\|\nabla\vec{u}\|^2_{L^2(\Omega)} \Rightarrow \frac{\varepsilon}{2}\|\vec{u}\|^2_{L^2(\Omega)} \leq \frac{\varepsilon C_p}{2}\|\nabla\vec{u}\|^2_{L^2(\Omega)} \tag{1.54}$$

Демек, (1.53) теңдігінен келесі энергетикалық теңсіздік аламыз:

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\vec{u}\|^2_{L^2(\Omega)} + \left(\mu - \frac{\varepsilon C_p}{2}\right)\|\nabla\vec{u}\|^2_{L^2(\Omega)} + \int_{\Omega} k(x,r)|\vec{u}|^2 \; r \, dr \, dx + \tag{1.55}$$

$$+\frac{1}{2}\int_{\Gamma_4}|\vec{\boldsymbol{u}}|^2\,u_x\,r\,dl-\frac{1}{2}\int_{\Gamma_1}|\vec{\boldsymbol{u}}|^2\,u_x\,r\,dl\le\frac{1}{2\varepsilon}\left\|\vec{\boldsymbol{f}}\right\|^2_{L^2(\Omega)}$$

Уақыт бойынша 0 −ден t − ға дейін интегралдағаннан кейін:

$$\|\vec{\boldsymbol{u}}(t)\|^2_{L^2(\Omega)}+2\left(\mu-\frac{\varepsilon C_p}{2}\right)\int_0^t\|\nabla\vec{\boldsymbol{u}}(s)\|^2_{L^2(\Omega)}\,ds+$$

$$+2\int_0^t\int_\Omega k(x,r)|\vec{\boldsymbol{u}}(s)|^2\;r\,drdxds+\int_0^t\left[\int_{\Gamma_4}|\vec{\boldsymbol{u}}|^2\,u_x\,r\,dl-\right.$$

$$\left.-\int_{\Gamma_1}|\vec{\boldsymbol{u}}|^2\,u_x\,r\,dl\right]ds\le\|\vec{\boldsymbol{u}}^0\|^2_{L^2(\Omega)}+\frac{1}{\varepsilon}\int_0^t\left\|\vec{\boldsymbol{f}}(s)\right\|^2_{L^2(\Omega)}ds$$

мұнда C_p- Пуанкаре теңсіздігінің (1.54) тұрақтысы, $\varepsilon>0$ − кез келген оң шама. Коэффициенттер үшін келесі теңсіздіктің

$$\left(\mu-\frac{\varepsilon C_p}{2}\right)\ge 0$$

орындалуын талап етсек, келесі терома дәлелденеді.

Теорема 1 (орнықтылық): Егер (1.11)–(1.15) есебінің бастапқы шарты,оң жақ коэффициенттері келесі кеңістіктерде жатса

$$\vec{\boldsymbol{f}}\in L^2\big(0,T;\,L^2(\Omega)\big),\qquad u^0\in L^2(\Omega),\qquad k(x,r)\in L^\infty(\Omega),\qquad k(x,r)\ge 0.$$

және $C_p>0$ −Пуанкаре теңсіздігі тұрақтысы, $\mu-$ тұтқырлық коэффициенті келесі шартты қанағаттандырырса

$$\mu-\frac{\varepsilon C_p}{2}\ge 0,$$

онда есептің әлсіз шешімі үшін келесі априорлық бағалау орындалады

$$\|\vec{\boldsymbol{u}}(t)\|^2_{L^2(\Omega)}+2\int_0^t\int_\Omega k(x,r)|\vec{\boldsymbol{u}}(s)|^2\;r\,drdxds+\int_0^t\left[\int_{\Gamma_4}|\vec{\boldsymbol{u}}|^2\,u_x\,r\,dl\right.$$
$$\left.-\int_{\Gamma_1}|\vec{\boldsymbol{u}}|^2\,u_x\,r\,dl\right]ds\le\|\vec{\boldsymbol{u}}^0\|^2_{L^2(\Omega)}+\frac{1}{\varepsilon}\int_0^t\left\|\vec{\boldsymbol{f}}(s)\right\|^2_{L^2(\Omega)}ds. \tag{1.56}$$

Уақыт бойынша жартылай дискреттік схема

Уақыт аралығының тең қадамдармен бөлінуін қарастырайық:

$$[0,T],\ \ \Delta t\ =\ t^{n+1}-\ t^{n}$$

Әрбір $n = 0,1,\dots,N-1$ үшін жаңа қадамда жылдамдық пен қысымды табу қажет:

$$\vec{\boldsymbol{u}}^{\,n+1} \in\ V,\ \ p^{n+1} \in\ Q$$

Барлық тесттік функциялар

$$\vec{\boldsymbol{\varphi}}\ \in\ V_0,\ \ q\ \in Q_h$$

үшін келесі энергетикалық теңдік орындалды

$$\left(\frac{\vec{\boldsymbol{u}}^{\,n+1}-\ \vec{\boldsymbol{u}}^{\,n}}{\Delta t},\vec{\boldsymbol{\varphi}}\right)-\left(\left(\vec{\boldsymbol{u}}^{\,n+1}\cdot\ \nabla\right)\vec{\boldsymbol{\varphi}},\vec{\boldsymbol{u}}^{\,n+1}\right)-\ (p^{n+1},div\,\vec{\boldsymbol{\varphi}})\ +$$
$$+\left(div\,\vec{\boldsymbol{u}}^{\,n+1},q\right)\ +\ \mu\left(\nabla\vec{\boldsymbol{u}}^{\,n+1}:\nabla\vec{\boldsymbol{\varphi}}\right)\ +\ \left(k(x,r)\vec{\boldsymbol{u}}^{\,n+1},\vec{\boldsymbol{\varphi}}\right) \qquad (1.57)$$
$$=\ \left(\vec{\boldsymbol{f}}^{\,n+1},\vec{\boldsymbol{\varphi}}\right).$$

Енді тесттік функцияларда

$$\vec{\boldsymbol{\varphi}}\ =\ \vec{\boldsymbol{u}}^{\,n+1},\ \ q\ =\ p^{n+1}$$

болсын деп аламыз, онда келесі энергетикалық тепе-теңдік шығады

$$\left(\frac{\vec{\boldsymbol{u}}^{\,n+1}-\ \vec{\boldsymbol{u}}^{\,n}}{\Delta t},\vec{\boldsymbol{u}}^{\,n+1}\right)-\left(\left(\vec{\boldsymbol{u}}^{\,n+1}\cdot\ \nabla\right)\vec{\boldsymbol{u}}^{\,n+1},\vec{\boldsymbol{u}}^{\,n+1}\right)-\left(p^{n+1},div\,\vec{\boldsymbol{u}}^{\,n+1}\right)\ +$$
$$+\left(div\,\vec{\boldsymbol{u}}^{\,n+1},p^{n+1}\right)\ +\ \mu\left\|\nabla\vec{\boldsymbol{u}}^{\,n+1}\right\|^{2}+\ \left(k(x,r)\,\vec{\boldsymbol{u}}^{\,n+1},\vec{\boldsymbol{u}}^{\,n+1}\right)\ =\ \left(\vec{\boldsymbol{f}}^{\,n+1},\vec{\boldsymbol{u}}^{\,n+1}\right),$$

Біртекті орта үшін, үзіліссіздік теңдеуі

$$div\,\vec{\boldsymbol{u}}^{\,n+1}=0,$$

орындалатын болғандықтан қысымы бар мүшелері жойылады:

$$-\left(p^{n+1},div\,\vec{\boldsymbol{u}}^{\,n+1}\right)\ +\ \left(div\,\vec{\boldsymbol{u}}^{\,n+1},p^{n+1}\right)\ =0$$

Демек,

$$\left(\frac{\vec{\boldsymbol{u}}^{\,n+1}-\vec{\boldsymbol{u}}^{\,n}}{\Delta t},\vec{\boldsymbol{u}}^{\,n+1}\right)-\left(\left(\vec{\boldsymbol{u}}^{\,n+1}\cdot\nabla\right)\vec{\boldsymbol{u}}^{\,n+1},\vec{\boldsymbol{u}}^{\,n+1}\right)+\mu\left\|\nabla\vec{\boldsymbol{u}}^{\,n+1}\right\|^2$$
$$+\left(k(x,r)\,\vec{\boldsymbol{u}}^{\,n+1},\vec{\boldsymbol{u}}^{\,n+1}\right)=\left(\vec{\boldsymbol{f}}^{\,n+1},\vec{\boldsymbol{u}}^{\,n+1}\right)$$

Мына тепе-теңдікті пайдаланамыз

$$\left(\vec{\boldsymbol{u}}^{\,n+1}-\vec{\boldsymbol{u}}^{\,n},\vec{\boldsymbol{u}}^{\,n+1}\right)=\frac{1}{2}\left(\left\|\vec{\boldsymbol{u}}^{\,n+1}\right\|^2-\left\|\vec{\boldsymbol{u}}^{\,n}\right\|^2+\left\|\vec{\boldsymbol{u}}^{\,n+1}-\vec{\boldsymbol{u}}^{\,n}\right\|^2\right),$$

Онда жоғарыдағы теңдіктің бірінші қосылғышын келесі түрде жазамыз

$$\left(\frac{\vec{\boldsymbol{u}}^{\,n+1}-\vec{\boldsymbol{u}}^{\,n}}{\Delta t},\vec{\boldsymbol{u}}^{\,n+1}\right)=\frac{1}{2\Delta t}\left(\left\|\vec{\boldsymbol{u}}^{\,n+1}\right\|^2-\left\|\vec{\boldsymbol{u}}^{\,n}\right\|^2+\left\|\vec{\boldsymbol{u}}^{\,n+1}-\vec{\boldsymbol{u}}^{\,n}\right\|^2\right)$$

Юнг теңсіздігі бойынша оң жақтың бағасы:

$$\left(\vec{\boldsymbol{f}}^{\,n+1},\vec{\boldsymbol{u}}^{\,n+1}\right)\le\frac{1}{2\varepsilon}\left\|\vec{\boldsymbol{f}}^{\,n+1}\right\|^2+\frac{1}{2}\varepsilon\left\|\vec{\boldsymbol{u}}^{\,n+1}\right\|^2$$

$\left(\left(\vec{\boldsymbol{u}}^{\,n+1}\cdot\nabla\right)\vec{\boldsymbol{u}}^{\,n+1},\vec{\boldsymbol{u}}^{\,n+1}\right)=0$ болғандықтан, төмендегідей теңсіздікті аламыз:

$$\frac{1}{2\Delta t}\left(\left\|\vec{\boldsymbol{u}}^{\,n+1}\right\|^2-\left\|\vec{\boldsymbol{u}}^{\,n}\right\|^2+\left\|\vec{\boldsymbol{u}}^{\,n+1}-\vec{\boldsymbol{u}}^{\,n}\right\|^2\right)+\mu\left\|\nabla\vec{\boldsymbol{u}}^{\,n+1}\right\|^2+k\left\|\vec{\boldsymbol{u}}^{\,n+1}\right\|^2$$
$$\le\frac{1}{2\varepsilon}\left\|\vec{\boldsymbol{f}}^{\,n+1}\right\|_r^2+\frac{1}{2}\varepsilon\left\|\vec{\boldsymbol{u}}^{\,n+1}\right\|^2$$

Соңғы теңсіздікті $2\Delta t$ -ға көбейтіп, $l=0,..,n$ бойынша қосындылаймыз

$$\left\|\vec{\boldsymbol{u}}^{\,n+1}\right\|^2+\sum_{l=0}^{n}\left\|\vec{\boldsymbol{u}}^{\,l+1}-\vec{\boldsymbol{u}}^{\,l}\right\|^2+2\mu\sum_{l=0}^{n}\Delta t\,\left\|\nabla\vec{\boldsymbol{u}}^{\,l+1}\right\|^2+$$
$$+2\sum_{l=0}^{n}\Delta t\int_\Omega k(x,r)\,\left|\vec{\boldsymbol{u}}^{\,l+1}\right|^2\,r\,dr\,dx \qquad (1.58)$$
$$\le\left\|\vec{\boldsymbol{u}}^{\,0}\right\|^2+\frac{1}{\varepsilon}\sum_{l=0}^{n}\Delta t\,\left\|\vec{\boldsymbol{f}}^{\,l+1}\right\|^2+\varepsilon\sum_{l=0}^{n}\Delta t\,\left\|\vec{\boldsymbol{u}}^{\,l+1}\right\|^2$$

Пуанкаре теңсіздігі бойынша

$$\left\|\vec{\boldsymbol{u}}^{\,l+1}\right\|^2\le C_p\left\|\nabla\vec{\boldsymbol{u}}^{\,l+1}\right\|^2.$$

Сондықтан

$$\left\|\vec{\boldsymbol{u}}^{\,n+1}\right\|^2 + \sum_{l=0}^{n} \left\|\vec{\boldsymbol{u}}^{\,l+1} - \vec{\boldsymbol{u}}^{\,l}\right\|^2 + (2\mu - \varepsilon C_p) \sum_{l=0}^{n} \Delta t \left\|\nabla \vec{\boldsymbol{u}}^{\,l+1}\right\|^2 +$$

$$+ 2 \sum_{l=0}^{n} \Delta t \int_{\Omega} k(x,r) \left|\vec{\boldsymbol{u}}^{\,l+1}\right|^2 r\, dr\, dx \le \left\|\vec{\boldsymbol{u}}^{\,0}\right\|^2 + \frac{1}{\varepsilon} \sum_{l=0}^{n} \Delta t \left\|\vec{\boldsymbol{f}}^{\,l+1}\right\|^2,$$

Алынған бағалау $\vec{\boldsymbol{u}}^{\,n}$-нің шектелген екенін көрсетеді, демек, Эйлердің айқын емес схемасы орнықты болып табылады.

Кеңістіктік аппроксимация және проекторлар

Келесі шекті өлшемді кеңістіктер берілсін:

$$V_h \subset V,\ \ Q_h \subset Q,$$

Осы кеңістіктерде жататын $\vec{\boldsymbol{v}}_h \in V_h,\ q_h \in Q_h$ функциялар inf-sup орнықтылық шартын қанағаттандырады [1]:

$$\inf_{q_h \in Q_h} \sup_{\vec{\boldsymbol{v}}_h \in V_h} \frac{(\,\mathrm{div}\,\vec{\boldsymbol{v}}_h, q_h)}{\|\vec{\boldsymbol{v}}_h\|_{H^1(\Omega)} \|q_h\|_{L^2(\Omega)}} \ge \beta > 0 \qquad (1.59)$$

Бұл Бабушка–Брези (inf-sup, LBB) дискретті шарты ершікті есептің аралас вариациялық қойылымында жылдамдық пен қысымды бірге аппроксимациялау кезінде пайда болады және қысымның орнықтылығын, сондай-ақ сандық шешімде физикалық емес модалардың болмауын қамтамасыз етеді.

Проекциялық операторларды анықтау

Жылдамдық проекторы $P_h: V \to V_h$ келесі шарт арқылы анықталады (Ритц проекциясы) [54]:

$$(\nabla P_h \vec{\boldsymbol{u}}, \nabla \vec{\boldsymbol{v}}_h) = (\nabla \vec{\boldsymbol{u}}, \nabla \vec{\boldsymbol{v}}_h),\ \ \forall\, \vec{\boldsymbol{v}}_h \in V_h$$

Осы проекция қатесі үшін энергетикалық нормада ортогоналдық қасиет орындалады:

$$(\nabla(\vec{\boldsymbol{u}} - P_h \vec{\boldsymbol{u}}), \nabla \vec{\boldsymbol{v}}_h) = 0,$$

Бұл қасиет $\vec{\boldsymbol{u}} - P_h \vec{\boldsymbol{u}}$ проекциясының қателігі $H^1(\Omega)$, нормасында V_h кеңістігіндегі $\vec{\boldsymbol{v}}_h$ функциясына ортогональ екенін білдіреді, бұл энергетикалық нормада ең жақсы жуықтауды қамтамасыз етеді.

Егер $\vec{\boldsymbol{u}} \in H^2(\Omega)$, болса, онда аппроксимация қателігінің бағалаулары орындалады [55]:

$$\|\vec{\boldsymbol{u}} - P_h\vec{\boldsymbol{u}}\|_{L^2(\Omega)} \leq Ch^2.$$

Қысым проекторы $\Pi_h: Q \to Q_h$ келесі шарттармен анықталады:

$$(p - \Pi_h p, q_h) = 0, \ \forall\, q_h \in Q_h,$$
$$\|p - \Pi_h p\|_{L^2(\Omega)} \leq Ch\,.$$

Жылдамдық проекторы inf-sup шартымен сәйкес келеді, яғни (1.59) шартын қанағаттандырады деп алайық

$$(div(\vec{\boldsymbol{u}} - P_h\vec{\boldsymbol{u}}), q_h) = 0, \ \forall\, q_h \in Q_h.$$

Қателікті жіктеу

$$\vec{\boldsymbol{e}}_u^{n+1} = \vec{\boldsymbol{u}}^{\,n+1} - \vec{\boldsymbol{u}}_h^{\,n+1} = \left(\vec{\boldsymbol{u}}^{\,n+1} - P_h\vec{\boldsymbol{u}}^{\,n+1}\right) + \left(P_h\vec{\boldsymbol{u}}^{\,n+1} - \vec{\boldsymbol{u}}_h^{\,n+1}\right) \quad (1.60)$$

Жылдамдық үшін келесідей белгілеулер жасайық

$$\vec{\boldsymbol{\eta}}^{\,n+1} = \vec{\boldsymbol{u}}^{\,n+1} - P_h\vec{\boldsymbol{u}}^{\,n+1}$$
$$\vec{\boldsymbol{\xi}}^{\,n+1} = P_h\vec{\boldsymbol{u}}^{\,n+1} - \vec{\boldsymbol{u}}_h^{\,n+1}.$$

$\vec{\boldsymbol{\eta}}^{\,n+1}$ – FEM әдісінің аппроксимация қатесі, $\vec{\boldsymbol{\xi}}^{\,n+1}$-FEM әдісінің дискреттік қатесі

Қысым функциясы үшін:

$$e_p^{n+1} = p^{n+1} - p_h^{n+1} = (p^{n+1} - \Pi_h p^{n+1}) + (\Pi_h p^{n+1} - p_h^{n+1}) \quad (1.61)$$

(1.61) формуласының екі қосылғышын белгілейміз:

$$\theta^{n+1} = p^{n+1} - \Pi_h p^{n+1}$$

$$\zeta^{n+1} = \Pi_h p^{n+1} - p_h^{n+1}$$

Қатеге арналған дискретті схема

Дифференциалдық есеп

$$\left(\frac{\partial\vec{\boldsymbol{u}}^{\,n+1}}{\partial t}, \vec{\boldsymbol{v}}_h\right) + \left(\left(\vec{\boldsymbol{u}}^{\,n+1} \cdot \nabla\right)\vec{\boldsymbol{u}}^{\,n+1}, \vec{\boldsymbol{v}}_h\right) - (p^{n+1}, div\,\vec{\boldsymbol{v}}_h) +$$

$$+\left(div\,\vec{\boldsymbol{u}}^{\,n+1},q\right)+\mu\left(\nabla\,\vec{\boldsymbol{u}}^{\,n+1},\nabla\vec{\boldsymbol{v}}_h\right)+\left(k(x,r)\,\vec{\boldsymbol{u}}^{\,n+1},\vec{\boldsymbol{v}}_h\right)=\left(\vec{\boldsymbol{f}}^{\,n+1},\vec{\boldsymbol{v}}_h\right),$$

Дискретті есеп

$$\left(\frac{\vec{\boldsymbol{u}}_h^{\,n+1}-\vec{\boldsymbol{u}}_h^{\,n}}{\Delta t},\vec{\boldsymbol{v}}_h\right)+\left(\left(\vec{\boldsymbol{u}}_h^{\,n+1}\cdot\nabla\right)\vec{\boldsymbol{u}}_h^{\,n+1},\vec{\boldsymbol{v}}_h\right)-(p_h^{n+1},div\,\vec{\boldsymbol{v}}_h)+$$

$$+\left(div\vec{\boldsymbol{u}}_h^{\,n+1},q_h\right)+\mu\left(\nabla\,\vec{\boldsymbol{u}}_h^{\,n+1},\nabla\vec{\boldsymbol{v}}_h\right)+\left(k(x,r)\,\vec{\boldsymbol{u}}_h^{\,n+1},\vec{\boldsymbol{v}}_h\right)=\left(\vec{\boldsymbol{f}}_h^{\,n+1},\vec{\boldsymbol{v}}_h\right),$$

Үздіксіз есептен дискретті есепті алып тастасақ төмендегі теңдікті аламыз

$$\left(\frac{\vec{\boldsymbol{e}}_u^{\,n+1}-\vec{\boldsymbol{e}}_u^{\,n}}{\Delta t},\vec{\boldsymbol{v}}_h\right)-\left(\left(\vec{\boldsymbol{u}}^{\,n+1}\cdot\nabla\right)\vec{\boldsymbol{u}}^{\,n+1}-\left(\vec{\boldsymbol{u}}_h^{\,n+1}\cdot\nabla\right)\vec{\boldsymbol{u}}_h^{\,n+1},\vec{\boldsymbol{v}}_h\right)$$
$$-\left(e_p^{n+1},div\,\vec{\boldsymbol{v}}_h\right)+\left(div\,\vec{\boldsymbol{e}}_u^{\,n+1},q_h\right)+\mu\left(\nabla\vec{\boldsymbol{e}}_u^{\,n+1},\nabla\vec{\boldsymbol{v}}_h\right) \qquad (1.62)$$
$$+\left(k\vec{\boldsymbol{e}}_u^{\,n+1},\vec{\boldsymbol{v}}_h\right)=-R_t(\vec{\boldsymbol{v}}_h)$$

Мұнда уақыт бойынша қалдық:

$$R_t(\vec{\boldsymbol{v}}_h)=\left(\frac{\partial\vec{\boldsymbol{u}}^{\,n+1}}{\partial t}-\frac{\vec{\boldsymbol{u}}^{\,n+1}-\vec{\boldsymbol{u}}^{\,n}}{\Delta t},\vec{\boldsymbol{v}}_h\right)$$

Сызықтық емес мүшелерді келесідей түрлендіреміз

$$\left(\vec{\boldsymbol{u}}^{\,n+1}\cdot\nabla\right)\vec{\boldsymbol{u}}^{\,n+1}-\left(\vec{\boldsymbol{u}}_h^{\,n+1}\cdot\nabla\right)\vec{\boldsymbol{u}}^{\,n+1}+\left(\vec{\boldsymbol{u}}_h^{\,n+1}\cdot\nabla\right)\vec{\boldsymbol{u}}^{\,n+1}-\left(\vec{\boldsymbol{u}}_h^{\,n+1}\cdot\nabla\right)\vec{\boldsymbol{u}}_h^{\,n+1}$$
$$=\left(\left(\vec{\boldsymbol{u}}^{\,n+1}-\vec{\boldsymbol{u}}_h^{\,n+1}\right)\cdot\nabla\right)\vec{\boldsymbol{u}}^{\,n+1}+\left(\vec{\boldsymbol{u}}_h^{\,n+1}\cdot\nabla\right)\left(\vec{\boldsymbol{u}}^{\,n+1}-\vec{\boldsymbol{u}}_h^{\,n+1}\right)$$
$$=(e_u^{n+1}\cdot\nabla)\vec{\boldsymbol{u}}^{\,n+1}+\left(\vec{\boldsymbol{u}}_h^{\,n+1}\cdot\nabla\right)e_u^{n+1}$$

Жоғарыдағы (1.60), (1.61) формулаларымен берілген жіктеулер

$$\vec{\boldsymbol{e}}_u^{\,n+1}=\vec{\boldsymbol{\eta}}^{\,n+1}+\vec{\boldsymbol{\xi}}^{\,n+1},\qquad e_p^{n+1}=\theta^{n+1}+\zeta^{n+1}$$

(1.57) теңдікке қойсақ, барлық $\vec{\boldsymbol{v}}_h\in V_h,\ q_h\in Q_h$ үшін келесі теңдікті аламыз

$$\left(\frac{\vec{\boldsymbol{\xi}}^{\,n+1}-\vec{\boldsymbol{\xi}}^{\,n}}{\Delta t},\vec{\boldsymbol{v}}_h\right)+\mu\left(\nabla\vec{\boldsymbol{\xi}}^{\,n+1},\nabla\vec{\boldsymbol{v}}_h\right)-(\zeta^{n+1},div\,\vec{\boldsymbol{v}}_h)+$$
$$\left(div\,\vec{\boldsymbol{\xi}}^{\,n+1},q_h\right)+\left(k\vec{\boldsymbol{\xi}}^{\,n+1},\vec{\boldsymbol{v}}_h\right)$$
$$-\left(\left(\vec{\boldsymbol{u}}^{\,n+1}\cdot\nabla\right)\vec{\boldsymbol{u}}^{\,n+1}-\left(\vec{\boldsymbol{u}}_h^{\,n+1}\cdot\nabla\right)\vec{\boldsymbol{u}}_h^{\,n+1},\vec{\boldsymbol{v}}_h\right) \qquad (1.63)$$

$$= -R_t(\vec{\boldsymbol{v}}_h) - \left(\frac{\vec{\boldsymbol{\eta}}^{\,n+1} - \vec{\boldsymbol{\eta}}^{\,n}}{\Delta t}, \vec{\boldsymbol{v}}_h\right) - \mu\left(\nabla\vec{\boldsymbol{\eta}}^{\,n+1}, \nabla\vec{\boldsymbol{v}}_h\right)$$
$$+ (\theta^{n+1}, div\,\vec{\boldsymbol{v}}_h) - \left(div\,\vec{\boldsymbol{\eta}}^{\,n+1}, q_h\right) - \left(k\vec{\boldsymbol{\eta}}^{\,n+1}, \vec{\boldsymbol{v}}_h\right)$$

Тесттік функцияларды келесідей етіп алсақ

$$\vec{\boldsymbol{v}}_h = \vec{\boldsymbol{\xi}}^{\,n+1}, \;\; q_h = \zeta^{n+1}$$

Онда келесі тепе-теңдік шығады

$$\left(\frac{\vec{\boldsymbol{\xi}}^{\,n+1} - \vec{\boldsymbol{\xi}}^{\,n}}{\Delta t}, \vec{\boldsymbol{\xi}}^{\,n+1}\right) + \mu\left(\nabla\vec{\boldsymbol{\xi}}^{\,n+1}, \nabla\vec{\boldsymbol{\xi}}^{\,n+1}\right) - \left(\left(\vec{\boldsymbol{\xi}}^{\,n+1} \cdot \nabla\right)\vec{\boldsymbol{u}}^{\,n+1}, \vec{\boldsymbol{\xi}}^{\,n+1}\right)$$
$$- \left(\zeta^{n+1}, div\,\vec{\boldsymbol{\xi}}^{\,n+1}\right) + \left(div\,\vec{\boldsymbol{\xi}}^{\,n+1}, \zeta^{n+1}\right) + \left(k\vec{\boldsymbol{\xi}}^{\,n+1}, \vec{\boldsymbol{\xi}}^{\,n+1}\right) = -R_t\left(\vec{\boldsymbol{\xi}}^{\,n+1}\right) \quad (1.64)$$
$$-\left(\frac{\vec{\boldsymbol{\eta}}^{\,n+1} - \vec{\boldsymbol{\eta}}^{\,n}}{\Delta t}, \vec{\boldsymbol{\xi}}^{\,n+1}\right) - \mu\left(\nabla\vec{\boldsymbol{\eta}}^{\,n+1}, \nabla\vec{\boldsymbol{\xi}}^{\,n+1}\right) - \left(\theta^{n+1}, div\,\vec{\boldsymbol{\xi}}^{\,n+1}\right)$$
$$-\left(div\,\vec{\boldsymbol{\eta}}^{\,n+1}, \zeta^{n+1}\right) - \left(\left(\vec{\boldsymbol{\eta}}^{\,n+1} \cdot \nabla\right)\vec{\boldsymbol{u}}^{\,n+1}, \vec{\boldsymbol{\xi}}^{\,n+1}\right)$$
$$-\left(\left(\vec{\boldsymbol{u}}_h^{\,n+1} \cdot \nabla\right)\vec{\boldsymbol{\eta}}^{\,n+1}, \vec{\boldsymbol{\xi}}^{\,n+1}\right)$$
$$-\left(\left(\vec{\boldsymbol{u}}_h^{\,n+1} \cdot \nabla\right)\vec{\boldsymbol{\xi}}^{\,n+1}, \vec{\boldsymbol{\xi}}^{\,n+1}\right) + \left(k\vec{\boldsymbol{\eta}}^{\,n+1}, \vec{\boldsymbol{\xi}}^{\,n+1}\right)$$

Онда уақыт бойынша айырымдық туындысы бар мүше үшін

$$\left(\frac{\vec{\boldsymbol{\xi}}^{\,n+1} - \vec{\boldsymbol{\xi}}^{\,n}}{\Delta t}, \vec{\boldsymbol{\xi}}^{\,n+1}\right) = \frac{1}{2\Delta t}\left(\left\|\vec{\boldsymbol{\xi}}^{\,n+1}\right\|^2 - \left\|\vec{\boldsymbol{\xi}}^{\,n}\right\|^2 + \left\|\vec{\boldsymbol{\xi}}^{\,n+1} - \vec{\boldsymbol{\xi}}^{\,n}\right\|^2\right),$$

Тұтқырлық мүшесі үшін

$$\mu\left(\nabla\vec{\boldsymbol{\xi}}^{\,n+1}, \nabla\vec{\boldsymbol{\xi}}^{\,n+1}\right) = \mu\left\|\nabla\vec{\boldsymbol{\xi}}^{\,n+1}\right\|^2.$$

Дивергенциясы бар мүшелер қысқарады

$$-\left(\zeta^{n+1}, div\,\vec{\boldsymbol{\xi}}^{\,n+1}\right) + \left(div\,\vec{\boldsymbol{\xi}}^{\,n+1}, \zeta^{n+1}\right) = 0.$$

Шешім жеткілікті тегіс болғанда сызықтық емес мүшелер үшін Темам Р.[1] жұмысындағы леммаға сәйкес келесі бағалаулар орындалады

$$\left|\left(\left(\vec{\eta}^{\,n+1}\cdot\nabla\right)\vec{u}^{\,n+1},\vec{\xi}^{\,n+1}\right)\right| \le C_1\left\|\vec{\eta}^{\,n+1}\right\|_{H^1}\left\|\vec{u}^{\,n+1}\right\|_{H^1}\left\|\vec{\xi}^{\,n+1}\right\|_{H^1}, \tag{1.65}$$

$$\left|\left(\left(\vec{\xi}^{\,n+1}\cdot\nabla\right)\vec{u}^{\,n+1},\vec{\xi}^{\,n+1}\right)\right| \le C_2\|\nabla\vec{u}\|_{L^\infty}\left\|\vec{\xi}^{\,n+1}\right\|_{H^1}^2, \tag{1.66}$$

$$\left|\left(\vec{u}_h^{\,n+1}\cdot\nabla\right)\vec{\eta}^{\,n+1},\vec{\xi}^{\,n+1}\right| \le C_3\left\|\vec{u}_h^{\,n+1}\right\|_{H^1}\left\|\vec{\eta}^{\,n+1}\right\|_{H^1}\left\|\vec{\eta}^{\,n+1}\right\|_{H^1}. \tag{1.67}$$

Ал (1.64) тепе-теңдігінің оң жағындағы сызықтық емес мүше, Темам Р.[1] монографиясындағы леммаға 1.3-ке сйкес

$$\left(\left(\vec{u}_h^{\,n+1}\cdot\nabla\right)\vec{\xi}^{\,n+1},\vec{\xi}^{\,n+1}\right)=0. \tag{1.68}$$

Енді (1.65), (1.67) теңсіздіктерінің оң жағын Юнг теңсіздігімен бағаласақ

$$\left|\left(\left(\vec{\eta}^{\,n+1}\cdot\nabla\right)\vec{u}^{\,n+1},\vec{\xi}^{\,n+1}\right)\right| \le \frac{\gamma}{4}\left\|\vec{\xi}^{\,n+1}\right\|_{H^1}+\frac{C_1}{\gamma}\left\|\vec{u}^{\,n+1}\right\|_{H^1}^2\left\|\vec{\eta}^{\,n+1}\right\|_{H^1}^2, \tag{1.65^1}$$

$$\left|\left(\vec{u}_h^{\,n+1}\cdot\nabla\right)\vec{\eta}^{\,n+1},\vec{\xi}^{\,n+1}\right| \le \frac{\gamma}{4}\left\|\vec{\xi}^{\,n+1}\right\|_{H^1}^2+\frac{C_3}{\gamma}\left\|\vec{u}_h^{\,n+1}\right\|_{H^1}^2\left\|\vec{\eta}^{\,n+1}\right\|_{H^1}^2, \tag{1.67^1}$$

Ал (1.66) теңсіздігі

$$\|\vec{u}\|_{L^\infty}\le C\,\|\vec{u}\|_{H^2}$$

арқылы бағаланады, себебі Соболевтың ену теоремасына сәйкес[61]

$$H^2(\Omega)\to w^{1,\infty}(\Omega)$$

Сондықтан сызықтық емес мүшенің бұл қосылғышы келесі теңсіздікпен бағаланады

$$\left|\left(\left(\vec{\xi}^{\,n+1}\cdot\nabla\right)\vec{u}^{\,n+1},\vec{\xi}^{\,n+1}\right)\right| \le \frac{\gamma}{4}\left\|\vec{\xi}^{\,n+1}\right\|_{H^1}^2+\frac{C_2}{\gamma}\left\|\vec{u}^{\,n+1}\right\|_{H^2}^2\left\|\vec{\xi}^{\,n+1}\right\|_{H^1}^2,$$

және теңсіздіктің сол жағына ауыстырылады.

Демек, сызықтық емес мүшелер үшін келесі теңсіздік орындалады

$$\left|\left(\left(\vec{u}^{\,n+1}\cdot\nabla\right)\vec{u}^{\,n+1}-\left(\vec{u}_h^{\,n+1}\cdot\nabla\right)\vec{u}_h^{\,n+1},\vec{\xi}^{\,n+1}\right)\right| \le \frac{3\gamma}{4}\left\|\vec{\xi}^{\,n+1}\right\|^2$$
$$+C_2\left\|\vec{u}^{\,n+1}\right\|_{H^2}^2\left\|\vec{\xi}^{\,n+1}\right\|^2$$
$$+\frac{1}{\gamma}\left(C_1\left\|\vec{u}^{\,n+1}\right\|_{H^1}^2+C_3\left\|\vec{u}_h^{\,n+1}\right\|_{H^1}^2\right)\left\|\vec{\eta}^{\,n+1}\right\|_{H^1}^2,$$

Уақыт бойынша қалдық:

$$\left|R_t\left(\vec{\xi}^{\,n+1}\right)\right| \le C\Delta t \left\|\vec{\xi}^{\,n+1}\right\| \le \varepsilon \left\|\vec{\xi}^{\,n+1}\right\|^2 + C_4\Delta t^2$$

Оң жақтағы аппроксимациялық мүшелер:

$$\mu\left(\nabla\vec{\eta}^{\,n+1}, \nabla\vec{\xi}^{\,n+1}\right) \le \varepsilon \left\|\nabla\vec{\xi}^{\,n+1}\right\|^2 + C_5\left\|\nabla\vec{\eta}^{\,n+1}\right\|^2$$

$$\left|\theta^{n+1}, div\,\vec{\xi}^{\,n+1}\right| \le \varepsilon \left\|\nabla\vec{\xi}^{\,n+1}\right\|^2 + C_6\|\theta^{n+1}\|^2$$

Барлық жоғарыдағы бағалауларды біріктірсек және кеуек ортадағы мүшесін ескерсек

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2\Delta t}\left(\left\|\vec{\xi}^{\,n+1}\right\|^2 - \left\|\vec{\xi}^{\,n}\right\|^2\right) + \frac{1}{2\Delta t}\left\|\vec{\xi}^{\,n+1} - \vec{\xi}^{\,n}\right\|^2 + \mu\left\|\nabla\vec{\xi}^{\,n+1}\right\|^2 \\
&-\frac{C_2}{\gamma}\left\|\vec{u}^{\,n+1}\right\|_{H^2}^2 \left\|\vec{\xi}^{\,n+1}\right\|_{H^1}^2 + k\left\|\vec{\xi}^{\,n+1}\right\|^2 \le \varepsilon\left\|\vec{\xi}^{\,n+1}\right\|^2 + \qquad (1.69)\\
&C_4\Delta t^2 + \varepsilon\left\|\nabla\vec{\xi}^{\,n+1}\right\|^2 + C_5\left\|\nabla\vec{\eta}^{\,n+1}\right\|^2 + \varepsilon\left\|\nabla\vec{\xi}^{\,n+1}\right\|^2 + C_6\|\theta^{n+1}\|^2 \\
&+\frac{3\gamma}{4}\left\|\vec{\xi}^{\,n+1}\right\|^2 + \frac{1}{\gamma}\left(C_1\left\|\vec{u}^{\,n+1}\right\|_{H^1}^2 + C_3\left\|\vec{u}_h^{\,n+1}\right\|_{H^1}^2\right)\left\|\vec{\eta}^{\,n+1}\right\|_{H^1}^2 \\
&+ k\left\|\vec{\eta}^{\,n+1}\right\|^2 + k\left\|\vec{\xi}^{\,n+1}\right\|^2
\end{aligned}$$

Навье-Стокс теңдеулері үшін ақырлы элементтер әдісіне арналған жұмыстарда энергетикалық бағалаулар $\|\nabla\vec{u}\|$ түрінде жазылады, ал бұл H^1 кеңістігіндегі нормалға эквивалент.

Жоғарыдағы теңсіздіктің сол жағындағы оң $\left\|\vec{\xi}^{\,n+1} - \vec{\xi}^{\,n}\right\|^2$ мүшені алып тастасақ теңсіздік күшейеді және келесі ықшам түрде жазылады.

$$\begin{aligned}
&\left\|\vec{\xi}^{\,n+1}\right\|^2 - \left\|\vec{\xi}^{\,n}\right\|^2 + 2\Delta t\left(\mu - \frac{C_2}{\gamma}\left\|\vec{u}^{\,n+1}\right\|_{H^2}^2\right)\left\|\vec{\xi}^{\,n+1}\right\|_{H^1}^2 + 2\Delta t k\left\|\vec{\xi}^{\,n+1}\right\|^2 \\
&\le C_7\Delta t\left\|\vec{\xi}^{\,n+1}\right\|^2 + C_8\Delta t\left(\left\|\vec{\eta}^{\,n+1}\right\|^2 + \|\theta^{n+1}\|^2\right) - 2\Delta t k\left\|\vec{\xi}^{\,n}\right\|^2 + C_9\Delta t^3.
\end{aligned}$$

Теңсіздіктің оң жағында интерполяциялық қателігі бар мүшелерді біріктірейік

$$C_8\Delta t\left\|\vec{\boldsymbol{\eta}}^{\,n+1}\right\|^2-2k\Delta t\left\|\vec{\boldsymbol{\eta}}^{\,n+1}\right\|^2=(C_8-2k)\Delta t\left\|\vec{\boldsymbol{\eta}}^{\,n+1}\right\|^2.$$

Бұл мүшенің коэффициентін $C=max\{C_8,|C_8-2k|\}$ жаңа константаны енгізу арқылы оң жасайық,

онда

$$(C_8-2k)\Delta t\left\|\vec{\boldsymbol{\eta}}^{\,n+1}\right\|^2\le C\Delta t\left\|\vec{\boldsymbol{\eta}}^{\,n+1}\right\|^2.$$

Сондықтан (1.69) теңсіздігі келесі түрде жазылады

$$\left\|\vec{\boldsymbol{\xi}}^{\,n+1}\right\|^2-\left\|\vec{\boldsymbol{\xi}}^{\,n}\right\|^2+2\Delta t\left(\mu-\frac{C_2}{\gamma}\left\|\vec{\boldsymbol{u}}^{\,n+1}\right\|_{H^2}^2\right)\left\|\vec{\boldsymbol{\xi}}^{\,n+1}\right\|_{H^1}^2+2\Delta tk\left\|\vec{\boldsymbol{\xi}}^{\,n+1}\right\|^2$$
$$\le C_7\Delta t\left\|\vec{\boldsymbol{\xi}}^{\,n+1}\right\|^2+C\Delta t\left(\left\|\vec{\boldsymbol{\eta}}^{\,n+1}\right\|^2+C_8\Delta t\|\theta^{n+1}\|^2\right)+C_9\Delta t^3.$$

Енді $\left\|\vec{\boldsymbol{\xi}}^{\,n+1}\right\|_{H^1}^2$ −дің алдындағы коэффициент

$$\mu-\frac{C_2}{\gamma}\left\|\vec{\boldsymbol{u}}^{\,n+1}\right\|_{H^2}^2\ge 0, \tag{1.70}$$

деп, сол жақтағы оң мүшелерді алып тастасақ

$$\left\|\vec{\boldsymbol{\xi}}^{\,n+1}\right\|^2-\left\|\vec{\boldsymbol{\xi}}^{\,n}\right\|^2+C_0\Delta t\left\|\vec{\boldsymbol{\xi}}^{\,n+1}\right\|^2\le C\Delta t\left\|\vec{\boldsymbol{\eta}}^{\,n+1}\right\|^2+C_8\Delta t\|\theta^{n+1}\|^2+C_9\Delta t^3.$$

мұндағы

$$C_0=2k-C_7>0 \tag{1.70^1}$$

соңғы теңсіздікті келесі түрде жазайық

$$(1+C_0\Delta t)\left\|\vec{\boldsymbol{\xi}}^{\,n+1}\right\|^2\le\left\|\vec{\boldsymbol{\xi}}^{\,n+1}\right\|^2+C\Delta t\left(\left\|\vec{\boldsymbol{\eta}}^{\,n+1}\right\|^2+\|\theta^{n+1}\|^2\right)+C_9\Delta t^3.$$

Бұл теңсіздікке бәсеңдеуі бар Гронуолл леммасының дискреттік аналогын қолдануға болады. Теңсіздікте $(1+C_0\Delta t)-$ға бөсек

$$\left\|\vec{\boldsymbol{\xi}}^{\,n+1}\right\|^2\le\frac{1}{1+C_0\Delta t}\left\|\vec{\boldsymbol{\xi}}^{\,n}\right\|^2+\frac{C\Delta t}{1+C_0\Delta t}\left(\left\|\vec{\boldsymbol{\eta}}^{\,n+1}\right\|^2+\|\theta^{n+1}\|^2\right)+C\Delta t^3. \tag{1.71}$$

$\left\|\vec{\boldsymbol{\xi}}^{\,n}\right\|^2$ −алдындағы коэффициент

$$\frac{1}{1+C_0\Delta t}<1,$$

болғандықтан қателік өспейді, керісінше бәсеңдейді.

Дискретті Гронуолл леммасын қолдансақ

$$\left\|\vec{\xi}^{\,m}\right\|^2 \le e^{-C_0 m\Delta t}\left\|\vec{\xi}^{\,0}\right\|^2 + c\Delta t\sum_{j=1}^{m} e^{-C_0(m-j)\Delta t}\left(\left\|\vec{\eta}^{\,j}\right\|^2 + \left\|\theta^j\right\|^2\right) + C_9\Delta t^2,$$

мұндағы экспоненциалды коэффициенттер

$$e^{-C_0(m-j)\Delta t} \le 1,$$

болғандықтан, бұл бағалаудан келесі бағалау шығады

$$\left\|\vec{\xi}^{\,m}\right\|^2 \le c\left(\left\|\vec{\xi}^{\,0}\right\|^2 + \Delta t\sum_{j=1}^{m}\left(\left\|\vec{\eta}^{\,j}\right\|^2 + \left\|\theta^j\right\|^2\right) + \Delta t^2\right). \qquad (1.72)$$

Жоғарыда көрсетілгендей бұл бағалау қатаң теңсіздіктен шығады. Жоғарыдағы (1.70^1) шарты орындалса, онда қосымша диссипация пайда болады да, орнықтылықты күшейтеді және қателіктің қатаң бағалауын береді.

Барлық бағаларды біріктірсек:

$$\frac{1}{2\Delta t}\left(\left\|\vec{\xi}^{\,n+1}\right\|^2 - \left\|\vec{\xi}^{\,n}\right\|^2\right) + \mu\left\|\nabla\vec{\xi}^{\,n+1}\right\|^2 \le C\left\|\vec{\xi}^{\,n+1}\right\|^2 + C\left\|\vec{\eta}^{\,n+1}\right\|^2 + C\|\theta^{n+1}\|^2 + C\Delta t^2$$

Осыдан:

$$\left\|\vec{\xi}^{\,n+1}\right\|^2 - \left\|\vec{\xi}^{\,n}\right\|^2 \le C\Delta t\left\|\vec{\xi}^{\,n+1}\right\|^2 + C\Delta t\left(\left\|\vec{\eta}^{\,n+1}\right\|^2 + \|\theta^{n+1}\|^2\right) + C\Delta t^3$$

Уақыт бойынша қосып және Гронуоллдың дискретті леммасын қолдансақ:

$$\left\|\vec{\xi}^{\,n+1}\right\|^2 \le C\left(\sum_{k=0}^{n}\Delta t\left(\left\|\vec{\eta}^{\,k+1}\right\|^2 + \left\|\theta^{k+1}\right\|^2\right) + \sum_{k=0}^{n}\Delta t^3\right)$$

Аппроксимация бағалаулары:

$$\left\|\vec{\eta}^{\,n}\right\| \le Ch^2,\ \ \|\theta^n\| \le Ch,$$

Сондықтан

$$\Rightarrow \left\|\vec{\xi}^{\,n}\right\| \le C(h^2 + \Delta t).$$

Толық қателік:

$$\|\vec{e}_u^n\| \le C(h^2 + \Delta t)$$

Теорема 2 (жинақтылық). Егер

$$\vec{u} \in L^\infty\big(0,T;\, H^2(\Omega)\big), \qquad \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} \in L^2\big(0,T;\, H^1(\Omega)\big), \quad k(x,r) \in L^\infty(\Omega)$$

V_h, Q_h кеңістіктері inf-sup шартын қанағаттандырса, ал проекторлар P_h, Π_h, үшін келесі бағалаулар орындалса:

$$\|\vec{u} - P_h\vec{u}\|_{L^2(\Omega)} \le Ch^2,$$
$$\|p - \Pi_h p\|_{L^2(\Omega)} \le Ch,$$

онда жуық шешім үшін келесі бағалау орындалады:

$$\left\|\vec{u}(t^n) - \vec{u}_h^{\,n}\right\| \le C(h^2 + \Delta t)$$

1.6. Ток функциясын анықтау және әлсіз тұжырым

Навье-Стокс-Бринкман теңдеулері үшін қойылған бастапқы және шарттары бар есеп жылдамдық және қысым айнымалыларында шешіледі. Табылған жылдамдық өрісіне сүйене отырып, ток функциясын анықтау қажет. Осьтік симметриялы жағдайда жылдамдық өрісі ток функциясы $\psi(x,r)$ арқылы келесі түрде беріледі:

$$u_r = -\frac{1}{r}\frac{\partial \psi}{\partial x},\; u_x = \frac{1}{r}\frac{\partial \psi}{\partial r} \tag{1.73}$$

Жылдамдық иірімі келесі формуламен анықталады

$$\omega = \frac{1}{r}\left[\frac{\partial(r^2 u_x)}{\partial r} - \frac{\partial(r^2 u_r)}{\partial x}\right]$$

Цилиндрлік координаталарда ток функциясына әсер ететін Лаплас операторы келесі түрде болады

$$\Delta\psi = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial \psi}{\partial r}\right) + \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2}.$$

Жылдамдық иірімі өрнектерін ескере отырып, ток функциясын табуға келесі теңдеуді аламыз

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial \psi}{\partial r}\right) + \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} = \frac{1}{r}\left[\frac{\partial(r^2 u_r)}{\partial r} - \frac{\partial(r^2 u_x)}{\partial x}\right]. \tag{1.74}$$

Шекаралық шарттар

кіріс шекарасы Γ_1: $x = 0,\; 0 < r \le a;\; \psi = \psi_0(r) = 2\left(\frac{r^2}{2} - \frac{r^4}{4a^2}\right)$,

қатты қабырғада Γ_2: $0 \le x \le L,\ r = f(x);\ \psi = const = \frac{1}{2}a^2,$

симметрия осі бойында Γ_3: $0 \le x \le L,\ r = 0,\ \psi = 0,$

шығыс шекарасында Γ_4: $x = L,\ 0 < r \le b,\ \frac{\partial \psi}{\partial x} = 0$ (1.75)

Есептің әлсіз шешімі келесі кеңістікте ізделеді

$$M = \{\psi \in H^1(\Omega)\ \},\qquad M_0 = \left\{v \in H^1(\Omega) :\ \ v|_{\Gamma_1 \cup \Gamma_2} = 0\ \right\}. \tag{1.76}$$

Ток функциясы үшін теңдеуді (1.74) цилиндрлік координаталарда x және r бойынша интегралдаймыз

$$\int_0^L \int_0^{f(x)} \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial \psi}{\partial r}\right)\right) v\, r dr\, dx = \int_0^L \int_0^{f(x)} \left[\frac{\partial(\, r^2 u_r)}{\partial r} - \frac{\partial(\, r^2 u_x)}{\partial x}\right] v\, dr\, dx = \tag{1.77}$$

(1.77) энергетикалық теңдігінің бірінші қосылғышын x бойынша бөліктеп интегралдаймыз

$$\int_0^L \int_0^{f(x)} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} v\, r dr\, dx = \left| \begin{matrix} U = v, & dU = \frac{\partial v}{\partial x} dx \\ dV = \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2}\, dx\ , & V = \frac{\partial \psi}{\partial x} \end{matrix} \right| = \tag{1.78}$$

$$= \int_0^{f(x)} \left[\, \frac{\partial \psi}{\partial x} v\right]_0^L r dr - \int_0^L \int_0^{f(x)} \frac{\partial \psi}{\partial x}\, \frac{\partial v}{\partial x} r dx dr$$

(1.77)-ның екінші қосылғышын r бойынша бөліктеп интегралдаймыз

$$\int_0^L \int_0^{f(x)} \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial \psi}{\partial r}\right) v\, r dr\, dx = \left| \begin{matrix} U = v, & dU = \frac{\partial v}{\partial r} dr \\ dV = \frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial \psi}{\partial r}\right) dr\ , & V = r\frac{\partial \psi}{\partial r} \end{matrix} \right| = \tag{1.79}$$

$$= \int_0^L \left[r\frac{\partial \psi}{\partial r} v\, \right]_0^{f(x)} dx - \int_0^L \int_0^{f(x)} \frac{\partial \psi}{\partial r}\, \frac{\partial v}{\partial r} r dx dr$$

Жоғарыдағы (1.78) ,(1.79) және (1.77)- формулаларынан ток функциясын табуға арналған есептің әлсіз тұжырымын аламыз

$$-\int_{\Omega}\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\,\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial\psi}{\partial r}\,\frac{\partial v}{\partial r}\right)r\,dr\,dx$$
$$=\int_{0}^{L}\int_{0}^{f(x)}\left[\frac{\partial(r^2u_x)}{\partial r}-\frac{\partial(r^2u_r)}{\partial x}\right]v\,dr\,dx \qquad (1.80)$$

1.7 Геометриясы күрделі облыстағы Навье-Стокс-Бринкман теңдеулеріне қойылған (1.11)-(1.15) есебін FEniCS есептеу платформасында ақырлы элементтер әдісімен сандық жүзеге асыру

Бастапқы параметрлер: Есептеу облысының ұзындығы $L=4$, ені a=2-ден b=0.5-ке дейін өзгереді. Диффузоры бар ұзын қисық сызықты канал.

Есептеу дәлдігі $\varepsilon = 1\times10^{-3}$, уақыт бойынша қадам $\tau = 5\times10^{-2}$.

Есептеу облысындағы тордың қадамдарын тығыздығы арқылы және $(M\times N)$ түйіндер саны арқылы анықтаймыз

Жоғарғы шекараның қисық теңдеуі

$$x_2=\frac{b+a}{2}+\frac{b-a}{2}thR_s(x_1-x_1^0)=f_1(x_1),\quad 0\le x_1\le x_1^*, \qquad (1.81)$$
$$x_2=f(x_1^*),\qquad x_1^*\le x_1\le x_{1L}$$

мұндағы параметрлер a, b, R_s.
кіріс шекарасындағы u_x және ψ үшін

$$u_x(0,r,t)=2\left(1-\frac{r^2}{a^2}\right),$$

Ағын энергиясын сақтай отырып, бастапқы жылдамдық өрісін анықтау
Ағымдағы x кезіндегі арна радиусы

$$R=\frac{b+a}{2}+\frac{b-a}{2}th\big(R_s(x-x_0)\big).$$

оның x бойынша туындысы $\frac{dR}{dx}$

$$\frac{dR}{dx}=\frac{b-a}{2}R_s[1-th^2(R_s(x-x_0))]$$

Энергияны сақтай отырып осьтік жылдамдықты келесі формуламен анықтаймыз

$$u_x(x,r)=\frac{Ua^2}{R^2(x)}\left(1-\frac{r^2}{R^2(x)}\right),$$

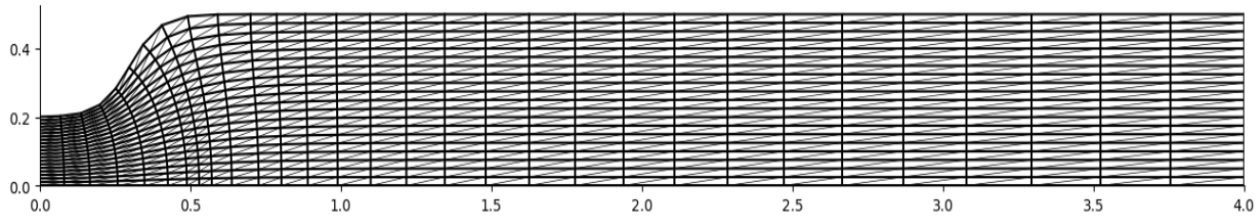
Радиалдық жылдамдық келесі формуламен анықтаймыз

$$u_r(x,r) = -\frac{r}{R(x)}\,\frac{dR}{dx}\,u_x(x,r).$$

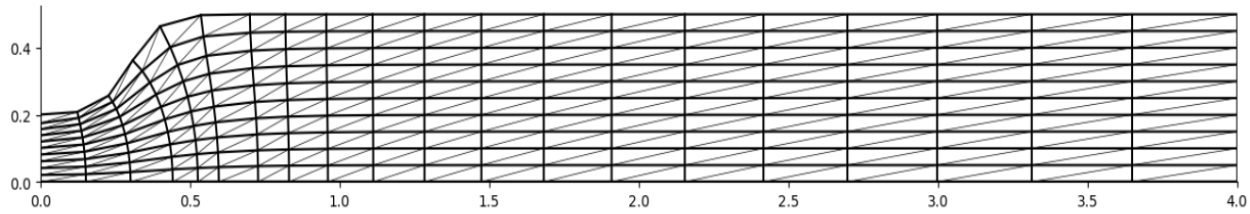
Қысым сызықтық функция түрінде беріледі

$$p = p_{in} + (p_{out} - p_{in})\frac{x}{L},\ p_{in} = 1, p_{out} = 0.$$

Ω облысында (1.3–1.4-суреттер) бейімделгіш үшбұрыштық тор құру үшін Ω облысын Ω_1 және $\Omega_2 \cup \Omega_3$ ішкі облыстардың бірігуі түрінде қарастырамыз.

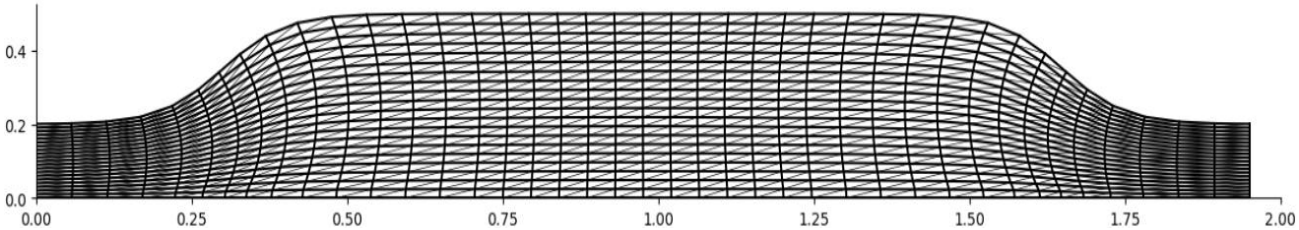


(a)

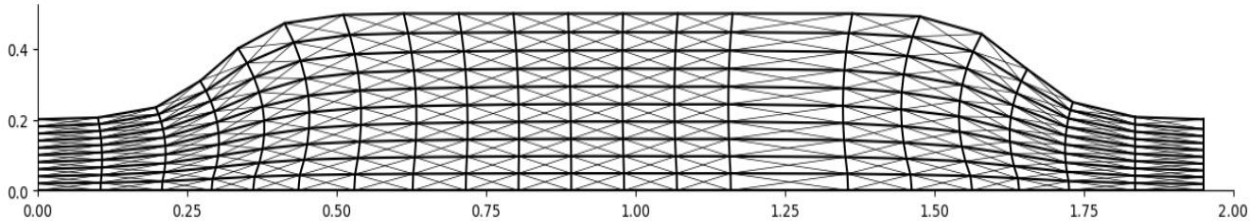


(b)

1.3 – сурет. Есептеу облысында өлшемі 41×21 және 21×11 болатын үшбұрыштық тор

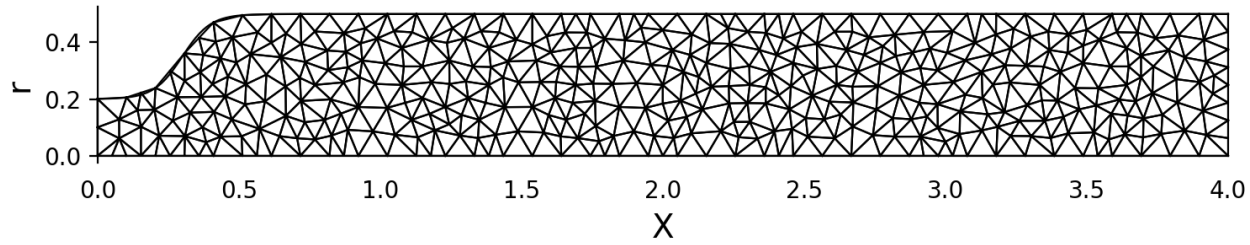


(a)

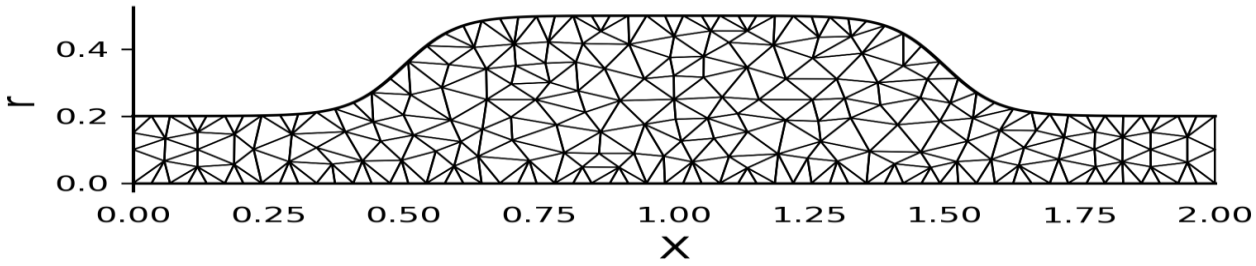


(b)

1.4–сурет. Есептеу облысында өлшемі 41×21 және 21×11 болатын үшбұрыштық тор



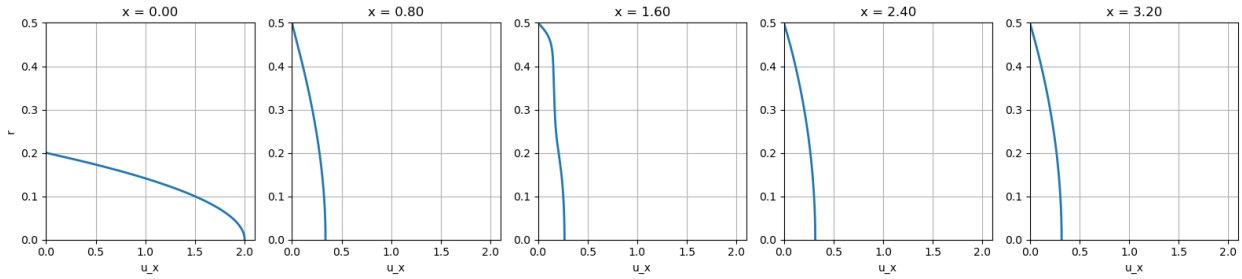
(c)



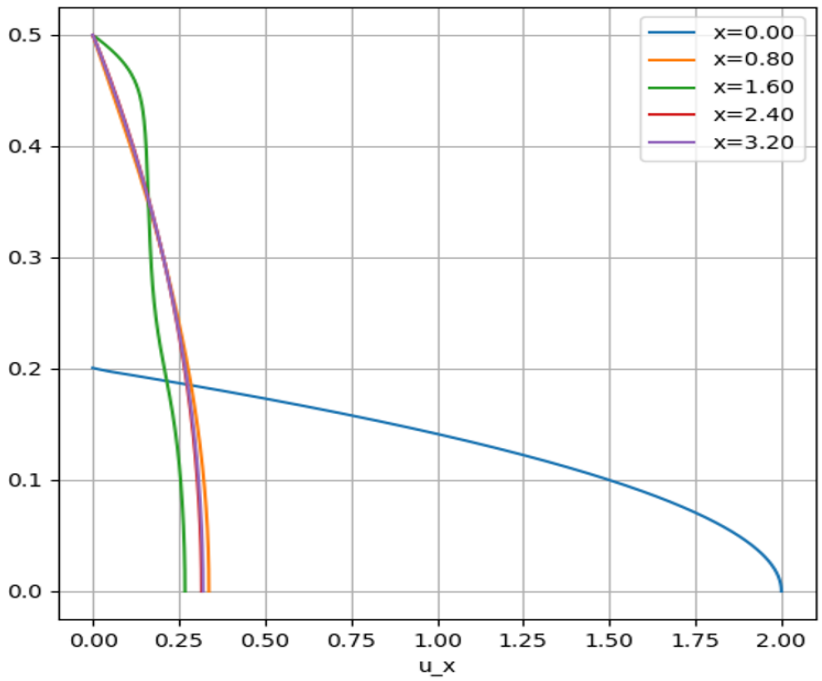
(d)

1.5–сурет. Қисық сызықты шекарасы бар облыста үшбұрышты торлар

1.3–1.5-суреттерде есептеу облысындағы қисықсызықты торлардың әртүрлі түрлері көрсетілген. (a) және (b) суреттерінде эллиптикалық генератор арқылы құрылған құрылымданған тор берілген, ал (c) және (d) суреттерінде FEniCS есептеу платформасындағы meshr тор генераторы арқылы құрылған торлар көрсетілген. Торды құру барысында локалды қоюландыру (refinement) әдісі қолданылды. Нәтижесінде жылдамдық пен қысымның градиенттері жоғары аймақтарда тор элементтері ұсақталды, ал градиенттері аз аймақтарда салыстырмалы түрде ірі тор сақталды. Мұндай тәсіл есептеу ресурстарын тиімді пайдалануға мүмкіндік береді. Ұсынылған әдіс есептеу шығындарын едәуір азайта отырып, ағын сипаттамалары күрт өзгеретін аймақтарда сандық шешімнің дәлдігін арттырады. Әсіресе шекаралық қабаттарда және қысым мен жылдамдықтың үлкен градиенттері бар аймақтарда торды қоюландыру сандық тұрақтылықты қамтамасыз етіп, шешімнің жинақтылығын жақсартады.



(a)



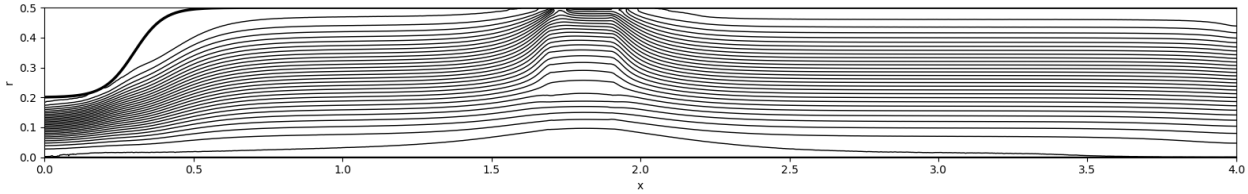
(b)

1.6–сурет. Құбырдың бойлық қималарындағы осьтік жылдамдықтың $u_x(r)$ таралуы

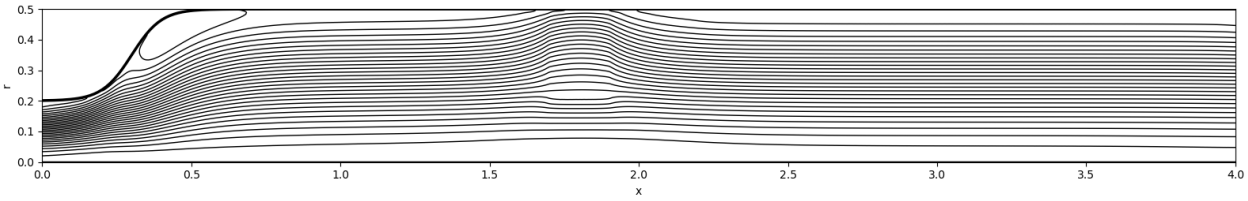
1.6-суретте. Құбырдың әртүрлі бойлық қималарында алынған осьтік жылдамдық $u_x(r)$ профильдері (Re = 100 және $x = 0, 0.8, 1.6, 2.4, 3.2, 4$) болғанда Кіреберісте $x = 0$ жылдамдық профилі параболалық сипатқа ие, бұл шекаралық шарттардың дұрыс қойылғанын көрсетеді. $x = 0.8$ қимасында арна геометриясы мен инерциялық әсерлердің ықпалынан профильдің деформациясы байқалады. $x = 1.6$ аймағында, яғни кеуекті орта әсерінен, жылдамдық едәуір төмендейді. Кеуекті аймақтан шыққаннан кейін $x = 2.4$ профиль ішінара қалпына келеді. Шығысқа жақын жерде $x = 3.2$ профиль тегістеледі.Сонымен қатар, барлық бойлық қималарда көлемдік шығын шамасы іс жүзінде тұрақты: $Q = 0.12567$. Салыстырмалы қателік кеуекті орта аймағында 0.02% -дан аспайды, ал басқа аймақтарда шамамен 0.0002%-ды құрайды. Бұл нәтижелер сандық есептеудің дұрыстығын және оның орнықтылығын дәлелдейді.

Кеуекті орта үшін *ε(r)* мәні келесі түрде анықталады:

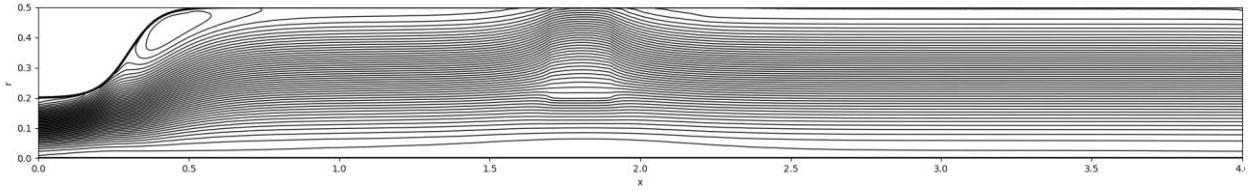
$$m(r) = \begin{cases} 0.4 & \text{болғанда } 0 \le r \le 0.2, \\ \dfrac{100r^2 + 59}{210} & \text{болғанда } 0.2 \le r \le 0.5\,. \end{cases}$$



1.7–сурет. Тоқ функциясы, Рейнольдс саны Re=100, шешімнің есептеу дәлдігі $\varepsilon = 10^{-5}$, уақыт қадамы $\tau = 0.001$, есептеу торының тығыздығы 350



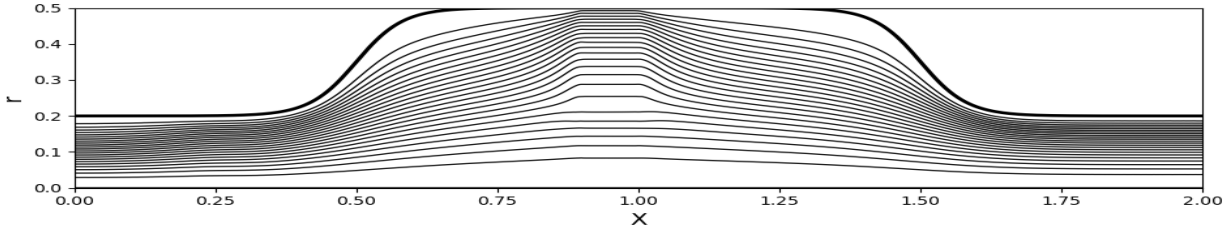
1.8–сурет. Тоқ функциясы, Рейнольдс саны Re=1000, шешімнің есептеу дәлдігі $\varepsilon = 10^{-5}$, уақыт қадамы $\tau = 0.001$, есептеу торының тығыздығы 350



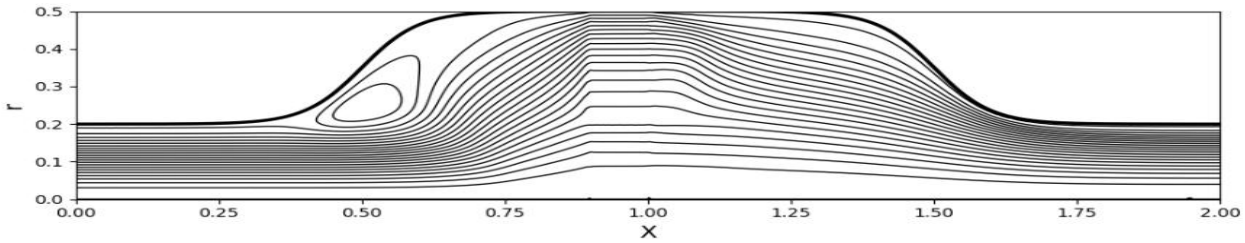
1.9–сурет. Тоқ функциясы, Рейнольдс саны Re=2000, шешімнің есептеу дәлдігі $\varepsilon = 10^{-5}$, уақыт қадамы $\tau = 0.001$, есептеу торының тығыздығы 350

1.7 – 1.9 суреттерде Re = 100, Re = 1000, Re = 2000 мәндері үшін ток функциясының изосызықтарының өзгерісі көрсетілген. Суреттен көрінгендей, кеуекті ортаның кедергісі әсерінен Рейнольдс саны артқан сайын циркуляциялық аймақтың өлшемі ұлғаяды. Циркуляциялық аймақтың ортасында Re = 100, ψ_{max}=2.06610e-02 ал Re = 1000 кезінде ψ_{max}=2.079762e-02, ал Re = 2000, ψ_{max}=2.080102e-02 болады. Бұл мәндер циркуляциялық аймақтың одан әрі ұлғаюын және жылдамдық градиенттерінің күшеюін көрсетеді. Ағын айқынырақ құйындық құрылымға ие болып, ток функциясының максимал мәні ψ_{max}=2.086102e-02 -ке жетеді. Осылайша, Рейнольдс санының өсуі циркуляциялық қозғалыстың қарқындылығының артуына және құйындық құрылымдардың кеңеюіне әкеледі, бұл жүйеде инерциялық әсерлердің күшейетінін көрсетеді.

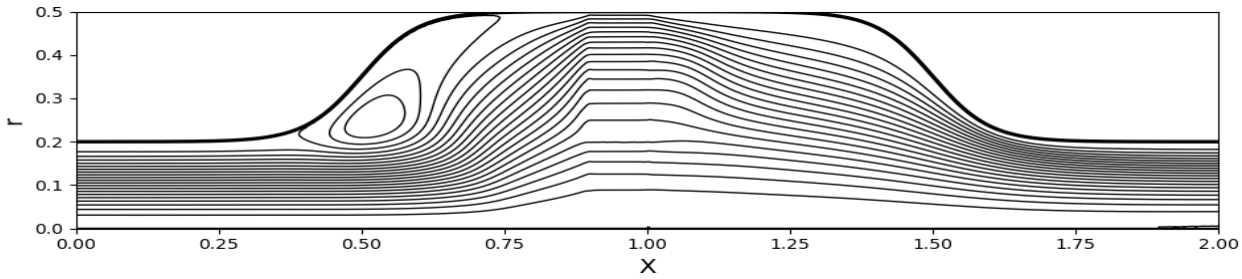
Катализатордың жоғарғы бөлігі арқылы өтетін сұйықтық:



1.10–сурет. Тоқ функциясы, Рейнольдс саны Re=100, шешімнің есептеу дәлдігі $\varepsilon = 10^{-5}$, уақыт қадамы $\tau = 0.001$, есептеу торының тығыздығы 350



1.11–сурет. Тоқ функциясы, Рейнольдс саны Re=1000, шешімнің есептеу дәлдігі $\varepsilon = 10^{-5}$, уақыт қадамы $\tau = 0.001$, есептеу торының тығыздығы 350



1.12–сурет. Тоқ функциясы, Рейнольдс саны Re=2000, шешімнің есептеу дәлдігі $\varepsilon = 10^{-5}$, уақыт қадамы $\tau = 0.001$, есептеу торының тығыздығы 350

1.10-1.12-суреттер Re = 100, 1000 және 2000 үшін ток функциясының изосызықтарының өзгеруін көрсетеді. Рейнольдс саны артқан сайын айналым аймағының ауданы артады. Re = 100, ψ_{max}=2.00103e-02, Re = 1000, ψ_{max}= 2.28479e-02 және Re = 2000, ψ_{max}= 2.469238e-02. Бұл инерциялық әсерлердің жоғарылауын және ағын айналымының қарқындылығының жоғарылауын көрсетеді.

Нәтижелерді талдау:

1.1–кестеден көріп отырғанымыздай, ψ_{max} мәні Рейнольдс саны артқан сайын артады. 1.1–кестеден көріп отырғанымыздай, ψ_{max} мәні Рейнольдс саны артқан сайын артады.

1.1-кесте жалпы есептеу уақыты t=0.2 болған кездегі есептеу торының тығыздығы (350, 450) параметрінің әртүрлі мәндері үшін тордың жинақталуын зерттеу.

Re	$\boldsymbol{x}$	$\boldsymbol{r}$	$\boldsymbol{\psi_{max}}$	**время**
Есептеу торының тығыздығы 350				
100	0.415532	0.4166509	2.06710e-02	1870 секунд
500	0.423376	0.416509	2.071623e-02	2350 секунд
1000	0.423376	0.476562	2.079762e-02	2500.75 секунд
2000	0.427458	0.424558	2.080102e-02	4476.75 секунд

Есептеу торының тығыздығы 450				
100	0.419857	0.410463	2.04183e-02	1975 секунд
500	0.433376	0.416509	2.065964e-02	2150 секунд
1000	0.423376	0.476562	2.0757e-02	3512 секунд
2000	0.427458	0.424558	2.079893e-02	4576секунд

Re=100–2000 аралығында Рейнольдс саны артқан сайын ток функциясының max мәні біртіндеп өсетіні байқалады. Бұл циркуляциялық қозғалыс қарқындылығының артуымен түсіндіріледі. Re ұлғайған сайын конвективтік мүше тұтқырлық мүшеден басым бола бастайды, соның нәтижесінде құйын аймағы кеңейіп, ψ_{max} максимал мәні артады.

Тығыздығы 350 және 450 болатын торларда алынған ψ_{max}, мәндерін салыстыру олардың айырмашылығы 10^{-7}-10^{-8}-ден аспайтынын көрсетеді, бұл есептеулердің машиналық дәлдігіне сәйкес келеді. Бұл нәтиже шешімнің торға тәуелсіздігін және зерттеліп отырған параметрлер диапазонында оның сандық жинақтылығын дәлелдейді. Торды әрі қарай қоюландыру ағын сипаттамаларына елеулі өзгеріс енгізбейді.

Жуық шешім мен әлсіз ерітінді арасындағы айырмашылық, Рейнольдс саны Re=100, тор 41 ×21.

1.2 кесте:

$\|u_{r\mathrm{FEM}} - u_{r\mathrm{FDM}}\|_{L_2}$	ψ_{max}(FEM)	ψ_{max}(FDM)	$\|u_{x\mathrm{FEM}} - u_{x\mathrm{FDM}}\|_{L_2}$	$\|\psi_{\mathrm{FEM}} - \psi_{\mathrm{FDM}}\|_{L_2}$	Время (FEM)	Время (FDM)
1.4242095	2.041621e-02	2.231e-02	0.22465	0.0059324	353	1062

Норма мына формула бойынша есептеледі:

$$\|u_{x\mathrm{FEM}} - u_{x\mathrm{FDM}}\|_{L_2} = \left(\sum_{i=1}^{41} \sum_{j=1}^{21} \left(u_{x\mathrm{FEM},i,j} - u_{x\mathrm{FDM},i,j}\right)^2 r_j h_1 h_2 \right)^{1/2}$$

Әртүрлі әдістермен алынған сандық шешімдерді салыстыру.

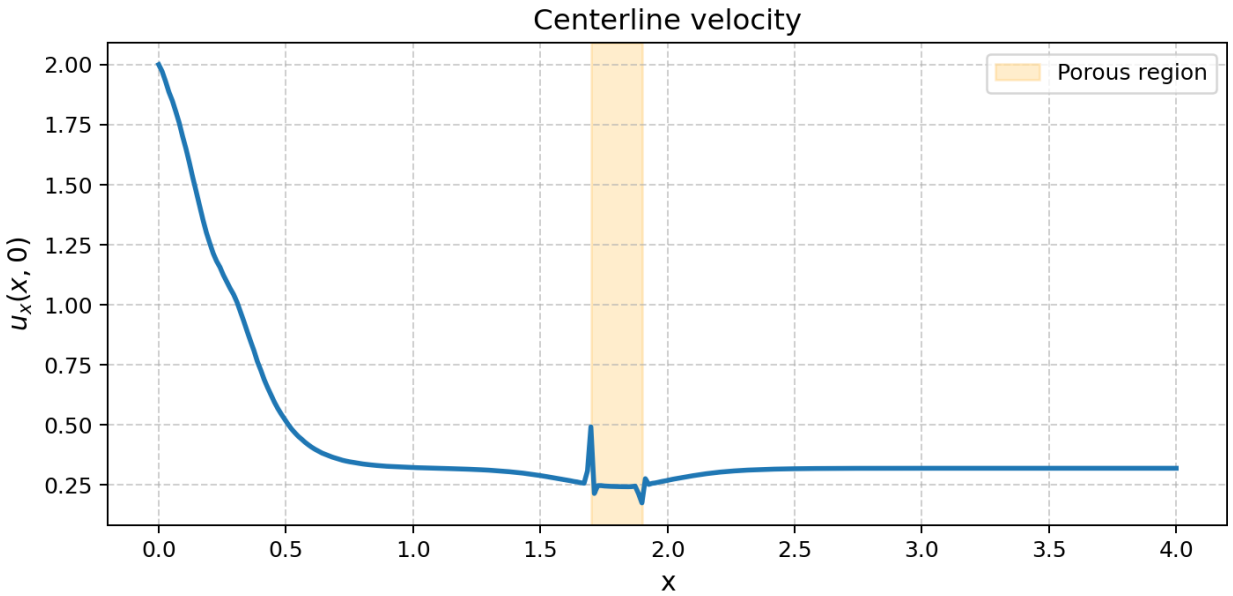
$$\|u_{r\mathrm{FEM}} - u_{r\mathrm{FDM}}\|_{L_2} = \left(\sum_{i=1}^{41} \sum_{j=1}^{21} \left(u_{r\mathrm{FEM},i,j} - u_{r\mathrm{FDM},i,j}\right)^2 r_i h_1 h_2 \right)^{1/2} \quad (1.82)$$

$$\|\psi_{\mathrm{FEM}} - \psi_{\mathrm{FDM}}\|_{L_2} = \left(\sum_{i=1}^{41} \sum_{j=1}^{21} \left(\psi_{\mathrm{FEM},i,j} - \psi_{\mathrm{FDM},i,j}\right)^2 r_j h_1 h_2 \right)^{1/2}$$

Мұндағы ψ_{FDM}- Re=100 кезіндегі [56] жұмыста алынған ток функциясының эталондық мәні, ал ψ_{FEM}- әлсіз ақырлы-элементтік тұжырым негізінде есептелген тоқ функциясының сандық мәні, сол Рейнольдс санымен

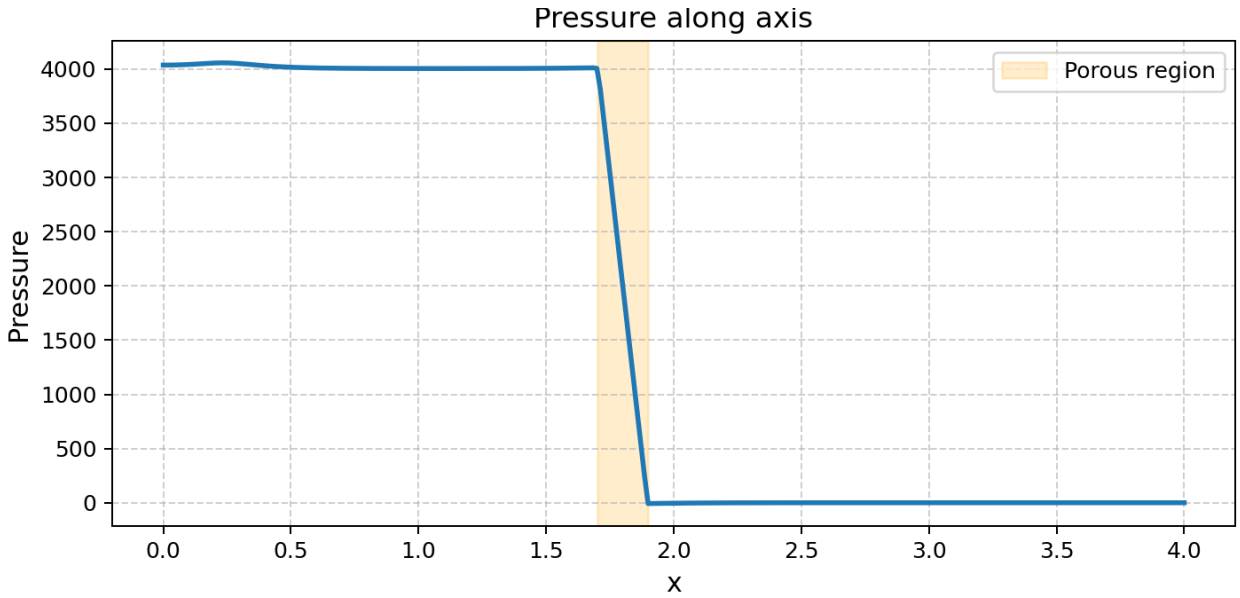
есептелген. h_1, h_2- параметрлері координаталық бағыттар бойынша кеңістіктік дискреттеу қадамдарын білдіреді.

Ақырлы элементтер әдісімен алынған нәтижелер ақырлы айырмалар әдісімен алынған нәтижелермен жақсы сәйкес келеді. Атап айтқанда, ψ_{max} ток функциясының мәндері арасындағы айырмашылық өте аз, бұл сандық шешімнің дұрыстығын растайды. ал Эталондық мәндерімен салыстырғанда осьтік жылдамдықтың u_x және радиалдық жылдамдықтың u_r компоненттері үшін ауытқулар салыстырмалы түрде аз.



1.13-сурет құбырдың осі бойынша осьтік жылдамдықтың u_x (x,0) таралуы

1.13-суретте құбырдың осі бойынша осьтік жылдамдықтың $u_x(x,0)$ таралуы көрсетілген. Бастапқы аймақта жылдамдық максималды болады және арнаның кеңеюіне қарай азаяды, бұл ағын жылдамдығының сақталу заңына сәйкес келеді. $x \approx 1.7 - 1.9$ диапазонында кеуекті аймақ (түспен ерекшеленген) орналасқан. Бұл аймақта жылдамдықтың қосымша төмендеуі және Дарси әсерінен болатын шамалы ауытқулар байқалады.



1.14-суретте құбырдың осі бойымен қысымның $p(x,0)$ таралуы көрсетілген.

Құбырдың бастапқы бөлігінде қысым тұрақты күйдегі ағынға сәйкес келетін іс жүзінде тұрақты болып қалады. Кеуекті аймаққа сәйкес $x \approx 1.7 - 1.9$ аймағында қысымның күрт төмендеуі байқалады. Бұл Дарси заңымен сипатталған қосымша гидравликалық кедергіге байланысты. Кеуекті аймақтан шыққаннан кейін қысым төменгі деңгейде тұрақтанады, бұл жаңа ағын режимінің қалыптасуын көрсетеді.

1.8 1-ші бөлім бойынша қорытынды

Бұл жұмыста кеуекті ортадағы тұтқыр сығылмайтын сұйықтықтың ағынын сипаттайтын цилиндрлік координаттар жүйесіндегі Навье-Стокса-Бринкман теңдеулері үшін бастапқы-шеттік есептің әлсіз қойылымы қарастырылған. Есеп осьтік симметриялы жағдай үшін вариациялық түрде тұжырымдалған, ал әлсіз шешім Соболев кеңістігінде анықталған; энергетикалық әдіс негізінде шешімнің орнықтылығын қамтамасыз ететін априорлық бағалау алынды. Сандық іске асыру FEniCS есептеу платформасында ақырлы элементтер әдісі арқылы орындалды.

Жүргізілген есептеулер Рейнольдс санының артуымен ψ_{max} ток функциясының максималды мәнінің өсуін көрсетті, бұл инерциялық эффектілердің күшеюі және циркуляция аймақтарының кеңеюімен байланысты. $\mathrm{Re} > 2000$ болғанда, қосымша тұрақтандыруды қолданбай-ақ итерациялық процестің жинақтылығы сақталатыны анықталды, бұл конвективті мүшелер басым болған жағдайда да қолданылған сандық сұлбаның орнықтылығын айғақтайды. Алынған нәтижелер ағынның физикалық табиғатымен сәйкес келеді және вариациялық қойылымның дұрыстығын, сондай-ақ қарастырылып отырған тәсілдің кеуекті ортадағы ағындарды модельдеуге жарамдылығын жанама түрде растайды.

Сонымен қатар, торды генерациялау параметрінің әртүрлі мәндері (тығыздығы 350 және 450) үшін тордың жинақталуын талдау жүргізілді.

Алынған нәтижелер дискреттеу дәрежесі артқан сайын ψ_{max} мәнінің тұрақтануын көрсетеді. Тығыздығы 350 және 450 торларда алынған шешімдердің арасындағы айырмашылық мардымсыз, бұл сандық шешімнің торға тәуелсіздігіне қол жеткізілгенін және ақырлы элементтер әдісі негізіндегі схеманың тұрақтылығын растайды.

Цилиндрлік координаттардағы осьтік симметриялық ағын үшін жылдамдықтың иірімі ω өрнегі алынды. Бұл өрнек цилиндрлік координаттар жүйесінің геометриялық ерекшеліктерін ескереді және ағын құрылымын дәл сипаттауға мүмкіндік береді. Сонымен қатар, интегралдық түрде қарастырғанда, ол Лаплас операторымен үйлеседі және сұйықтықтың үздіксіздік шартын қанағаттандырады.

Ақырлы элементтер әдісі мен құрылымдалған тордағы ақырлы айырымдар әдісін қолдану арқылы алынған нәтижелерге салыстырмалы зерттеу жүргізілді. Шешімдердің жақсы үйлесімділігі көрсетілген, бұл сандық іске асырудың дұрыстығын және алынған нәтижелердің сенімділігін растайды.

2. Күрделі геометриялық облыстарда ортогоналды қисық сызықты торларды құру әдістері

2.1. Қисық сызықты ортогоналды торды құру

Ортогоналды тор құру - күрделі геометриялық аймақтарда (әсіресе иілген шекаралы аймақтарда) гидродинамикалық теңдеулерді сандық түрде шешу үшін арнайы жасалатын тордың бір түрі. Мұндай торлардағы сызықтар өзара тік бұрыштармен қиылысып, есептеулерді жеңілдетіп, шешімнің дәлдігін арттыруға көмектеседі.

Екі өлшемді декарттық координаталар жүйесінде Ω бір тұтас аймақты $\Omega_1 \cup \Omega_2 \cup \Omega_3$ осы үш қосалқы аймақтарға бөліп аламыз, Ω_1 аймақ үшін ортогональды қисық сызықты торды төмендегі дифференциялдық теңдеуді қолданып есептейміз [6],[56] ($g_{12} = 0$,) болғанда:

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial q_1}\left(\sqrt{\frac{g_{11}}{g_{22}}}\,\frac{\partial x_1}{\partial q_1}\right) + \frac{\partial}{\partial q_2}\left(\sqrt{\frac{g_{22}}{g_{11}}}\,\frac{\partial x_1}{\partial q_2}\right) = 0 \\ \frac{\partial}{\partial q_1}\left(\sqrt{\frac{g_{11}}{g_{22}}}\,\frac{\partial x_2}{\partial q_1}\right) + \frac{\partial}{\partial q_2}\left(\sqrt{\frac{g_{22}}{g_{11}}}\,\frac{\partial x_2}{\partial q_2}\right) = 0 \end{cases} \qquad (2.1)$$

Жоғарғы шекарада Ω_1 координаталық тордың түйіндері қисық доғаның ұзындығы бойынша сандық параметрлеуге сәйкес таңдалады [6]. Ол үшін келесі дифференциалдық теңдеу сандық түрде шешіледі.

$$\frac{\partial x_1}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial q_1}\left(\Phi \frac{\partial x_1}{\partial q_1}\right)$$

мұнда

$$\Phi = \sqrt{1 + \left(\frac{df(x_1)}{dx_1}\right)^2} \qquad (2.2)$$

$\Omega_2 \cup \Omega_3$ ішкі аймақтың жоғарғы шекарасында Ω_1ішіндегі қисық сызықты торға сәйкес келетін біркелкі емес тікбұрышты тор салынады. Өріс контурының қалған бөлігінде Ω_1теңдеулер үшін шекаралық шарттар (2.3) келесі түрде есептеледі:

$$\begin{aligned} &x_1 = 0,\ \frac{\partial x_2}{\partial q_1} = 0, \qquad \text{болғанда } q_1 = 0,\ 0 \le q_2 \le 1, \\ &\frac{\partial x_1}{\partial q_2} = 0,\ x_2 = 0, \quad \text{болғанда } 0 \le q_1 \le 1,\ q_2 = 0, \\ &x_1 = x_{1,L}, \qquad \frac{\partial x_2}{\partial q_1} = 0, \quad \text{болғанда } q_1 = 1, 0 \le q_2 \le 1. \end{aligned} \qquad (2.3)$$

2.2 Ортогоналды қисық сызықты тор құру алгоритмі

Бастапқы параметрлерді береміз, олар:

a=0.2,b=0.5, $x_1^0 = 0.3$, $x_1^* = 0.7, x_{1L} = 4, q_1^*$=0.35, $x_{xop} = 1.65$, R=10, $\varepsilon = 1 \times 10^{-3}$, M=21, N =41, $\tau = 5 \times 10^{-2}$, қадамдары $h_1 = \frac{1}{M-1}$, $h_2 = \frac{1}{N-1}$ болсын.

Алғашқы жуықтау $x_{1i,M-1} = i * \frac{x_1^*}{k-1}$, $k = 1,..,N$

Шекара пішінін тегіс және біртіндеп өзгеретін қисық түрінде сипаттау үшін:

$$\begin{aligned} x_2 = \frac{b+a}{2} + \frac{b-a}{2} thR_s(x_1 - x_1^0) = f_1(x_1), \quad 0 \le x_1 \le x_1^*, \\ x_2 = f(x_1^*), \qquad x_1^* \le x_1 \le x_{1L} \end{aligned} \qquad (2.4)$$

$b, a, R_s -$ параметрлері, x_1^0 −қисықтың орталық нүктесі.

мұнда гиперболалық тангенс $thx = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$, $f_1(x_1)$ — берілген қисықтың теңдеуі, $\Phi(x_1) = \sqrt{1 + \left(\frac{df(x_1)}{dx_1}\right)^2}$- доғаның ұзындығы.

$\sqrt{1 + \left(\frac{df(x_1)}{dx_1}\right)^2}$-Пифагор теоремасына негізделген, горизонталь және вертикаль компоненттердің векторлық қосындысын анықтайды.

(2.4) теңдеудің туындысын аламыз

$$f_1'(x_1) = \frac{d}{dx_1}\left[\frac{b+a}{2} + \frac{b-a}{2} thR_s(x_1 - x_1^0)\right] = \frac{b-a}{2} R_s\, sech^2\,(R_s(x_1 - x_1^0)) \qquad (2.5)$$

мұндағы $sech(x) = \frac{2}{e^{x}+e^{-x}}$, $sech^2(x) = \left(\frac{2}{e^{x}+e^{-x}}\right)^2$ бұл теңдеулер шекараның көлбеу бұрышының өзгеруін сипаттайды.

Берілген $f_1(x_1)$ функциясы шекараның пішінін тегіс және біртіндеп өзгеретін қисық түрінде сипаттайды. Бұл функцияның туындысы $f_1{}'(x_1)$ шекара бойындағы көлбеу бұрышының өзгеру заңдылығын, яғни қисық сызықтың геометриялық бейінесін сипаттайды.

Ол келесі аналитикалық өрнекпен берілген:

$$f_1{}'(x_1) = \frac{b-a}{2}\ R_s \frac{4}{\left(e^{R_s(x_1-x_1^0)}+e^{-R_s(x_1-x_1^0)}\right)^2} = \frac{2(b-a)R_s}{\left(e^{R_s(x_1-x_1^0)}+e^{-R_s(x_1-x_1^0)}\right)^2}$$

Жоғардағы теңдеуден қисық бойындағы көршілес тор нүктелері арасындағы геометриялық қашықтықты сипаттайтын x_1 мәнін есептеу үшін қуалау әдісі қолданылады.

$$\Phi(x_1) = \sqrt{1+\left(\frac{df(x_1)}{dx_1}\right)^2} = \sqrt{1+\left(\frac{2(b-a)R_s}{\left(e^{R_s(x_1-x_1^0)}+e^{-R_s(x_1-x_1^0)}\right)^2}\right)^2} \qquad (2.6)$$

Берілген (2.6) теңдеуды пайдаланып, фигураның доғасы бойында тор құру үшін, x_1, x_2 нүктелерінің түйіндерін табамыз. Ол үшін ақырлы айырымдық схеманы құрып, қуалау әдісін қолданып есептеу жүргізіледі[57].

$$\frac{1}{2h_1^2}\left[\Phi_{i+1}\left(x_{i+1}^{n+1}-x_i^{n+1}\right)-\Phi_{i-1}\left(x_i^{n+1}-x_{i-1}^{n+1}\right)\right] = \frac{x_i^{n+1}-x_i^n}{\tau} \qquad (2.7)$$

Теңдеуді түрлендірейік:

$$\frac{\tau\Phi_{i+1}}{2h_1^2}x_{i+1}^{n+1} - \left(\tau\frac{\Phi_{i+1}+\Phi_{i-1}}{2h_1^2}+1\right)x_i^{n+1} + \tau\frac{\Phi_{i-1}}{2h_1^2}x_{i-1}^{n+1} = x_i^n$$

Теңдеуді келесі теңдеулер жүйесіне түрлендіреміз:

$$\mathrm{a_i}x_{i+1}^{n+1} + \mathrm{b_i}x_i^{n+1} + \mathrm{c_i}x_{i-1}^{n+1} = 0 \qquad i = 1,..N-1 \qquad (2.8)$$

Коэффициенттер келесі түрге ие:

$$\mathrm{a_i} = \frac{\tau\,\Phi_{i+1}}{2h_1^2}, \qquad \mathrm{b_i} = \frac{\tau\,\Phi_{i-1}}{2h_1^2}, \ \ \mathrm{c_i} = 1+\mathrm{a_i}+\mathrm{b_i} \qquad (2.9)$$

Сандық шешімді анықтау үшін келесі рекурренттік формула қолданылады:

$$x_i^{n+1} = \alpha_{i+1} x_{i+1}^{n+1} + \beta_{i+1} \tag{2.10}$$

мұнда $\alpha_{i+1}, \beta_{i+1}$ анықталмаған коэффициенттер, осы коэффициенттерді табу үшін (2.10) теңдеуді (2.8) формулаға қоямыз.

Келтірілген теңдеу келесі түрге ие болады:

$$(a_i \alpha_{i-1} + b_i) x_i^{n+1} + a_i \beta_{i-1} + c_i x_{i+1}^{n+1} = 0 \tag{2.11}$$

$$x_i^{n+1} = -\frac{C_i}{b_i + a_i \alpha_{i-1}} x_{i+1}^{n+1} + \frac{x_i^n + b_i \beta_{i+1}}{c_i}$$

(2.11) теңдеу қатынасын пайдалана отырып $\alpha_{i+1}, \beta_{i+1}$ анықталмаған коэффициенттерін табамыз;

$$\alpha_i = -\frac{C_i}{b_i + a_i \alpha_{i-1}}, \tag{2.12}$$

$$\beta_{i+1} = \frac{x_i^n + b_i \beta_{i+1}}{c_i}, \qquad i = 1, .. N-1.$$

Коэффициенттерді табу үшін алғашқы шарттар беріледі: $x_1^0 = 0.3$ және $x_1^* = 0.7$. Осы шарттарды пайдаланып, α_1 мен β_1 мәндерін табамыз, табылған мәндерді пайдалана отырып, қалған $\alpha_{i+1}, \beta_{i+1}$ - коэффициенттерді табамыз, содан кейін x_i^{n+1} мәндерін келесі формула бойынша есептейміз, $x_i^{n+1} = \alpha_{i+1} x_{i+1}^{n+1} + \beta_{i+1}$. Осы формуладан x_i^{n+1} мәндері арқылы, x_i^{n+1} $a_i x_{i+1}^{n+1} + b_i x_i^{n+1} + c_i x_{i-1}^{n+1} = 0$ жалпы формуладан a_i, b_i, c_i, коэффициенттерін анықтаймыз.

Жуықтау үдерісі келесі тұрақтылық шарты орындалғанға дейін жалғасады.

$$\max_{0 \le j \le N} \left| x_{i+1}^{n+1} - x_i^{n+1} \right| < \varepsilon \tag{2.13}$$

Жоғарда біз x_1 нүктелерін есептейміз, ал x_2 нүктелерін келесі формула бойынша табатын боламыз:

$$x_2 = \frac{b+a}{2} + \frac{b-a}{2} tanh R_s \left(x_{1,i,M-1} - x_1^0 \right).$$

мұнда $x_1 = x_{1iM-1}$

$$tanh(R_s(x_1 - x_1^0)) = \frac{e^{R_s(x_{1,i,M-1} - x_1^0)} - e^{-R_s(x_{1,i,M-1} - x_1^0)}}{e^{R_s(x_1 - x_1^0)} + e^{-R_s(x_1 - x_1^0)}} \tag{2.14}$$

$$x_{2,i,M-1} = \frac{b+a}{2} + \frac{b-a}{2} \frac{e^{R_s(x_{1,i,M-1} - x_1^0)} - e^{-R_s(x_{1,i,M-1} - x_1^0)}}{e^{R_s(x_{1,i,M-1} - x_1^0)} + e^{-R_s(x_{1,i,M-1} - x_1^0)}}$$

(2.14) - бұл біздің математикалық модельдегі оң жақ доғаның түйіндері үшін формула болып табылады, ол салмақтың негізін құрайды.

Енді математикалық моделімізге толық торды құру үшін, оң жақ аймақта аналитикалық есептеулер жүргізіп, параболалық жалғастыру әдісін қолданамыз. Параболалық функцияны пайдаланып, тордың түзу сызықты ортаңғы бөлігінің нүктелерін табамыз, ал (x_1^0, x_{1L}) қимасындағы біркелкі емес тор келесі квадрат теңдеуге сәйкес құрастырылады

$$x_1(q_1) = \bar{a}q_1^2 + \bar{b}q_1 + \bar{c}, \;\; q_1^* \le q_1 \le 1$$

$$x_1(1) = x_{1,L},\; x_1(q_1^*) = x_1^*$$

Коэффициенттерді анықтау:

$$\bar{a} = \frac{x_1^* - x_{k-1\,M} - \frac{x_{1L} - x_1^*}{1-q_1^*}h_1}{(q_1^* h_1)^2 - {q_1^*}^2 - h_1 - q_1^* * h_1} \tag{2.15}$$

$$\bar{b} = -\frac{2q_1^*(x_{1L} - x_1^*)}{(1-q_1^*)^2}$$

$$\bar{c} = -\frac{x_{1L} - x_1^*}{(1-q_1^*)^2} + \frac{2q_1^*(x_{1L} - x_1^*)}{(1-q_1^*)^2} + x_{1L},$$

Әрбір $q_1 = (i-1)h_1$ үшін $i = 1,..N$

$$x_{1,i,M-1} = \bar{a}q_1^2 + \bar{b}q_1 + \bar{c},$$

x_1 мәні тұрақты болып беріледі

$$x_{1,i,M-1} = x_{1,k-1,M-1}.$$

Толық торды құру үшін x_1 мен x_2 түйіндері мына формуламен есептеледі:

$$x_{2ij} = \frac{j}{M-1}x_{2,i,M-1}\,, \;\; x_{1,i,j} = x_{1,k-1,M-1}.$$

Модельденген фигураны құрастырғаннан кейін ортогоналды қисықтарды салу үшін қуалау әдісін екі рет жеке-жеке қолданып, есептеулер жүргіземіз.

$$\sqrt{\frac{g_{11}}{g_{22}}}\,\frac{\partial^2 x_1}{\partial q_1^2} + \frac{\partial}{\partial q_2}\left(\sqrt{\frac{g_{22}}{g_{11}}}\,\frac{\partial x_1}{\partial q_2}\right) = 0, \qquad i = 1,2 \tag{2.16}$$

Ω_1 жоғарғы шекарасында $\vec{x} = (x_1, x_2)$ бекітілген мәндері бар $\vec{x} : E \to \Omega$ үшін (2.16) теңдеулердің сандық шешімі (2.17) қанағаттандыратын айырымдық схеманы қолдана отырып, қуалау әдісімен есептеледі [37].

$$\left(E - \tau L_{11}^h\right)\left(E - \tau L_{22}^h\right)\frac{x_\iota^{n+1} - x_\iota^n}{\tau} = L_{11}^h x_\iota^n + L_{22}^h x_\iota^n$$

L_{11}^h, L_{22}^h сәйкес дифференциалдық операторлардың (2.17) айырмашылық аналогтары.

Бірінші бағыттағы жуықтау (q_1бойымен):

$$L_{11}^h(x) = \frac{1}{h_1^2}\left[\left(\sqrt{\frac{g_{22}}{g_{11}}}\right)_{i+1/2,j}\left(x_{i+1,j} - x_{i,j}\right) - \left(\sqrt{\frac{g_{22}}{g_{11}}}\right)_{i-1/2,j}\left(x_{i,j} - x_{i-1,j}\right)\right], \tag{2.17}$$

Екінші бағыттағы жуықтау (q_2 бойымен):

$$L_{22}^h(x) = \frac{1}{h_2^2}\left(\sqrt{\frac{g_{11}}{g_{22}}}\right)_{i,j}\left(x_{i,j+1} - 2x_{i,j} + x_{i,j-1}\right) \tag{2.18}$$

мұнда, $J = \frac{\partial x_1}{\partial q_1}\frac{\partial x_2}{\partial q_2} - \frac{\partial x_1}{\partial q_2}\frac{\partial x_2}{\partial q_1}$, якобиан түрлендіруі.

$g^{km} = \frac{\partial q_k}{\partial x_n}\frac{\partial q_m}{\partial x_n}$ k,m,n=1,2 - контравариантты тензор элементтері және

$g_{km} = \frac{\partial x_n}{\partial q_k}\frac{\partial x_n}{\partial q_m}, k, m = 1,2$ - ковариантты тензор элементтері, тензорлар үшін келесі қатынас орындалады

$$g_{11}\, g_{22} = g_{12}^2 + J^2 .$$

Координаттар жүйесі ортогоналды болғандықтан $g_{12} = g_{21} = 0$ және $J^2 = g_{11}.g_{22}$, сонымен қатар төмендегі өрнектер орындалады.

$$Jg^{11} = \sqrt{\frac{g_{22}}{g_{11}}}\ ,\ Jg^{22} = \sqrt{\frac{g_{11}}{g_{22}}}\ ,\ J = \sqrt{g_{11}g_{22}}\ . \tag{2.19}$$

Төменде оң координаталық бағыт бойынша метрикалық ковариантты тензорлардың ақырлы айырымдық схемалары келтірілген.

$$g_{11} = \left(\frac{\partial x_1}{\partial q_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial x_2}{\partial q_1}\right)^2 = \left(\frac{x_{1,i+1,j} - x_{1,i,j}}{h_1}\right)^2 + \left(\frac{x_{2,i+1,j} - x_{2,i,j}}{h_1}\right)^2 \quad (2.20)$$

$$g_{22} = \left(\frac{\partial x_1}{\partial q_2}\right)^2 + \left(\frac{\partial x_2}{\partial q_2}\right)^2 = \left(\frac{x_{1,i+1,j+1} - x_{1,i+1,j-1} + x_{1,i,j+1} - x_{1,i,j-1}}{4h_2}\right)^2 + \left(\frac{x_{2,i+1,j+1} - x_{2,i+1,j-1} + x_{2,i,j+1} - x_{2,i,j-1}}{4h_2}\right)^2$$

Сол жақ координата бағыты бойынша метрикалық коэффициенттің ақырлы айырымдық формуласы.

$$g_{11} = \left(\frac{x_{1,i,j} - x_{1,i-1,j}}{h_1}\right)^2 + \left(\frac{x_{2,i,j} - x_{2,i-1,j}}{h_1}\right)^2 \quad (2.21)$$

$$g_{22} = \left(\frac{x_{1,i,j+1} - x_{1,i,j-1} + x_{1,i-1,j+1} - x_{1,i-1,j-1}}{4h_2}\right)^2 + \left(\frac{x_{2,i,j+1} - x_{2,i,j-1} + x_{2,i-1,j+1} - x_{2,i-1,j-1}}{4h_2}\right)^2$$

Орталық координата бағыты бойынша метрикалық коэффициент үшін ақырлы айырымдық формуласы

$$g_{11} = \left(\frac{\partial x_1}{\partial q_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial x_2}{\partial q_1}\right)^2 = \left(\frac{x_{1,i+1,j} - x_{1,i-1,j}}{h_1}\right)^2 + \left(\frac{x_{2,i+1,j} - x_{2,i-1,j}}{h_1}\right)^2 \quad (2.22)$$

$$g_{22} = \left(\frac{\partial x_1}{\partial q_2}\right)^2 + \left(\frac{\partial x_2}{\partial q_2}\right)^2 = \left(\frac{x_{1,i,j+1} - x_{1,i,j-1}}{h_2}\right)^2 + \left(\frac{x_{2,i,j+1} - x_{2,i,j-1}}{h_2}\right)^2$$

x_1, x_2 нүктелерін оң жақ координата бағытын пайдаланып келесі түрде есептейміз:

$$\mathrm{A_i}\omega_{1,i+1,j}^{n+1} + \mathrm{B_i}\omega_{1,i,j}^{n+1} + \mathrm{C_i}\omega_{1,i-1,j}^{n+1} = f_i, \qquad i,j = 1,..,N-1$$

$$\frac{1}{h_1^2}\left[\left(\sqrt{\frac{g_{22}}{g_{11}}}\right)_{i+1/2,j}\left(\omega_{1,i+1,j}^{n+1} - \omega_{1,i,j}^{n+1}\right) - \left(\sqrt{\frac{g_{22}}{g_{11}}}\right)_{i-1/2,j}\left(\omega_{1,i,j}^{n+1} - \omega_{1,i-1,j}^{n+1}\right)\right] + \frac{1}{h_2^2}\left(\sqrt{\frac{g_{11}}{g_{22}}}\right)_{i,j}\left(\omega_{1,i,j+1}^{n+1} - 2\omega_{1,i,j}^{n+1} + \omega_{1,i,j-1}^{n+1}\right) = \frac{\omega_{i,j}^{n+1} - \omega_{i,j}^{n}}{\tau} \quad (2.23)$$

$$A_{\mathrm{i}} = \frac{\tau}{h_1^2}\left(\sqrt{\frac{g_{22}}{g_{11}}}\right)_{i+1/2,j},\ \mathrm{B_i} = \frac{\tau}{h_1^2}\left(\sqrt{\frac{g_{22}}{g_{11}}}\right)_{i-1/2,j},\ \mathrm{C_i} = 1 + \mathrm{A_i} + \mathrm{B_i}$$

$$f_i = \frac{1}{h_1^2}\left[\left(\sqrt{\frac{g_{22}}{g_{11}}}\right)_{i+1/2,j}(\omega_{1,i+1,j}^{n+1} - \omega_{1,i,j}^{n+1}) - \left(\sqrt{\frac{g_{22}}{g_{11}}}\right)_{i-1/2,j}\left(\omega_{1,i,j}^{n+1} - \omega_{1,i-1,j}^{n+1}\right)\right] + \frac{1}{h_2^2}\left(\sqrt{\frac{g_{11}}{g_{22}}}\right)_{i,j}\left(\omega_{1,i,j+1}^{n+1} - 2\omega_{1,i,j}^{n+1} + \omega_{1,i,j-1}^{n+1}\right) \tag{2.24}$$

Коэффициент:

$$\alpha_{\mathrm{i}} = \frac{\mathrm{A_i}}{\mathrm{C_i} - \mathrm{B_i}\alpha_{\mathrm{i+1}}}, \qquad i = 1,..,N-1 \tag{2.25}$$

$$\beta_{\mathrm{i+1}} = \frac{\mathrm{f_i} + \mathrm{B_i}\beta_{\mathrm{i}}}{\mathrm{C_i} - \mathrm{B_i}\alpha_{\mathrm{i}}}, \qquad i = 1,..,N-1$$

Кері есептеу:

$$\omega_{1,i-1,j}^{n+1} = \alpha_{\mathrm{i}}\omega_{1,i,j}^{n+1} + \beta_{\mathrm{i}} \tag{2.26}$$

Шешімін алу үшін $\mathrm{A_i}, \mathrm{B_i}, \mathrm{C_i}, f_i$, коэффициенттерін анықтаймыз. Жуықтап есептеу үдерісі орнықты болу үшін мына шарт орындалғанша жалғасады.

$$\max_{0\le \mathrm{j} \le \mathrm{N}} \left|\omega_{1,i+1,j}^{n+1} - \omega_{1,i,j}^{n+1}\right| < \varepsilon \tag{2.27}$$

Сол жақ координата бағыты бойынша есептеу жүргізу.

$$\frac{1}{h_2^2}\left(\sqrt{\frac{g_{11}}{g_{22}}}\right)_{i,j}\left(\omega_{1,i,j+1}^{n+1} - 2\omega_{1,i,j}^{n+1} + \omega_{1,i,j-1}^{n+1}\right) = \frac{\omega_{1,i,j}^{n+1} - \omega_{1,i,j}^{n}}{\tau} \tag{2.28}$$

$$AC_{\mathrm{i}} = \frac{\tau}{h_2^2}\left(\sqrt{\frac{g_{11}}{g_{22}}}\right)_{i,j}, \qquad \mathrm{BC_i} = \frac{\tau}{h_2^2}\left(\sqrt{\frac{g_{11}}{g_{22}}}\right)_{i,j},$$

$$\mathrm{CC_i} = 1 + 2\frac{\tau}{h_2^2}\left(\sqrt{\frac{g_{11}}{g_{22}}}\right)_{i,j} \tag{2.29}$$

Коэффициент:

$$\alpha_{j+1} = \frac{\mathrm{AC_i}}{\mathrm{CC_i} - \mathrm{BC_i}\alpha_j}, \qquad i = 1,..,N \tag{2.30}$$
$$\beta_{j+1} = \omega_{ij}^n + \frac{\mathrm{BC_i}\beta_j}{\mathrm{CC_i} - \mathrm{BC_i}\alpha_j}, \; j = 1,..,M$$

Кері есептеу:

$$\omega_{1,i,j-1}^n = \alpha_i \omega_{1,i,j}^n + \beta_i \tag{2.31}$$

Шешімді алу үшін $\mathrm{AC_i}, \mathrm{BC_i}, \mathrm{CC_i}$, коэффициенттерін анықтаймыз. Жуықтау үдерісі келесі тұрақтылық шарты орындалғанша жалғасады.

$$\max_{0 \le j \le N} \left| \omega_{1,i,j+1}^{n+1} - \omega_{1,i,j}^{n+1} \right| < \varepsilon \tag{2.32}$$

Берілген тор аймағын уақыт өте келе нақтылау келесі итеративті алгоритмді қолдану арқылы жүзеге асырылады. Шекаралық шарттар (2.33) екінші ретті дәлдікке жуықталады және келесі түрге ие:

$$\begin{aligned} x_{1(i,l)} &= \frac{4x_{l(i,2)} - x_{l(i,3)}}{3}, \\ x_{2(l,j)} &= \frac{4x_{2(2,j)} - x_{2(3,j)}}{3}, \\ x_{2(N_1,j)} &= \frac{4x_{2(N_1-1,j)} - x_{2(N_1-2,j)}}{3}. \end{aligned} \tag{2.33}$$

Барлық нүктелер үшін алдыңғы мәндер көшіріледі:

$$x_{1,b,i,j}^{n+1} = x_{1,i,j}^{n+1}, x_{2,b,i,j}^{n+1} = x_{2,i,j}^{n+1}$$

Алдымен $\omega_{1,i+1,j}^{n+1}$ есептеледі, бұл $x_{1,i,j}$ және $x_{2,i,j}$ -ге арналған жаңарту:

$$x_{1,i,j+1}^{n+1} = x_{1,i,j+1}^{n} + \tau\omega_{1,i,j}^{n+1}$$

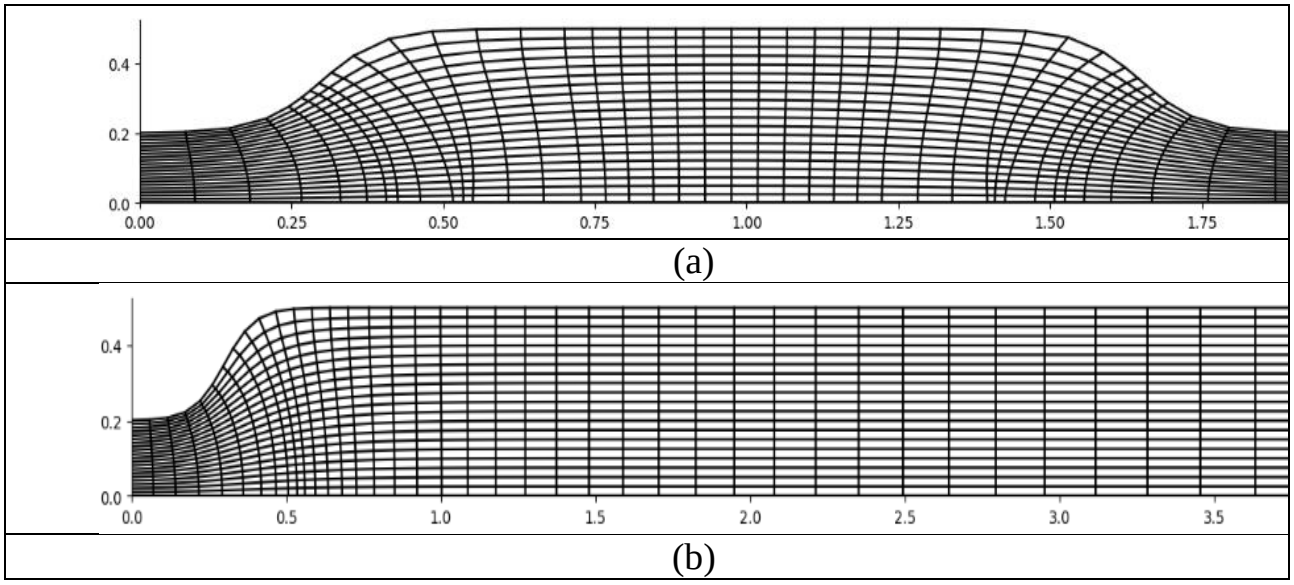
$$x_{2,i,j+1}^{n+1} = x_{1,i,j+1}^{n} + \tau\omega_{1,i,j}^{n+1} \tag{2.34}$$

Жаңа мән мен ескі мәннің айырмасы бойынша конвергенция тексеріледі, алгоритмді тоқтату шарты келесі түрде жазылады:

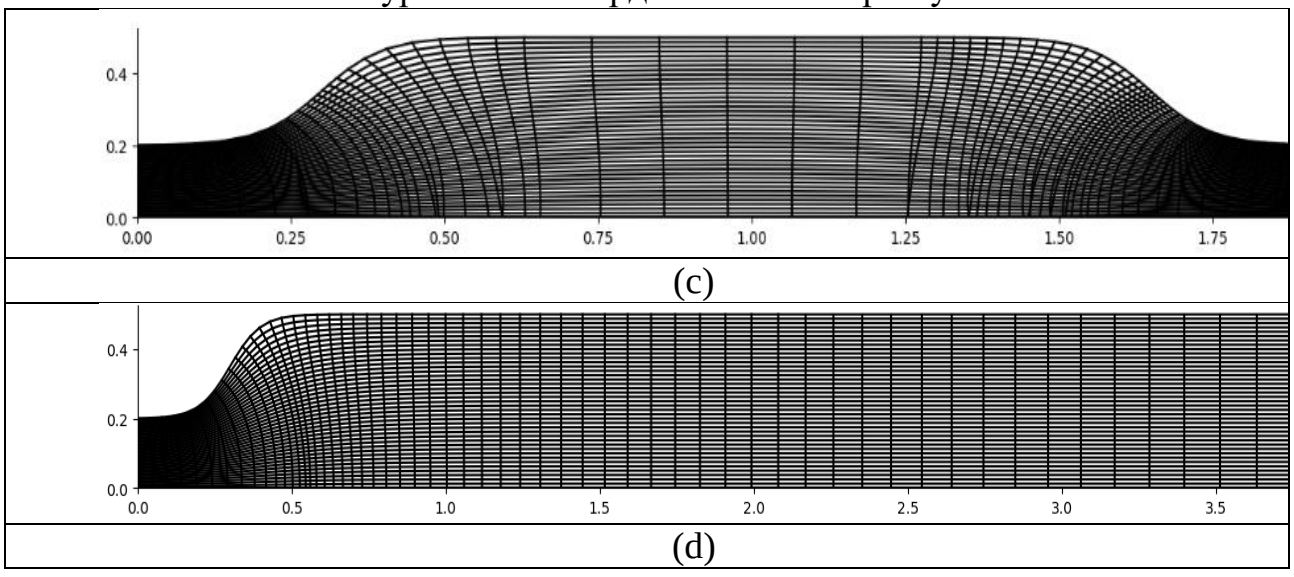
$$max\left(\sqrt{\frac{(x_{1,i,j+1}^{n+1}-x_{1,b,i,j+1}^{n+1})^2+(x_{2,b,i,j+1}^{n+1}-x_{2,b,i,j+1}^{n+1})^2}{\tau}}\right)<\varepsilon \quad (2.35)$$

2.3. Ортогональ қисық сызықты тор

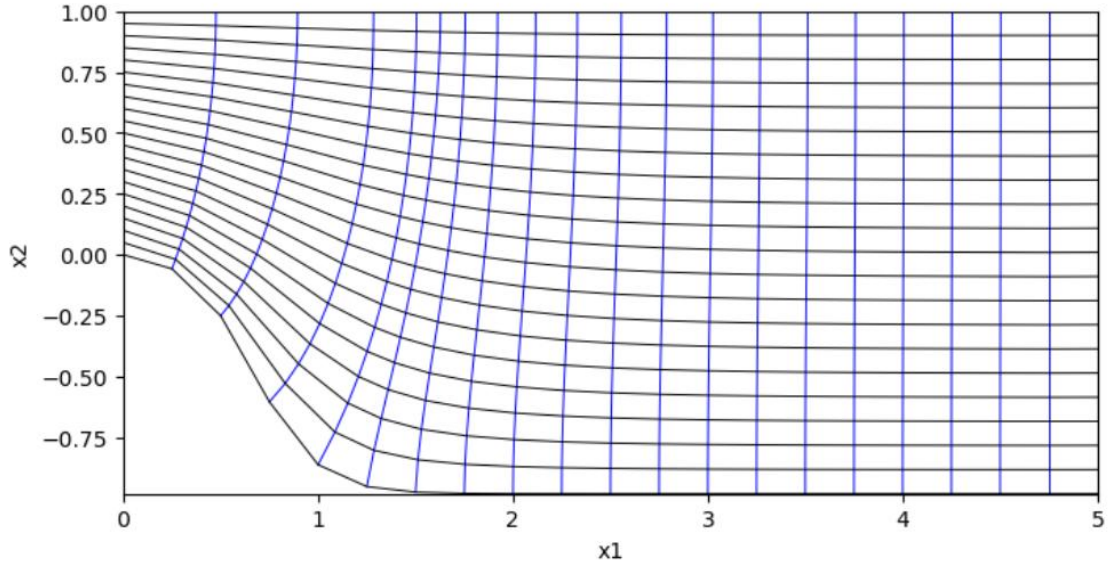
Ω облысты (2.1-2.3 сурет) параметрлік тікбұрышқа түрлендіру үшін Ω облысын Ω_1 және $\Omega_2 \cup \Omega_3$ типіндегі ішкі облыстардың қосындысы ретінде қарастырамыз.



2.1-Сурет. 41×21 торда салынған зерттеу облысы.



2.2-Сурет. 61×41 торда салынған зерттеу облысы.



2.3-Сурет. 21 × 21 өлшемді ортогоналды қисықсызықты адаптивті торлар

Жоғарыда келтірілген алгоритмге сәйкес, біздің математикалық моделіміз үшін ортогоналды қисықсызықты тор жасалды. Ол үшін jupyter ортасында Python 3.9 бағдарламалау тілінде код жазылды, нәтижесінде келесі график алынды. 2.1 және 2.2-суреттерде 61×41 және 41×21 өлшемді ортогоналды қисық торлар көрсетілген. Бұл торлардың координаталық сызықтары өзара перпендикуляр, бұл есептеу үдерісін жеңілдетеді. 2.2-суретте 21×21 өлшемді ортогоналды қисық торлар көрсетілген.

Доға теңдеулері келесі формулалармен анықталады:
Сол жақ доға үшін

$$x_{2,i,M-1} = \frac{b+a}{2} + \frac{b-a}{2}\frac{e^{R_S\left(x_{1,i,M-1}-x_1^0\right)}-e^{-R_S\left(x_{1,i,M-1}-x_1^0\right)}}{e^{R_S\left(x_{1,i,M-1}-x_1^0\right)}+e^{-R_S\left(x_{1,i,M-1}-x_1^0\right)}} \tag{2.36}$$

Оң жақ доға үшін

$$x_{2,i,M-1} = \frac{b+a}{2} + \frac{b-a}{2}\frac{e^{R_S\left(x_{xop}-x_{1,i,M-1}\right)}-e^{-R_S\left(x_{xop_1}-x_{1,i,M-1}\right)}}{e^{R_S\left(x_{xop}-x_{1,i,M-1}\right)}+e^{-R_S\left(x_{xop}-x_{1,i,M-1}\right)}} \tag{2.37}$$

2.3-сурет. 41×41 өлшемдегі ортогоналды қисық сызықты торлар көрсетілген. Бұл торлардың төменгі шекарасы параболалық функциямен берілген:

$$y_1 = (th(2 - 30x/R_s) - th2)/2 \text{ мұнда } 0 \le x \le x_{\text{вых}} = R/3$$

Мұнда x_1 мәні мен x_2 мәндерін табу үшін төмендегі формулалармен есептеу жүргіземіз:

$$x_{1,i,0} = iR_s/3(N-1),\ \ x_{2,i,0} = (th(2-30x/R_s) - th2)/2, \qquad (2.38)$$

Бұл жұмыста күрделі геометриялы облыстарда ортогоналды қисықсыз-ықты тор құрудың тиімді алгоритмі ұсынылды. Ұсынылған әдіс шекара бойындағы қисықтарды параметрлеу арқылы жоғары дәлдікпен тор нүктелерін есептеуге негізделеді. Ұзындық элементінің туындысы мен оның айырымдық схемасы арқылы қуалау әдісімен x_1 координаталары анықталып, сәйкесінше x_2 координаталары аналитикалық функцияны қолданып есептелді.

Содан кейін параболалық жалғастыру арқылы аймақтың қалған бөлігінде біркелкі емес тор нүктелері құрылып, тордың толық аймағы біртіндеп уақыт бойынша жетілдірілді. Екі бағытта (q_1 және q_2 бойымен) қуалау әдісімен координаталар тұрақтандырылды және тордың ортогоналдығын қамтамасыз ететін шарттар орындалды.

Нәтижесінде, ұсынылған әдіс арқылы алынған тор құрылымы күрделі пішінді есептеу аймақтарында жоғары дәлдікті сандық модельдеуді жүзеге асыруға мүмкіндік берді. Бұл тәсіл ағындық, жылулық және масса тасымалдау үдерістерін модельдеуде тиімді құрал ретінде қолдануға болатынын көрсетті.

Бұл жұмыста келесі мәселелер қарастырылады:

- күрделі геометриялық облыстарда ортогоналды қисық сызықты тор құрудың математикалық моделін құру.
- айырымдық схемалар мен қуалау әдісін пайдалана отырып, тор тұйіндерін есептеу.
- есептеу үдерісінің тұрақтылығын тексеру және берілген дәлдіке дейін жалғастыру.

2.4. Еркін қисық сызықты ортогоналды координаттардағы grad, div, Δ операторларының сипаттамасы

Қисық сызықты координаталардағы градиент:

$$grad\ u = \frac{\partial u}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial u}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial u}{\partial z}\vec{k} \qquad (2.39)$$

Егер $\vec{u}(x,y,z) = (u_1, u_2, u_3)$ скалярлық функция болса, онда градиент векторы келесі түрде жазылады, мұндағы $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ – бірлік вектор**.**

$$\vec{u}(x,y,z) = u_1(x,y,z)\vec{i} + u_2(x,y,z)\vec{j} + u_3(x,y,z)\vec{k} \qquad (2.40)$$

Қисық сызықты координаталардағы дивергенция:

$$div\,\vec{u} = \frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial u_2}{\partial y} + \frac{\partial u_3}{\partial z} \qquad (2.41)$$

Қисық сызықты координаталардағы Лаплас операторы**:**

$$\Delta u = div(\ grad\ u) \tag{2.42}$$

Декарт координаталарында Лаплас операторы мынадай стандартты түрге ие:

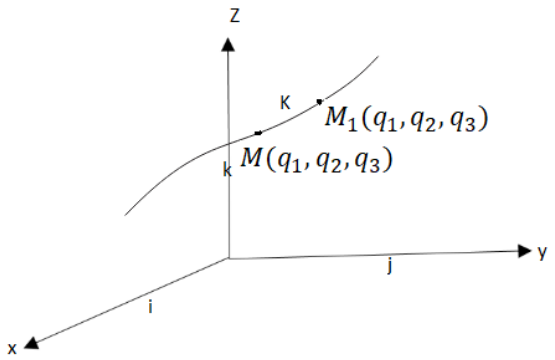
$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \tag{2.43}$$

Декарттық координатада анықталған (2.41), (2.42), (2.43) операторларын кез келген ортогоналды қисық сызықты координаттарға (q_1, q_2, q_3) көшірейік, ол үшін Лама коэффициенттерін енгіземіз, Оларды (x, y, z) координаталары арқылы анықтаймыз:

$$\begin{cases} x = x(q_1, q_2, q_3) \\ y = y(q_1, q_2, q_3) \\ z = z(q_1, q_2, q_3) \end{cases} \tag{2.44}$$

Егер координаталық түрлендіру сызықтық болған жағдайда

$$q_1 = t,\ \ q_2 = const,\ \ q_3 = const, x = x(t), y = y(t), z = z(t).$$



2.4-Сурет. Жаңа координаттар жүйесінде екі нүкте көрсетілген

Мұнда $M_1(q_1, q_2, q_3)$ мен $M(q_1, q_2, q_3)$ нүктелерінің арасындағы k базистік координата мынаған тең:

$$\vec{R} = [\Delta x, \Delta y, \Delta z]$$

$\Delta x, \Delta y, \Delta z$ -параметрлік айнымалылары төмендегі түрде өрнектеледі:

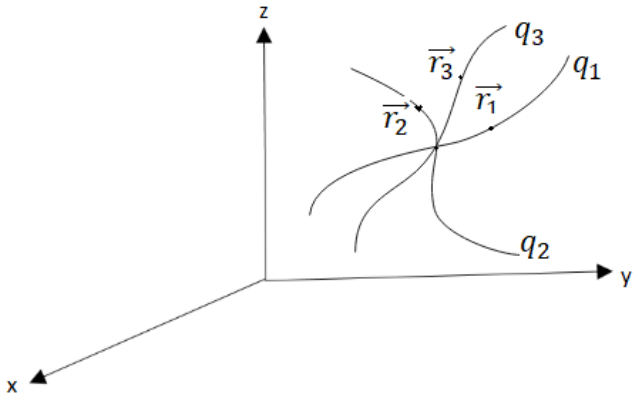
$$\Delta x = f(\Delta q_1, \Delta q_2, \Delta q_3),\ \Delta y = f(\Delta q_1, \Delta q_2, \Delta q_3), \Delta z = f(\Delta q_1, \Delta q_2, \Delta q_3)$$

$$\lim_{\Delta q_1 \to 0} \frac{R}{\Delta q_1} = \lim_{\Delta q_1 \to 0} \left\{ \frac{\Delta x}{\Delta q_1}, \frac{\Delta y}{\Delta q_1}, \frac{\Delta z}{\Delta q_1} \right\} = \left\{ \frac{\partial x}{\partial q_1} + \frac{\partial y}{\partial q_1} + \frac{\partial z}{\partial q_1} \right\} = \overrightarrow{r_1}$$

$$\overrightarrow{r_2} = \left\{ \frac{\partial x}{\partial q_2} + \frac{\partial y}{\partial q_2} + \frac{\partial z}{\partial q_2} \right\} \qquad (2.45)$$

$$\overrightarrow{r_3} = \left\{ \frac{\partial x}{\partial q_3} + \frac{\partial y}{\partial q_3} + \frac{\partial z}{\partial q_3} \right\}$$

Осылайша, r_1, r_2, r_3 - жаңа қисық координаттар жүйесінің негізін құрайды.



2.5-Сурет**.** Жаңа координаталар жүйесіндегі базис

Лама коэффициенттерін анықтау

$$|\overrightarrow{r_1}| = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial q_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial q_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial q_1}\right)^2} = H_1$$

$$|\overrightarrow{r_2}| = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial q_2}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial q_2}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial q_2}\right)^2} = H_2 \qquad (2.46)$$

$$|\overrightarrow{r_3}| = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial q_3}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial q_3}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial q_3}\right)^2} = H_3$$

Бұл коэффициенттер қисық сызықты координаталар жүйесіндегі градиент, дивергенция және Лаплас операторларын анықтау үшін қажет. Төменде қисық сызықты координаталар жүйесіндегі градиенттің өрнегі келтірілген**:**

$$\begin{cases} (grad\ u)_1 = \dfrac{1}{H_1}\dfrac{\partial u}{\partial q_1}, \\ (grad\ u)_2 = \dfrac{1}{H_2}\dfrac{\partial u}{\partial q_2}, \\ (grad\ u)_3 = \dfrac{1}{H_3}\dfrac{\partial u}{\partial q_3}. \end{cases} \tag{2.47}$$

$u = (q_1, q_2, q_3)$ скалярлық функциясы үшін градиент компоненттері келесі түрге ие

$$grad\ u = \left\{\frac{1}{H_1}\frac{\partial u}{\partial q_1}, \frac{1}{H_2}\frac{\partial u}{\partial q_2}, \frac{1}{H_3}\frac{\partial u}{\partial q_3}\right\}$$

Ламе коэффициенттері координаталық жүйенің өзгеруін сипаттайды:

$$\begin{aligned} H_1 &= \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial q_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial q_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial q_1}\right)^2} = |\overrightarrow{r_1}| \\ H_2 &= \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial q_2}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial q_2}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial q_2}\right)^2} = |\overrightarrow{r_2}| \\ H_3 &= \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial q_3}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial q_3}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial q_3}\right)^2} = |\overrightarrow{r_3}| \end{aligned} \tag{2.48}$$

2.4.1 Метрикалық тензор

Ламе коэффициенттері мен метрикалық тензор арасындағы байланыс келесі түрде өрнектеледі:

$$g^{km} = \frac{\partial q_k}{\partial x_n}\frac{\partial q_m}{\partial x_n},\ g_{km} = \frac{\partial x_n}{\partial q_k}\frac{\partial x_n}{\partial q_m}. \tag{2.49}$$

Олай болса Ламе коэффициенттері метрикалық тензордың диагональ элементтерімен анықталады:

$$H_1 = \sqrt{g_{11}}, \qquad H_2 = \sqrt{g_{22}},\ H_3 = \sqrt{g_{33}}. \tag{2.50}$$

Градиент ортогоналды базисті пайдаланып келесі түрде өрнектеледі:

$$grad\ u = (grad\ u)_1\vec{e}_1 + (grad\ u)_2\vec{e}_2 + (grad\ u)_3\vec{e}_3 \tag{2.51}$$

мұндағы $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ –бірлік ортогоналды базистік векторлар

$$\left(\vec{e}_i, \vec{e}_j\right) = \delta_i^j \tag{2.52}$$

Метрика және Якобиан

Ламе коэффициенттері мен координаталық түрлендіру арасындағы байланысты якобиан арқылы ыңғайлы түрде көрсетуге болады:

$$J = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial q_1} & \frac{\partial x}{\partial q_2} & \frac{\partial x}{\partial q_3} \\ \frac{\partial y}{\partial q_1} & \frac{\partial y}{\partial q_2} & \frac{\partial y}{\partial q_3} \\ \frac{\partial z}{\partial q_1} & \frac{\partial z}{\partial q_2} & \frac{\partial z}{\partial q_3} \end{pmatrix}, \quad J^T = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial q_1} & \frac{\partial y}{\partial q_1} & \frac{\partial z}{\partial q_1} \\ \frac{\partial x}{\partial q_2} & \frac{\partial y}{\partial q_2} & \frac{\partial z}{\partial q_2} \\ \frac{\partial x}{\partial q_3} & \frac{\partial y}{\partial q_3} & \frac{\partial z}{\partial q_3} \end{pmatrix}, \; g = J^{-1}\, J. \tag{2.53}$$

мұнда

$$J.J^T = \begin{pmatrix} \left(\frac{\partial x}{\partial q_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial q_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial q_1}\right)^2; \frac{\partial x}{\partial q_1}.\frac{\partial x}{\partial q_2} + \frac{\partial y}{\partial q_1}.\frac{\partial y}{\partial q_2} + \frac{\partial z}{\partial q_1}.\frac{\partial z}{\partial q_2}; \frac{\partial x}{\partial q_1}.\frac{\partial x}{\partial q_3} + \frac{\partial y}{\partial q_1}.\frac{\partial y}{\partial q_3} + \frac{\partial z}{\partial q_1}.\frac{\partial z}{\partial q_3}; \\ \frac{\partial x}{\partial q_1}.\frac{\partial x}{\partial q_2} + \frac{\partial y}{\partial q_1}.\frac{\partial y}{\partial q_2} + \frac{\partial z}{\partial q_1}.\frac{\partial z}{\partial q_2}; \left(\frac{\partial x}{\partial q_2}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial q_2}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial q_2}\right)^2; \frac{\partial x}{\partial q_2}.\frac{\partial x}{\partial q_3} + \frac{\partial y}{\partial q_2}.\frac{\partial y}{\partial q_3} + \frac{\partial z}{\partial q_2}.\frac{\partial z}{\partial q_3}; \\ \frac{\partial x}{\partial q_3}.\frac{\partial x}{\partial q_1} + \frac{\partial y}{\partial q_3}.\frac{\partial y}{\partial q_1} + \frac{\partial z}{\partial q_3}.\frac{\partial z}{\partial q_1}; \frac{\partial x}{\partial q_3}.\frac{\partial x}{\partial q_2} + \frac{\partial y}{\partial q_3}.\frac{\partial y}{\partial q_2} + \frac{\partial z}{\partial q_3}.\frac{\partial z}{\partial q_2}; \left(\frac{\partial x}{\partial q_3}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial q_3}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial q_3}\right)^2; \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} & g_{23} \\ g_{31} & g_{32} & g_{33} \end{pmatrix} \tag{2.54}$$

Ортогональды координаттар жүйесінде метрикалық тензордың координаталық сызықтары бір-біріне перпендикуляр болғанда, тек метрикалық тензордың диагоналды элементтері нөлден ерекшеленеді.

$$g_{ij} = 0, \;\; i \neq j.$$

Метрикалық тензордың анықтауышы келесі түрде жазылады:

$$|J| = |J^T|, \; J\,J^T = \begin{pmatrix} g_{11} & 0 & 0 \\ 0 & g_{22} & 0 \\ 0 & 0 & g_{33} \end{pmatrix}$$

Ортогональ координаталар үшін метрикалық тензордың анықтауышы**:**

$$g_{11}g_{22}g_{33} = J^2 \Longrightarrow J = \sqrt{g_{11}g_{22}g_{33}}$$

Ламе коэффициенттері метрикалық тензордың диагоналды элементтері арқылы анықталады:

$$H_1 = \sqrt{g_{11}}, \;\; H_2 = \sqrt{g_{22}}, \;\; H_3 = \sqrt{g_{33}}, \;\; J = H_1H_2H_3 \tag{2.55}$$

Лаплас операторы келесі түрде өрнектеледі[53]:

$$\begin{aligned}\triangle u &= div\ grad\ u= \\ &= \frac{1}{J}\left(\frac{\partial}{\partial q_1}\left(\frac{J}{H_1^2}\frac{\partial u}{\partial q_1}\right)+\frac{\partial}{\partial q_2}\left(\frac{J}{H_2^2}\frac{\partial u}{\partial q_2}\right)+\frac{\partial}{\partial q_3}\left(\frac{J}{H_3^2}\frac{\partial u}{\partial q_3}\right)\right) \\ &= \frac{1}{J}\left(\frac{\partial}{\partial q_1}\left(\frac{J}{g_{11}}\frac{\partial u}{\partial q_1}\right)+\frac{\partial}{\partial q_2}\left(\frac{J}{g_{22}}\frac{\partial u}{\partial q_2}\right)+\frac{\partial}{\partial q_3}\left(\frac{J}{g_{33}}\frac{\partial u}{\partial q_3}\right)\right) \\ &= \frac{1}{J}\left(\frac{\partial}{\partial q_m}\left(\frac{J}{g_{mn}}\frac{\partial u}{\partial q_m}\right)\right)\end{aligned} \tag{2.56}$$

$$g_{km} = \frac{\partial x}{\partial q_k}\frac{\partial x}{\partial q_m}+\frac{\partial y}{\partial q_k}\frac{\partial y}{\partial q_m}+\frac{\partial z}{\partial q_k}\frac{\partial z}{\partial q_m}$$

Ковариантық және контравариантық метрикалық тензорлар кері матрицалар болып табылады:

$$g_{ik}\, g^{ik} = \delta_i^j \tag{2.57}$$

δ_i^j— Кронекер символы (егер i=j ,1 немесе 0 болғанда). Скалярлық көбейтіндіні екі түрлі тәсілмен жазуға болады:

$$g(x,y) = g_{ij}\, x^i y^j = x_i y^i = x^i y_i = g^{ij} x_i y_i \tag{2.58}$$

x^i-контравариантық координаталар, x_i-ковариантық координаталар.

Физикада және математикада ковариантық және контравариантық координаталар қисық сызықты координаталар жүйесінде векторлар мен тензорларды сипаттау үшін қолданылады. Кез келген ортогоналды координаталар жүйесінде метрлік тензор g_{jk} былай анықталады:

$$g_{jk} = (\vec{e}_j, \vec{e}_k),$$

мұнда: $\vec{e}_j, \vec{e}_k$координаталық базистік векторлар.

Метрикалық тензор *G* деп аталатын Гамм матрицасын құрайды:

$$G = (g_{jk})$$

Оның анықтауышы әрдайым оң мәнді болуы керек:

$$detG > 0$$

Егер бұл шарт орындалса, онда кері контравариантық метрлік тензор $\exists G^{-1} = (g^{jk})$ бар:

$$g_{jk}\, g^{ks} = \delta_s^k,$$

мұндағы: δ_s^k-Кронекер символы.

Қисық координаталар жүйесінде базистік векторлар екі түрге бөлінеді:

Ковариантық базистік векторлар:

$$e_1, e_2, e_3, \ldots., e_n$$

Контравариантық базистік векторлар:

$$\vec{e}^1, \vec{e}^2, \ldots., \vec{e}^n,$$

Ковариантық және контравариантық базистік векторлардың арасындағы байланыс:

$$\vec{e}^j = g^{ik}\vec{e}_k$$

Кез келген x векторының координаталарын контравариантық координаталардың екі түрінде жазуға болады, (жоғарғы индекспен белгіленеді):

$$\forall x \in \mathrm{v}; \vec{x} = x^k \vec{e}_k.$$

Ковариантық координаталар (төменгі индекспен белгіленеді):

$$\forall x \in \mathrm{v}; \vec{x} = x_j \vec{e}^j,$$

x^k-вектордың контравариантты координаттары, x_j-вектордың ковариантты координаттары

$$\left(\vec{e}^j, \vec{e}_s\right) = g_{ks}$$

$$(\vec{e}^j, \vec{e}_s) = (g^{jk}, \vec{e}^j, \vec{e}_s) = g^{jk}(\vec{e}^j, \vec{e}_s) = g^{jk} g_{ks} = \delta_s^k = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Гиббс формуласы векторлардың ковариантық және контравариантық координаталары арасындағы байланысты анықтайды:

$$\begin{aligned} &\vec{x} = x^k \vec{e}_k \text{ -} \vec{e}^j \ , x^j = \left(\vec{e}^j, \vec{x}\right) \\ &\quad \left(\vec{e}^j, \vec{x}\right) = (\vec{e}^j x^k \vec{e}_k) = x^k \left((\vec{e}^j \vec{e}_k\right) = x^k \delta_k^j = x^j \\ &\vec{x} = x^k \vec{e}^k, \ x_j = \left(\vec{e}_j, \vec{x}\right) \\ &\quad (\vec{e}_j, \vec{x}) = (\vec{e}^j, x_k, \vec{e}^k) = x_k\, (\vec{e}^j, \vec{e}^k) = x_k\, \delta_j^k = x_j \end{aligned} \qquad (2.59)$$

Гиббс формуласы $x_j = \left(\vec{e}_j, \vec{x}\right)$, $x^j = \left(\vec{e}^j, \vec{x}\right)$

Контравариант координат $x^j = \left(\vec{e}^j, \vec{x}\right) = (g^{js}\vec{e}_s, \vec{x}) = g^{js}(\vec{e}_s, \vec{x}) = g^{is}x_s$

Метрикалық тензор арқылы ковариант және контравариант координаттары келесі түрде байланысады:

$$x^j = g^{js}x_s\,,\ x_j = g_{pk}x^k$$

Механикада ε бұрыштық үдеуі және M күш моменті арасындағы байланыс J инерция тензоры арқылы беріледі:

$$\vec{M} = J\vec{\varepsilon}$$

Координаталық түрде:

$$M^k = j_l^k \varepsilon^l$$

M^k- моменттің контравариантты компоненттері, ε^l-бұрыштық үдеудің контравариантты компоненттері, j_l^k- контравариантты инерция тензоры, J_{jk}- ковариантты инерция тензоры.

$$J_{jk} = g_{js}J_k^s,\ \ J_l^k = g^{ks}J_{sl}$$

Инерция тензоры арқылы жүйенің кинетикалық энергиясы мына түрде өрнектеледі

$$T = \frac{1}{2}J_{jk}\omega^j\omega^k$$

мұнда ω^j- бұрыштық жылдамдықтың компоненттері.

2.5 Күрделі шекаралық облыстарда Навье–Стокс теңдеулерін сандық шешу үшін қисық сызықты координаттар әдісін қолдану

2.5.1 Ортогоналды координаттар жүйесіндегі Навье-Стокс теңдеулері

(ψ, ω) айнымалыларында жазылған Навье-Стокс теңдеулер жүйесі қарастырылады

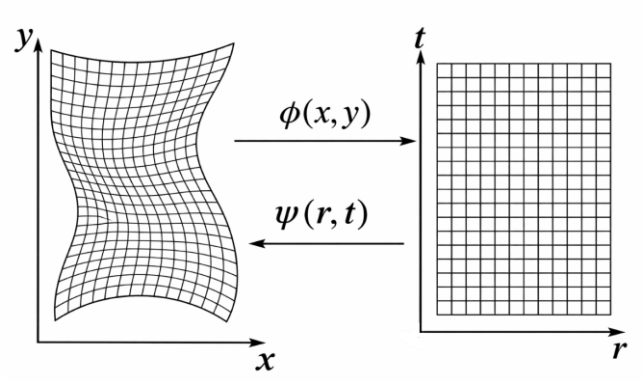
$$\frac{\partial\omega}{\partial t} + \frac{\partial u\omega}{\partial x_1} + \frac{\partial \upsilon\omega}{\partial x_2} = \frac{1}{Re}\Delta\omega,$$
$$\Delta\,\psi = \ \omega\,, \tag{2.60}$$

мұндағы u, v- Ox_1x_2 декарттық координаталар жүйесіндегі $\boldsymbol{u}$ жылдамдық векторының компоненттері, Re —Рейнольдс саны, ψ- тоқ функциясы, ω- жылдамдық иірімі.

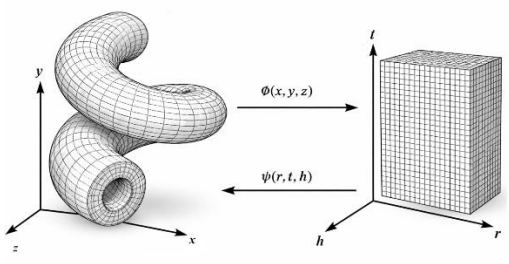
$$u = \frac{\partial \psi}{\partial x_2},\ v = -\frac{\partial \psi}{\partial x_1},\ \ \omega = \frac{\partial u}{\partial x_2} - \frac{\partial v}{\partial x_1}.$$

Белгілі бір өзара бірмәнді және ерекшеленбеген координаталар түрлендіруі берілсін.

$$x_1 = x_1(q_1, q_2),\ x_2 = x_2(q_1, q_2)$$



2.6-сурет. Жаңа координаталарды көшіру 2d өлшемінде



2.7-сурет. Жаңа координаталарды көшіру 3d өлшемінде

Якобиан $J = \frac{\partial x_1}{\partial q_1}\frac{\partial x_2}{\partial q_2} - \frac{\partial x_1}{\partial q_2}\frac{\partial x_2}{\partial q_1}$. Oq_1q_2 да жаңа координаттар жүйесінде (2.60) теңдеулер келесі түрге ие болады:

$$J\frac{\partial \omega}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial q_1}\left(\frac{\partial \psi}{\partial q_2}\omega\right) - \frac{\partial}{\partial q_2}\left(\frac{\partial \psi}{\partial q_1}\omega\right) = \frac{1}{Re}\left[\frac{\partial}{\partial q_m}\left(Jg^{km}\frac{\partial \omega}{\partial q_k}\right)\right],$$
$$\frac{\partial}{\partial q_m}\left(Jg^{km}\frac{\partial \psi}{\partial q_k}\right) = J\omega. \qquad (2.61)$$

Мұнда және әрі қарай да қайталанатын индекстер бойынша қосынды алу жүргізіледі. Контравариантты метрикалық тензор [56] былай белгіленеді:

$g^{km} = \frac{\partial q_k}{\partial x_n}\frac{\partial q_m}{\partial x_n}$, ал ковариантты метрикалық тензор: $g_{km} = \frac{\partial x_n}{\partial q_k}\frac{\partial x_n}{\partial q_m}$, *k,m=1,2.* Қарастырылып отырған түрлендіруге сәйкес ортогоналды координаттар жүйесінде келесі қатынастар орындалады [37,56]

$$g_{12} = 0, \qquad g_{21} = 0, \qquad J^2 = g_{11}\,g_{22},\ Jg^{11} = \sqrt{\frac{g_{22}}{g_{11}}}, \quad Jg^{22} = \sqrt{\frac{g_{11}}{g_{22}}},$$

(2.61) теңдеулері келесі түрде беріледі:

$$\sqrt{g_{11}\,g_{22}}\frac{\partial\omega}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial q_1}\left(\frac{\partial\psi}{\partial q_2}\omega\right) - \frac{\partial}{\partial q_2}\left(\frac{\partial\psi}{\partial q_1}\omega\right) = \frac{1}{Re}\left[\frac{\partial}{\partial q_1}\left(\sqrt{\frac{g_{22}}{g_{11}}}\frac{\partial\omega}{\partial q_1}\right) + \frac{\partial}{\partial q_2}\left(\sqrt{\frac{g_{11}}{g_{22}}}\frac{\partial\omega}{\partial q_2}\right)\right], \tag{2.62}$$

$$\frac{\partial}{\partial q_1}\left(\sqrt{\frac{g_{22}}{g_{11}}}\frac{\partial\psi}{\partial q_1}\right) + \frac{\partial}{\partial q_2}\left(\sqrt{\frac{g_{11}}{g_{22}}}\frac{\partial\psi}{\partial q_2}\right) = \sqrt{g_{11}\,g_{22}}\omega.$$

(2.62) теңдеулер жүйесін әрі қарай зерттеу үшін ыңғайлырақ түрде жазайық:

$$\sqrt{g_{11}\,g_{22}}\frac{\partial\omega}{\partial t} + (L_1 + L_2)\omega = 0, \tag{2.63}$$

$$\frac{\partial}{\partial q_1}\left(\Phi\,\frac{\partial\psi}{\partial q_1}\right) + \frac{\partial}{\partial q_2}\left(\frac{1}{\Phi}\,\frac{\partial\psi}{\partial q_2}\right) = \sqrt{g_{11}\,g_{22}}\ \omega, \tag{2.64}$$

мұндағы

$$L_1\omega = \frac{\partial}{\partial q_1}\left(\frac{\partial\psi}{\partial q_2}\omega\right) - \frac{1}{Re}\frac{\partial}{\partial q_1}\left(\Phi\frac{\partial\omega}{\partial q_1}\right), \tag{2.65}$$

$$L_2\omega = -\frac{\partial}{\partial q_2}\left(\frac{\partial\psi}{\partial q_1}\omega\right) - \frac{1}{Re}\frac{\partial}{\partial q_2}\left(\frac{1}{\Phi}\frac{\partial\omega}{\partial q_2}\right), \tag{2.66}$$

$$\Phi = \sqrt{\frac{g_{22}}{g_{11}}},\ g_{11} = \left(\frac{\partial x_1}{\partial q_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial x_2}{\partial q_1}\right)^2,\ g_{22} = \left(\frac{\partial x_1}{\partial q_2}\right)^2 + \left(\frac{\partial x_2}{\partial q_2}\right)^2.$$

Қисық сызықты координаттар жүйесінде жылдамдық векторының компоненттері тоқ функциясының туындылары арқылы келесі қатынастар арқылы өрнектелетінін ескеріңіз:

$$u = \frac{1}{J}\left(a_{11}\frac{\partial\psi}{\partial q_2} - a_{12}\frac{\partial\psi}{\partial q_1}\right),\ \ v = -\frac{1}{J}\left(a_{22}\frac{\partial\psi}{\partial q_1} - a_{21}\frac{\partial\psi}{\partial q_2}\right). \tag{2.67}$$

мұндағы $a_{ij} = \frac{\partial x_i}{\partial q_j},\ i,j = 1,2$

2.5.2 Ортогоналды қисық сызықты торды құру алгоритмі

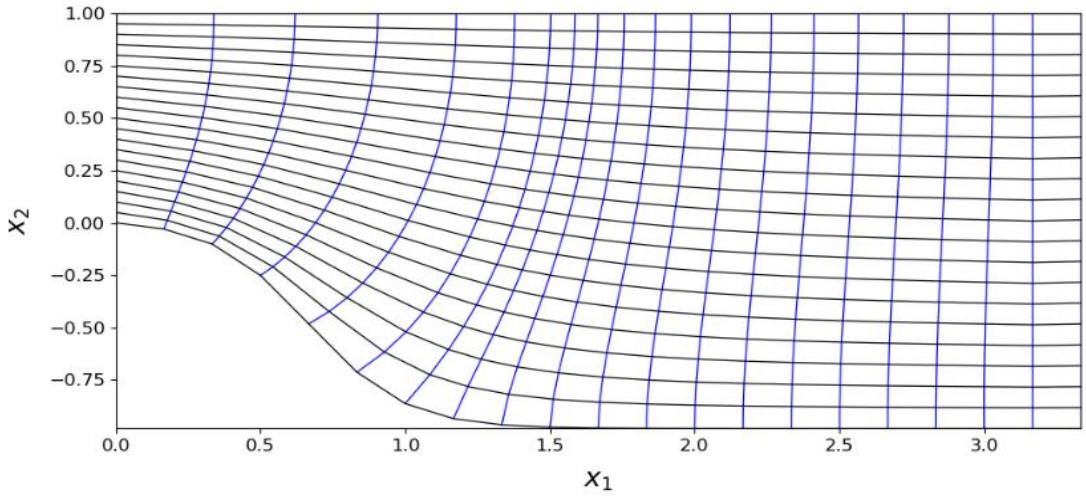
Ортогоналды торды құру үшін эллиптикалық тор генераторы қолданылады [37]

$$\sqrt{\frac{g_{11}}{g_{22}}}\frac{\partial^2 x_l}{\partial q_1^2} + \frac{\partial}{\partial q_2}\left(\sqrt{\frac{g_{22}}{g_{11}}}\frac{\partial x_l}{\partial q_2}\right) = 0, \qquad l = 1,2. \qquad (2.68)$$

(2.68) теңдеу шекаралық шарттармен толықтырылған, оларды біз Ox_1x_2 жазықтығындағы қисық сызықты төртбұрыш түріндегі арна мысалын қолдана отырып қарастырамыз (2.1-суретті қараңыз). Жоғарғы шекара (симметрия осі) $x_2 = 1$ түзуінің кесіндісі болып табылады. Төменгі шекара тегіс функциямен сипатталады.

$$x_2 = [th(2 - 30x_1/R_s) - th(2)]/2 = f(x_1), \quad 0 \le x_1 \le x_{1l} = R_s/3 \ (2.69)$$

Аймақтың сол жағынан $x_1 = 0$, ал оң жағынан $x_1 = x_{1l}$ түзу кесінділерімен шектелген. Есептеу облысның мөлшері Рейнольдс санына тәуелді. Re саны артқан сайын арна түзуірек және ұзынырақ бола түседі.



2.8-сурет. Ағын аймағы және өлшемі 41×41 болатын ортогоналды қисық тор

Қарастырылып отырған аймақ Oq_1q_2 параметрлік жазықтығындағы бірлік шаршының кескіні. Арнаның түзусызықты бөліктерінде шекаралық шарттар параметрлік координаттарда келесі түрге ие:

Параметрлік координаттардағы шекаралық шарттар:

$$x_1 = 0,\ \frac{\partial x_2}{\partial q_1} = 0, \qquad q_1 = 0,\ 0 \le q_2 \le 1,$$
$$x_1 = 0, \qquad \frac{\partial x_2}{\partial q_1} = 0, \qquad q_1 = 0, \qquad 0 \le q_2 \le 1,$$
$$\frac{\partial x_1}{\partial q_2} = 0, \qquad x_2 = 1, \qquad 0 \le q_1 \le 1, q_2 = 1, \tag{2.70}$$
$$x_1 = x_{1l}\ , \qquad \frac{\partial x_2}{\partial q_1} = 0, \quad q_1 = 1, \qquad 0 \le q_2 \le 1,$$

Бірінші туындылар түріндегі (2.70) шекаралық шарттар екінші дәрежелі дәлдікпен жуықталады. Мысалы, $q_1 = 0,\ 0 \le q_2 \le 1$ болғандағы $\frac{\partial x_2}{\partial q_1} = 0$ шекаралық шарты үшін жуықтау формуласы қолданылады.

$$\left(\frac{\partial x_2}{\partial q_1}\right)_{1,j} = \frac{3x_{2(1,j)} - 4x_{2(2,j)} + x_{2(3,j)}}{-2h_1} + 0(h_1^2),$$

$\left(\frac{\partial x_2}{\partial q_1}\right)_{1,j} = 0$ шартына байланысты төмендегі теңдікке ие боламыз

$$x_{2(1,j)} = \frac{4x_{2(2,j)} - x_{2(3,j)}}{3} \tag{2.71}$$

Шекараның түзу сызықты бөліктеріндегі қалған шекаралық шарттардың аппроксимациясын да осыған ұқсас жолмен табамыз

$$x_{1(i,1)} = \frac{4x_{1(i,2)} - x_{1(i,3)}}{3},$$
$$x_{1(i,N_2)} = \frac{4x_{1(i,N_2-1)} - x_{1(i,N_2-2)}}{3}, \tag{2.72}$$
$$x_{2(N_1,j)} = \frac{4x_{2(N_1-1,j)} - x_{2(N_1-2,j)}}{3}.$$

Қисық сызықты шекара бөлігінде координаталық тор сызықтарының осы шекараға ортогонал (перпендикуляр) болу шарты қолданылады, яғни шекаралық шарт: $g_{12} = 0$.

$$\frac{\partial x_1}{\partial q_1}\frac{\partial x_1}{\partial q_2} - \frac{\partial x_2}{\partial q_1}\frac{\partial x_2}{\partial q_2} = 0,$$

Бұл жағдайда, q_1 жанама бағыты бойынша туындылар центрлік айырмалармен аппроксимацияланады, ал q_2 нормаль бағыты бойынша — (2.71) теңдеуді пайдаланып, екінші ретті дәлдікпен біржақты айырмалар арқылы аппроксимацияланады:

$$x_{2(1,j)} = f(x_{1(i,1)}),\ i = 1, \ldots, N_1.$$

(2.68) теңдеуді сандық түрде шешу үшін ағымдағы қадамда берілген түйіндердің шекарада орналасуы үшін орнату әдісі қолданылады [58]

$$\left(E - \tau L_{11}^h\right)\left(E - \tau L_{22}^h\right)\frac{x_l^{n+1} - x_l^n}{\tau} = L_{11}^h x_l^n + L_{22}^h x_l^n\ . \qquad (2.73)$$

Мұндағы L_{11}^h, L_{22}^h — (2.68)-дегі дифференциалдық операторлардың айырымдық аналогтары.

(2.73) айырымдық схемасын бөлшектік қадамдар әдісімен жүзеге асырамыз. Алдымен q_1 бағыты бойынша прогонка әдісімен көмекші шамаларды z_l^{n+1} айырымдық схема арқылы табамыз.

$$\left(E - \tau L_{11}^h\right) z_l^{n+1} = L_{11}^h x_l^n + L_{22}^h x_l^n. \qquad (2.74)$$

Әрі қарай q_2 бағыты бойынша біз айырымдық теңдеулерін шешеміз

$$\left(E - \tau L_{11}^h\right) y_l^{n+1} = z_l^{n+1}, \qquad (2.75)$$

соңғы қадамында

$$\frac{x_l^{n+1} - x_l^n}{\tau} = y_l^{n+1}$$

ішкі түйіндерден x_l^{n+1} мәндерін табамыз және шекаралық түйіндердің координаталарын түзетеміз.

Алгоритм тордың түйіндік мәндерін шарт орындалғанға дейін итеративті түрде жаңартады

$$\|x_l^{n+1} - x_l^n\|_c = \max_{ij}\left|x_{l(i,j)}^{n+1} - x_{l(i,j)}^n\right| < \varepsilon, \qquad (2.76)$$

мұнда $1 \le i \le N_1$, $1 \le j \le N_2$. 2.2-суретте сипатталған алгоритм көмегімен алынған тор көрсетілген. Көріп тұрғанымыздай, тордың координаталық сызықтары өзара ортогонал және аймақтың шекараларына да ортогоналды.

2.6. Арна ішіндегі ағынды есептеудің ақырлы айырымдық алгоритмі.

(2.63) және (2.64) дифференциалдық теңдеулер жүйесін сандық әдіспен шешу үшін келесі итерациялық ақырлы-айырымдық схемасын қарастырамыз [60].

$$\sqrt{g_{11}\,g_{22}}\frac{\omega_{i,j}^{n+1/2}-\omega_{i,j}^{n}}{\tau}+L_{1,h}\omega^{n+\frac{1}{2}}+L_{2,h}\omega^{n}=0, \tag{2.77}$$

$$\sqrt{g_{11}\,g_{22}}\frac{\omega_{i,j}^{n+1}-\omega_{i,j}^{n+1/2}}{\tau}+L_{1,h}\omega^{n+1/2}+L_{2,h}\omega^{n+1}=0,$$

$$\left(\sqrt{\frac{g_{22}}{g_{11}}}\psi_{q_1}^{n+1}\right)_{q_1}+\left(\sqrt{\frac{g_{11}}{g_{22}}}\psi_{q_2}^{n+1}\right)_{q_2}=\sqrt{g_{11}\,g_{22}}\omega_{i,j}^{n+1}, \tag{2.78}$$

мұндағы $L_{1,h}$, $L_{2,h}$ - L_1, L_2 дифференциалдық операторларының айырымдық аналогтары, оларда конвективтік мүшелер ағын жылдамдығының таңбасы ескеріле отырып аппроксимацияланған [62].

q_1 бағыты бойынша $L_{1,h}$ операторы мынадай түрде болады

$$\begin{aligned}L_{1,h}\omega_{i,j}^{n+\frac{1}{2}}=\frac{1}{2h_1}&\left(\left(\frac{\partial\psi^n}{\partial q_2}\right)_{i-\frac{1}{2},j}+\left|\frac{\partial\psi^n}{\partial q_2}\right|_{i-\frac{1}{2},j}\right)\left(\omega_{i,j}^{n+\frac{1}{2}}-\omega_{i-1,j}^{n+\frac{1}{2}}\right)\\&+\left(\left(\frac{\partial\psi^n}{\partial q_2}\right)_{i+\frac{1}{2},j}-\left|\frac{\partial\psi^n}{\partial q_2}\right|_{i+\frac{1}{2},j}\right)\left(\omega_{i+1,j}^{n+\frac{1}{2}}-\omega_{i,j}^{n+\frac{1}{2}}\right)\\&-\frac{1}{Reh_1^2}\left[\Phi_{i+\frac{1}{2},j}\left(\omega_{i+1,j}^{n+\frac{1}{2}}-\omega_{i,j}^{n+\frac{1}{2}}\right)-\Phi_{i-\frac{1}{2}j}\left(\omega_{i,j}^{n+\frac{1}{2}}-\omega_{i-1,j}^{n+\frac{1}{2}}\right)\right]\end{aligned} \tag{2.79}$$

q_2 бағыты бойынша $L_{2,h}$ операторы

$$\begin{aligned}L_{2,h}\omega_{i,j}^{n+1}=\frac{1}{2h_2}&\left(\left(\frac{\partial\psi^n}{\partial q_1}\right)_{i,j-\frac{1}{2}}+\left|\frac{\partial\psi^n}{\partial q_1}\right|_{i,j-\frac{1}{2}}\right)\left(\omega_{i,j}^{n+1}-\omega_{i,j-1}^{n+1}\right)+\\&\left(\left(\frac{\partial\psi^n}{\partial q_1}\right)_{i,j+\frac{1}{2}}-\left|\frac{\partial\psi^n}{\partial q_1}\right|_{i,j+\frac{1}{2}}\right)\left(\omega_{i,j+1}^{n+1}-\omega_{i,j}^{n+1}\right)-\frac{1}{Reh_2^2}\left[\left(\frac{1}{\Phi}\right)_{i,j+\frac{1}{2}}\left(\omega_{i,j+1}^{n+1}-\right.\right.\\&\left.\left.\omega_{i,j}^{n+1}\right)-\left(\frac{1}{\Phi}\right)_{i,j-\frac{1}{2}}\left(\omega_{i,j}^{n+1}-\omega_{i-1,j}^{n+1}\right)\right]\end{aligned} \tag{2.80}$$

(2.63) және (2.64) теңдеулеріндегі екінші туындылардың сәйкес операторлары (2.77), (2.78) қатынастарында $O(h^2)$ ретімен аппроксимацияланған, мұндағы $h=max(h_1,h_2)$, ал ($h_k, k=1,2$- сәйкесінше q_1, q_2 бағыттары бойынша параметрлік тор қадамдары).

Ақырлы айырымдық схеманы құру кезінде кеңістіктік айнымалылар бойынша туындылар орталық айырымдар арқылы аппроксимацияланған.

Re санының кіші мәндеріндегі есептің шешімі ең маңызды болып табылады.

Кіріс шекаралық шарттар декарт координаталарында былай беріледі

$$u = 3(x_2 - x_2^2/2), \upsilon = 0 \quad x_1 = 0, 0 \le x_2 \le 1.$$

Ал тоқтың функциясы

$$\psi = (3x_2^2 - x_2^3)/2, \ \frac{\partial \psi}{\partial x_1} = 0 \ , x_1 = 0, 0 \le x_2 \le 1.$$

Қатты қабырғада табиғи түрде жабысу және ағып өтпеу шарттары ($0 \le x_1 \le x_{1l}$, $x_2 = f(x_1)$) белгіленген; симметрия шарттары $0 \le x_1 \le x_{1l}$, $x_2 = 1$, ал шығысында «жұмсақ» шекаралық шарттар қарастырылған

$$\frac{\partial \omega}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial \psi}{\partial x} = 0$$

Бұл кері бағыт бойынша алынған қадамға ұқсас ағын есебі, тұтқырлықтың әсері кіріс шекарасында маңызды, сондықтан кіріс шекарасында ψ және $\frac{\partial u}{\partial x_2}$ шамаларын бекіту жөн, ал

$$\omega = \frac{\partial u}{\partial x_2} - \frac{\partial \upsilon}{\partial x_1}$$

шамасы кірістегі $\frac{\partial u}{\partial x_2}$ және $\frac{\partial \upsilon}{\partial x_1}$ мәндерінен табылады.

Кірісте $\frac{\partial \upsilon}{\partial x_1}$ мәнін анықтайық. Белгілі болғандай, $\upsilon = -\frac{\partial \psi}{\partial x_1}$.

Қисық сызықты координатада υ -ды мына түрде аламыз.

$$\upsilon = \frac{a_{21}\frac{\partial \psi}{\partial q_2} - a_{22}\frac{\partial \psi}{\partial q_1}}{\sqrt{g_{11}\, g_{22}}}$$

ақырлы айырымдық түрінде

$$\upsilon_{2j} = \left((a_{21})_{2,j}\frac{\psi_{2,j+1} - \psi_{3,j-1}}{2h_2} - (a_{22})_{2,j}\frac{\psi_{3,j} - \psi_{1,j}}{2h_1}\right) / \left(\sqrt{g_{11}\, g_{22}}\right)_{2,j} \quad (2.81)$$

$\frac{\partial \upsilon}{\partial x_1}$ функциясын ортогоналды қисық сызықты координаттарда көрсетейік.

$$\frac{\partial \upsilon}{\partial x_1} = \frac{\partial \upsilon}{\partial q_1}\frac{\partial q_1}{\partial x_1} + \frac{\partial \upsilon}{\partial q_2}\frac{\partial q_2}{\partial x_1}$$

$\frac{\partial q_1}{\partial x_1} = \frac{1}{J}\frac{\partial x_2}{\partial q_2}$, $\frac{\partial q_2}{\partial x_1} = -\frac{1}{J}\frac{\partial x_2}{\partial q_1}$ формуласын түрлендіру арқылы мына теңдікті аламыз

$$\frac{\partial \upsilon}{\partial x_1} = \frac{1}{J}\left(a_{22}\frac{\partial \upsilon}{\partial q_1} - a_{21}\frac{\partial \upsilon}{\partial q_2}\right)$$

бізде бар осы теңдікті ескере отырып $\left.\frac{\partial \upsilon}{\partial q_2}\right|_{1,\mathrm{j}} = 0$

$$\left.\frac{\partial \upsilon}{\partial x_1}\right|_{1,\mathrm{j}} = \left(\frac{a_{22}}{J}\frac{\partial \upsilon}{\partial q_1}\right)u_{1,j}$$

$\upsilon_{1j} = 0$ мына теңдіктен төмендегі теңдік орындалады

$$\left.\frac{\partial \upsilon}{\partial x_1}\right|_{1,\mathrm{j}} = \left(\frac{a_{22}}{J}\right)_{1,j}\upsilon_{2,j}/h_1$$

мұндағы $\upsilon_{2\mathrm{j}}$ (2.81) қатынасынан анықталады.

Еркін ортогоналды қисық сызықты координаталардағы қатты қабырғадағы жылдамдық иірімін анықтауға арналған Том шартын қорытып есептеймыз, ол үшін $q_2 = 0,\ 0 \le q_1 \le 1$ кезіндегі тоқ функциясын анықтау теңдеуінен алатынымыз, яғни j=0 болғандағы теңдеу:

$$\left(\sqrt{g_{11}\,g_{22}}\right)_{i,0}\omega_{i,0} = \frac{\partial}{\partial q_2}\left(\sqrt{\frac{g_{11}}{g_{22}}}\frac{\partial \psi}{\partial q_2}\right)_{i,0} \qquad (2.82)$$

Келесі функцияны $(i,0)$ нүктесі маңында Тейлор қатарына жіктейік

$$\left(\sqrt{\frac{g_{11}}{g_{22}}}\frac{\partial \psi}{\partial q_2}\right)_{i,\frac{1}{2}} = \left(\sqrt{\frac{g_{11}}{g_{22}}}\frac{\partial \psi}{\partial q_2}\right)_{i,0} + \frac{h_2}{2}\frac{\partial}{\partial q_2}\left(\sqrt{\frac{g_{11}}{g_{22}}}\frac{\partial \psi}{\partial q_2}\right)_{i,0} + \frac{h_2^2}{8}\frac{\partial^2}{\partial q_2}\left(\sqrt{\frac{g_{11}}{g_{22}}}\frac{\partial \psi}{\partial q_2}\right)_{i,0} + O(h_2^3) \qquad (2.83)$$

$\left(\frac{\partial \psi}{\partial q_2}\right)_{i,0} = 0$ болатынын ескерсек, бізде мынадай өрнек шығады

$$\left(\sqrt{\frac{g_{11}}{g_{22}}}\frac{\partial \psi}{\partial q_2}\right)_{i,1/2} = \frac{h_2}{2}\frac{\partial}{\partial q_2}\left(\sqrt{\frac{g_{11}}{g_{22}}}\frac{\partial \psi}{\partial q_2}\right)_{i,0} + O(h_2^2) \qquad (2.84)$$

(2.83)-тен табамыз

$$\frac{\partial}{\partial q_2}\left(\sqrt{\frac{g_{11}}{g_{22}}}\frac{\partial \psi}{\partial q_2}\right)_{i,0} = \frac{2}{h_2}\left(\sqrt{\frac{g_{11}}{g_{22}}}\frac{\partial \psi}{\partial q_2}\right)_{i,1/2} + O(h_2) \qquad (2.85)$$

(2.85) формуласының оң жақ бөлігін (2.82) формуласының оң жақ бөлігіне қоямыз

$$\left(\sqrt{g_{11}\, g_{22}}\right)_{i,0}\omega_{i,0} = \frac{2}{h_2}\left(\sqrt{\frac{g_{11}}{g_{22}}}\frac{\partial \psi}{\partial q_2}\right)_{i,1/2}$$

Осы формуламен қатты қабырғадағы жылдамдық иірімін анықтаймыз

$$\omega_{i,0} = \frac{2}{h_2}\frac{1}{\left(\sqrt{g_{11}\, g_{22}}\right)_{i,0}}\left(\sqrt{\frac{g_{11}}{g_{22}}}\frac{\partial \psi}{\partial q_2}\right)_{i,1/2} \qquad (2.86)$$

(2.86) теңдеуін ақырлы айырымдық түрде жазамыз

$$\omega_{i,0} = \frac{2}{h_2^2}\frac{1}{\left(\sqrt{g_{11}\, g_{22}}\right)_{i,0}}\left(\sqrt{\frac{g_{11}}{g_{22}}}\right)_{i,\frac{1}{2}}\left(\psi_{i,1}^n - \psi_{i,0}^n\right) \qquad (2.87)$$

Қарастырылып отырған мәселе үшін Том формуласын (2.87) қолдану жеткілікті, өйткені Рейнольдс саны орташа және біз сынақ есебін шешіп жатырмыз. Том формуласы берік, қарапайым және торды нақтылау арқылы қолайлы дәлдікті қамтамасыз етеді. Вудс формуласы жоғары Рейнольдс сандары үшін және жұқа шекаралық қабаттарды есептеу үшін қолданылады.

Навье-Стокс теңдеулерін ψ және ω айнымалылары арқылы сандық түрде шешеміз. Енді қысым өрісін анықтау керек. Ол үшін Навье-Стокс теңдеулерін u, v және p айнымалылары арқылы қарастырамыз.

$$u\frac{\partial u}{\partial x_1} + v\frac{\partial u}{\partial x_2} + \frac{\partial p}{\partial x_1} = \frac{1}{Re}\Delta u,$$

$$u\frac{\partial v}{\partial x_1} + v\frac{\partial v}{\partial x_2} + \frac{\partial p}{\partial x_2} = \frac{1}{Re}\Delta v, \qquad (2.88)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x_1} + \frac{\partial \upsilon}{\partial x_2} = 0.$$

Әрі қарай, бірінші теңдеуден (2.88) келесі теңдеуді аламыз

$$u\frac{\partial u}{\partial x_1} + \frac{\partial p}{\partial x_1} = -\upsilon\frac{\partial u}{\partial x_2} + \frac{1}{Re}\Delta u \tag{2.89}$$

сол жағында x_1 -ге қатысты туындыларды біріктірейік

$$\frac{\partial\left(p + \frac{u^2}{2}\right)}{\partial x_1} = -\upsilon\frac{\partial u}{\partial x_2} + \frac{1}{Re}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}\right)$$

үзіліссіздік теңдеуін пайдаланып оң жақ бөлігін түрлендіреміз

$$\begin{aligned}\frac{\partial\left(p + \frac{u^2}{2}\right)}{\partial x_1} &= \frac{\partial\psi}{\partial x_1}\left(\frac{\partial u}{\partial x_2}\right) + \frac{1}{Re}\left[\frac{\partial}{\partial x_2}\left(\frac{\partial u}{\partial x_2}\right) + \frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{\partial u}{\partial x_1}\right)\right] = \\ &= \frac{\partial\psi}{\partial x_1}\left(\frac{\partial u}{\partial x_2}\right) + \frac{1}{Re}\left[\frac{\partial}{\partial x_2}\left(\frac{\partial u}{\partial x_2}\right) - \frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{\partial \upsilon}{\partial x_2}\right)\right]\end{aligned} \tag{2.90}$$

сол және оң жақтарына $\upsilon\frac{\partial\,\upsilon}{\partial x_1}$ қосайық

$$\frac{\partial\left(p + \frac{u^2}{2}\right)}{\partial x_1} + \upsilon\frac{\partial\,\upsilon}{\partial x_1} = \frac{\partial\psi}{\partial x_1}\left(\frac{\partial u}{\partial x_2}\right) + \upsilon\frac{\partial\,\upsilon}{\partial x_1} + \frac{1}{Re}\left[\frac{\partial}{\partial x_2}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right) - \frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{\partial \upsilon}{\partial x_2}\right)\right]$$

онда бұл қатынас келесі формада болады:

$$\frac{\partial(p + \frac{u^2}{2} + \frac{\upsilon^2}{2})}{\partial x_1} = \frac{\partial\psi}{\partial x_1}\omega + \frac{1}{Re}\frac{\partial\omega}{\partial x_2} \tag{2.91}$$

$\Pi = p + (u^2 + \upsilon^2)/2$ толық қысымын белгілейік, (2.91)-ге сәйкес мынадай нәтиже аламыз

$$\frac{\partial\Pi}{\partial x_1} = \frac{1}{Re}\frac{\partial\omega}{\partial x_2} + \frac{\partial\psi}{\partial x_1}\omega \tag{2.92}$$

Екінші теңдеу де осылай түрленеді (2.88).

$$\frac{\partial\left(p+\frac{\upsilon^2}{2}\right)}{\partial x_2}=-u\frac{\partial \upsilon}{\partial x_1}+\frac{1}{Re}\left(\frac{\partial^2 \upsilon}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2 \upsilon}{\partial x_2^2}\right)$$

үзіліссіздік теңдеуін пайдалана отырып, оң жақ бөлігін түрлендіреміз

$$\frac{\partial\left(p+\frac{\upsilon^2}{2}\right)}{\partial x_2}=-\frac{\partial\psi}{\partial x_2}\frac{\partial \upsilon}{\partial x_1}+\frac{1}{Re}\left[\frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{\partial \upsilon}{\partial x_1}\right)+\frac{\partial}{\partial x_2}\left(\frac{\partial \upsilon}{\partial x_2}\right)\right]= \tag{2.93}$$

$$=-\frac{\partial\psi}{\partial x_2}\frac{\partial \upsilon}{\partial x_1}+\frac{1}{Re}\left[\frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{\partial \upsilon}{\partial x_1}\right)-\frac{\partial}{\partial x_2}\left(\frac{\partial u}{\partial x_1}\right)\right]$$

теңдеудің сол және оң жағына $u\frac{\partial u}{\partial x_2}$ шамасын қосамыз

$$\frac{\partial\left(p+\frac{\upsilon^2}{2}\right)}{\partial x_2}+u\frac{\partial u}{\partial x_2}$$

$$=-\frac{\partial\psi}{\partial x_2}\frac{\partial \upsilon}{\partial x_1}+u\frac{\partial u}{\partial x_2}-\frac{1}{Re}\left[\frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{\partial u}{\partial x_2}\right)-\frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{\partial \upsilon}{\partial x_1}\right)\right]$$

онда бұл қатынас келесі түрге ие болады:

$$\frac{\partial(p+\frac{\upsilon^2}{2}+\frac{u^2}{2})}{\partial x_2}=\frac{\partial\psi}{\partial x_2}\omega-\frac{1}{Re}\frac{\partial\omega}{\partial x_1} \tag{2.94}$$

$\Pi=p+(\upsilon^2+u^2)/2$ толық қысымын белгілейік, (2.94)-теңдеуден алатынымыз

$$\frac{\partial\Pi}{\partial x_2}=-\frac{1}{Re}\frac{\partial\omega}{\partial x_1}+\frac{\partial\psi}{\partial x_2}\omega\,, \tag{2.95}$$

(2.61) теңдеулер жүйесінде қысым қарастырылмаған, алайда оны тоқ функциясы мен жылдамдық иірімі үшін белгілі шешім негізінде қадамдап интегралдау әдісімен [60] анықтауға болады. Толық қысымды табу үшін Навье-Стокс теңдеуіндегі айнымалыларды түрлендіреміз. Толық қысым $\Pi=p+(u^2+\upsilon^2)/2$ оның градиенті бойынша есептеледі.

$$\frac{\partial\Pi}{\partial x_1}=\frac{1}{Re}\frac{\partial\omega}{\partial x_2}+\frac{\partial\psi}{\partial x_1}\omega\,, \tag{2.96}$$

$$\frac{\partial\Pi}{\partial x_2}=-\frac{1}{Re}\frac{\partial\omega}{\partial x_1}+\frac{\partial\psi}{\partial x_2}\omega\,,$$

Ортогонал қисық сызықты координаттарда (2.96) теңдеулерін жазамыз

$$\begin{cases} f_1 = \dfrac{\partial \Pi}{\partial x_1} = \dfrac{\partial x_2}{\partial q_2}\dfrac{\partial \Pi}{\partial q_1} - \dfrac{\partial x_2}{\partial q_1}\dfrac{\partial \Pi}{\partial q_2} \\ f_2 = \dfrac{\partial \Pi}{\partial x_2} = \dfrac{\partial x_1}{\partial q_2}\dfrac{\partial \Pi}{\partial q_1} - \dfrac{\partial x_1}{\partial q_1}\dfrac{\partial \Pi}{\partial q_2} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \dfrac{\partial x_2}{\partial q_2}\dfrac{\partial \Pi}{\partial q_1} - \dfrac{\partial x_2}{\partial q_1}\dfrac{\partial \Pi}{\partial q_2} = a_{22}\dfrac{\partial \Pi}{\partial q_1} - a_{21}\dfrac{\partial \Pi}{\partial q_2} \\ \dfrac{\partial x_1}{\partial q_2}\dfrac{\partial \Pi}{\partial q_1} - \dfrac{\partial x_1}{\partial q_1}\dfrac{\partial \Pi}{\partial q_2} = -a_{12}\dfrac{\partial \Pi}{\partial q_1} + a_{11}\dfrac{\partial \Pi}{\partial q_2} \end{cases}$$

мұндағы,

$$f_1 = \frac{1}{Re}\left(-a_{12}\frac{\partial \omega}{\partial q_1} + a_{11}\frac{\partial \omega}{q_2}\right) + \left(a_{22}\frac{\partial \psi}{\partial q_1} - a_{21}\frac{\partial \psi}{q_2}\right)\omega, \tag{2.97}$$

$$f_2 = -\frac{1}{Re}\left(a_{22}\frac{\partial \omega}{\partial q_1} - a_{21}\frac{\partial \omega}{q_2}\right) + \left(-a_{12}\frac{\partial \psi}{\partial q_1} + a_{11}\frac{\partial \psi}{q_2}\right)\omega,$$

(2.96) формуладан төмендегі теңдік шығады

$$\frac{\partial \Pi}{\partial q_1} = \frac{a_{11}f_1 + a_{21}f_2}{a_{11}\,a_{22} - a_{12}\;a_{21}}, \tag{2.98}$$

$$\frac{\partial \Pi}{\partial q_2} = \frac{a_{12}f_1 + a_{22}f_2}{a_{11}\,a_{22} - a_{12}\;a_{21}}\,.$$

Айырымдық схема түрінде:

$$\begin{aligned} f_{1,i,j} = \frac{1}{Re}\Bigg(&-a_{12}\frac{\omega_{i+1,j} - \omega_{i,j}}{h_1} + a_{11}\frac{\omega_{i,j+1} - \omega_{i,j}}{h_2}\Bigg) \\ &+ \left(a_{22}\frac{\psi_{i+1,j} - \psi_{i,j}}{h_1} - a_{21}\frac{\psi_{i,j+1} - \psi_{i,j}}{h_2}\right)\omega_{i,j}, \\ f_{2,i,j} = -\frac{1}{Re}\Bigg(&a_{22}\frac{\omega_{i+1,j} - \omega_{i,j}}{h_1} - a_{21}\frac{\omega_{i,j+1} - \omega_{i,j}}{h_2}\Bigg) \\ &+ \left(-a_{12}\frac{\psi_{i+1,j} - \psi_{i,j}}{h_1} + a_{11}\frac{\psi_{i,j+1} - \psi_{i,j}}{h_2}\right)\omega_{i,j}, \end{aligned} \tag{2.99}$$

мұндағы,

$$(a_{12})_{i,j} = \left(\frac{\partial x_1}{\partial q_2}\right)_{i,j} = \frac{x_{1,i,j+1} - x_{1,i,j}}{h_2},\ (a_{11})_{i,j} = \left(\frac{\partial x_1}{\partial q_1}\right)_{i,j} = \frac{x_{2,i+1,j} - x_{2,i,j}}{h_1}, \tag{2.100}$$

$$(a_{22})_{i,j} = \left(\frac{\partial x_2}{\partial q_2}\right)_{i,j} = \frac{x_{1,i,j+1} - x_{2,i,j}}{h_2},\ \ (a_{21})_{i,j} = \left(\frac{\partial x_2}{\partial q_1}\right)_{i,j} = \frac{x_{2,i+1,j} - x_{2,i,j}}{h_1},$$

Түрлендірлген якобиан мына түрде беріледі

$$J = a_{11}a_{22} - a_{21}\,a_{12},\ a_{ij} = \frac{\partial x_i}{\partial q_j}$$

Теңдеулерді (2.98) айырымдылық түрде жазамыз

$$\frac{\Pi_{i+1,j} - \Pi_{i,j}}{h_1} = \frac{1}{J_{i,j}}\left((a_{11})_{i,j} f_{1,i,j} + (a_{21})_{i,j} f_{2,i,j}\right), \qquad (2.101)$$

$$\frac{\Pi_{i,j+1} - \Pi_{i,j}}{h_2} = \frac{1}{J_{i,j}}\left((a_{12})_{i,j} f_{1,i,j} + (a_{22})_{i,j} f_{2,i,j}\right).$$

Тек қатты қабырғадағы қысымды (2.101) формуласымен есептеу үшін $\Pi_{n1/2,0} = 0$ теңдігін алып, алдымен формула бойынша солға қарай жылжимыз.

$$\Pi_{ip-1,0} = \Pi_{ip,0} - h_1\left((a_{11})_{ip,0} f_{1,ip,0} + (a_{21})_{ip,0} f_{2,ip,0}\right) \qquad (2.102)$$

мұнда

$$ip = \left[\frac{n1}{2}\right], \left[\frac{n1}{2}\right] - 1, \left[\frac{n1}{2}\right] - 2, \ldots\ldots\ldots, 0.$$

содан кейін формула бойынша оңға жылжимыз

$$\Pi_{ip,0} = \Pi_{ip-1,0} + h_1\left((a_{11})_{ip-1,0} f_{1,ip-1,0} + (a_{21})_{ip-1,0} f_{2,ip-1,0}\right) \qquad (2.103)$$

мұндағы

$$ip = \left[\frac{n1}{2}\right] + 1, \left[\frac{n1}{2}\right] + 2, \ldots\ldots\ldots, n1.$$

Қысымды есептеу үшін тек бірінші формула (2.101) қолданылады. Жылдамдық пен қысым айнымалыларында Навье-Стокс теңдеуін шешудің белгілі әдістеріндегідей эллиптикалық теңдеу қолданылмайды.

2.7. Есептеу нәтижелері және талқылау

Компьютердегі сандық есептеу $\tau = 0.05$ және Re = 10 параметрлерінің мәндерінде жүргізілді. Есептеу торы (41×41) өлшемінде болды. Қатты

қабырғадағы жылдамдық иірімі мәндері α=0.025 релаксация параметрі қолданылған Том формуласы бойынша есептелді. Тоқ функциясының мәнін анықтауға арналған эллипстік теңдеу $\gamma = 1.72$ коэффициентін қамти отырып жоғарғы релаксация әдісі арқылы шешіледі.

Есептеу нәтижесі [36] жұмысында келтірілген белгілі нәтижелермен салыстырылды. Мұнда қойылған есепті әртүрлі әдістермен шешкен он бес зерттеу тобының сандық есептеу нәтижелері көрсетілді.

1-кестеде авторлар ұжымының аты-жөні мен жұмыс орны, қолданылған сандық әдіс және ЭЕМ типі, ал соңында авторлар тегінің бас әріптері қысқартылған түрде көрсетілген.

№2.1. Кесте Зерттеу тобы ақпараттарды

№	Есептеуіштер	Жұмыс орны	Сандық әдіс	Айнымалылар	ЭЕМ түрі
	Alfrink	D e		u, v,p	CYBER 175
	Cliffe et al.	AERE Harwell.U.K		u, v,p	CRAY 1
	Demorovic and Gosman	Imperial College London .U.K.		u, v,p	CDC 6600
	Goussebaile et al.	Lab.Nat. d'Hydraulique Chatou, France		u, v,p	CRAY 1
	Grandotto	Commissariat A I'Energie Atomique, France		u, v,p	CRAY 1
	Guj and Favini	Universita di Roma 'La Sapenza Italy		u, v,p	UNIVAC 110082
	Hutton	Central Electricity Generating Board		u, v,p	IBM 3032
	Khaletzky	NEYRPIC, France		u, v,p	AS7000
	Latrobe and Delapierre	Commissariat A I'Energie Atomique, France		u, v,p	CDC 7600
	Madi and Napolitano	Universita di Rari, Italy		ψ, ω	HP 1000F
	Porter et al.	AERE Harwell,U.K.		u, v,p	IBM 1 3033
	Quartapelle and Napolitano	Politecnico,di Milano, Italy		ψ, ω	AMDHL 470V8
	Rastogi	A.S. Veritas Rerearch, Norway		u, v,p	UNIVAC 1100
	Schonauer	Universital Karlsruhe, Germany		w, u,v	SIEMENS 7865
	Wada and Adachi	Cen.Res. Inst.of Electric Power		ψ, ω	CRAY 1
	Wada et al.	Industry Japan		u, v,p	CRAY 1

Барлық қатысушы топтардың сандық нәтижелері Cliffe K.A., Jackson C.P., Greenfield A.C. нәтижелерімен салыстырылды. 2-кестеде жылдамдық иірімі

мәнін есептеу нәтижелері, ал 3-кестеде барлық зерттеу топтарының қатты қабырғадағы қысымды есептеу нәтижелері берілген.

Бұл ретте қысым мәні $x_1 = x_{1l}/2$ болған кезде нөлге тең етіп таңдалды. CJG нәтижесімен салыстырғандағы ε_ω , ε_p қателік пайыздары мына қатынастар арқылы есептеледі.

$$\varepsilon_\omega = \frac{100}{19}\sum_{i=2}^{20}\left|\frac{\omega_i - \omega_{i,CJG}}{\omega_{i,CJG}}\right|, \quad \varepsilon_p = \frac{100}{19}\sum_{i=2}^{20}\left|\frac{P_i - P_{i,CJG}}{P_{i,CJG}}\right| \tag{2.104}$$

Барлық әдістер үшін есептеу қателері, компьютердегі есептеу уақыты, қабырғадағы жылдамдық иірімі минималды және шығыс мәндері 4-кестеде келтірілген.

№2.2 кесте. Барлық зерттеу топтарының қатты қабырғадағы жылдамдық иірімі есептеу нәтижелері

x_1 $/x_{1l}$	WA2	DG	G	GBV	GF	H	K	LD	MN	PSW	QN	R	S	WAI	CJG	Біздің нәтижелер
0.00	3.000	2.9890	2.9900	2.9700	2.9710	3.0000	3.0000	3.0000	3.0113	3.0000	3.0750	3.0000	3.0000	3.0000	3.000	3.000
0.05	2.5660	2.9320	2.5600	2.3000	2.2170	2.5760	2.5800	2.4000	2.5809	2.6100	2.5415	2.400	2.5812	1.6710	2.5750	2.8755
0.1	1.8200	1.8670	1.8240	1.6300	1.4470	1.6977	1.7000	1.7200	1.6524	1.6980	1.7594	1.4660	1.7002	0.9630	1.7060	1.7047
0.15	0.9330	0.4577	0.6810	0.330	0.2710	0.3923	0.7000	0.2400	0.4952	0.3920	0.4004	0.0660	0.3982	0.1870	0.3990	0.3925
0.2	0.1520	-0.0435	0.0540	-0.0300	-0.2330	-0.0924	0.0300	-0.0800	-0.0842	-0.0920	-0.1201	-0.0800	-0.0961	-0.0570	0.1000	-0.1175
0.25	0.0160	-0.0851	-0.0760	-0.1000	-0.2280	-0.01	-0.1000	-0.1300	-0.1302	-0.1300	-0.1312	-0.1000	-0.1329	-0.0930	-0.1350	-0.1612
0.3	-0.0510	-0.1042	-0.0760	-0.1000	-0.1670	-0.1074	-0.1000	-0.0900	-0.1091	-0.1250	-0.1075	-0.1220	-0.1071	-0.0850	-0.1080	-0.1328
0.35	-0.0002	-0.0996	-0.0690	-0.0800	-0.1470	-0.1043	-0.0900	-0.1100	-0.1035	-0.1180	-0.1044	-0.1240	-0.1050	-0.0810	-0.1060	-0.1236
0.4	0.0450	-0.0874	-0.0570	-0.0700	-0.1420	-0.1015	-0.0700	-0.1200	-0.0995	-0.1020	-0.1034	-0.1040	-0.1030	-0.0770	-0.1030	-0.1168
0.45	0.0640	-0.0536	-0.0280	-0.0300	-0.1220	-0.0772	-0.0400	-0.0900	-0.0733	-0.0800	-0.0792	-0.0620	-0.0787	-0.0710	-0.0790	-0.0946
0.5	0.0900	-0.0010	0.0190	0.000	-0.0810	-0.0293	0.0200	-0.0300	-0.0261	-0.0350	-0.0327	0.0000	-0.0320	-0.0520	-0.0330	-0.0531
0.55	0.1330	0.0614	0.0760	0.0700	-0.0230	0.0327	0.0700	0.0200	0.0338	0.0250	0.0276	0.0660	0.0283	0.0270	0.0270	0.00200
0.6	0.1830	0.1261	0.1380	0.1300	0.0420	0.1009	0.1300	0.0900	0.0989	0.0840	0.0936	0.1320	0.0938	0.0090	0.0920	0.06337
0.65	0.2360	0.1884	0.2010	0.2000	0.1090	0.1705	0.1900	0.1500	0.1629	0.1480	0.1593	0.2000	0.1591	0.0460	0.1570	0.12501
0.7	0.2900	0.2451	0.2620	0.2700	0.1730	0.2384	0.2500	0.2200	0.2225	0.2040	0.2209	0.2320	0.2207	0.0810	0.2170	0.18286
0.75	0.3450	0.2939	0.3210	0.300	0.2330	0.3034	0.3000	0.2600	0.2761	0.2560	0.2766	0.2660	0.2765	0.1130	0.2720	0.23421
0.8	0.4050	0.3331	0.3770	0.3500	0.2840	0.3652	0.3400	0.3100	0.3228	0.2960	0.3257	0.3000	0.3251	0.1270	0.3190	0.27716
0.85	0.4740	0.3611	0.4280	0.3500	0.3270	0.423	0.3900	0.3400	0.3614	0.3300	0.3667	0.3320	0.3652	0.1650	0.3570	0.31065
0.9	0.5590	0.3766	0.4730	0.3300	0.3590	0.4753	0.4300	0.3400	0.3869	0.3400	0.3943	0.3320	0.3957	0.1780	0.3850	0.33597
0.95	0.6610	0.3811	0.5070	0.3200	0.3790	0.5152	0.4500	0.3400	0.4108	0.3660	0.4122	0.3320	0.4151	0.1920	0.4020	0.35532
1	0.7530	0.3856	0.5210	0.3100	0.3840	0.5317	0.4700	0.3400	0.43413.	0.3926	0.4215	0.3320	0.4220	0.1970	0.4080	0.35532

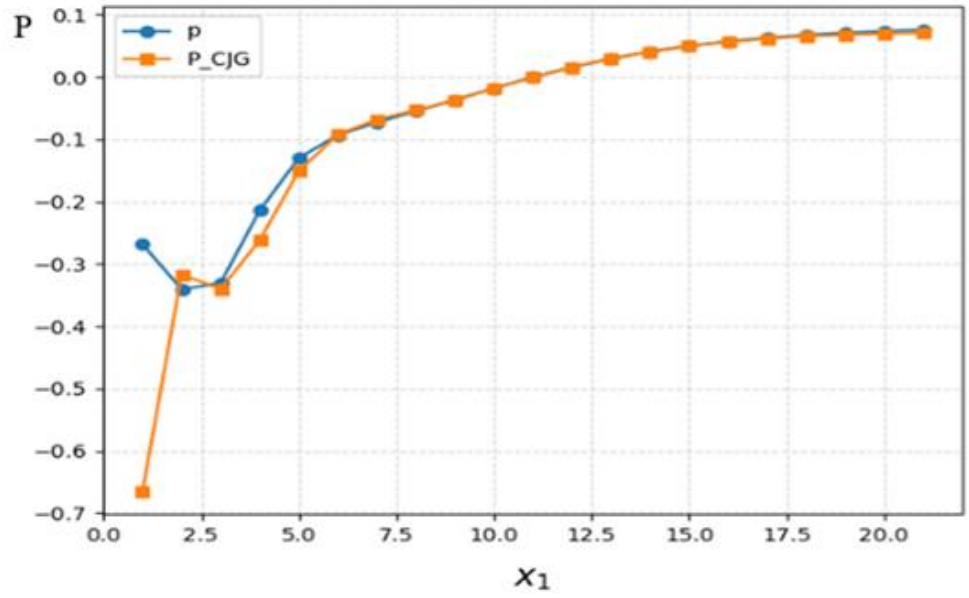
№2.3 кесте. Барлық зерттеу топтарының қатты қабырғаға түсетін қысымды есептеу нәтижелері.

x_1/x_{1l}	WA2	A	DG	G	GBV	GF	H	K	LD	MN	PSW	R	WAI	CJG	Біздің нәтижелер
0.00	-0.045	-0.2890	-0.2094	-0.2690	-0.3125	-0.4460	-0.4154	-0.2300	-0.3240	-0.30888	-0.3028	-0.1625	-0.0830	-0.6650	-0.2685
0.05	-0.05	-0.2840	-0.2523	-0.3040	-0.2900	-0.3880	-0.3187	-0.2400	-0.3140	-0.3163	-0.3166	-0.1450	-0.1020	-0.3170	-0.3406
0.1	-0.064	-0.2610	-0.2952	-0.3200	-0.2675	-0.3370	-0.3386	-0.2400	-0.3100	-0.3113	-0.3280	-0.1250	-0.1060	-0.3400	-0.3304
0.15	-0.048	-0.2160	-0.2339	-0.2570	-0.2150	-0.2610	-0.2602	-0.2050	-0.2400	-0.2467	-0.2620	-0.0750	-0.0810	-0.2620	-0.2142
0.2	-0.035	-0.1560	-0.1458	-0.1520	-0.1400	-0.1640	-0.1497	-0.1400	-0.1560	-0.1514	-0.1660	-0.0375	-0.0570	-0.1510	-0.1299
0.25	-0.02	-0.1040	-0.1001	-0.0960	-0.0875	-0.1020	-0.0933	-0.0960	-0.0940	-0.0948	-0.1063	-0.0225	-0.0400	-0.0920	-0.0931
0.3	-0.009	-0.0710	-0.0756	-0.0700	-0.0600	-0.0740	-0.0683	-0.0700	-0.0680	-0.0680	-0.0781	-0.0175	-0.0290	-0.0680	-0.0725
0.35	-0.008	-0.0520	-0.0553	-0.0530	-0.0450	-0.0560	-0.0529	-0.0500	-0.0500	-0.0514	-0.0556	-0.0125	-0.0190	-0.0530	-0.0547
0.4	-0.006	-0.0350	-0.0362	-0.0360	-0.0300	-0.0390	-0.0388	-0.0320	-0.0320	-0.0351	-0.0370	-0.0100	-0.0100	-0.0370	-0.0364
0.45	-0.003	-0.0180	-0.0174	-0.0180	-0.0150	-0.0190	-0.0178	-0.0170	-0.0160	-0.0173	-0.0196	-0.0050	-0.0070	-0.0180	-0.0177
0.5	0.0000	0.0000	-0.000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.000	0.0000	0.000	0.0000	0.0000	0.0
0.55	0.0040	0.0170	0.151	0.0160	0.0175	0.0180	0.0165	0.0170	0.0160	0.0156	0.0149	0.0075	0.0060	0.0160	0.0160
0.6	0.007	0.0320	0.0278	0.0300	0.0275	0.0330	0.0302	0.0300	0.0280	0.0289	0.0284	0.0125	0.0130	0.0300	0.0297
0.65	0.01	0.0440	0.0380	0.0410	0.0375	0.0460	0.0413	0.0420	0.0400	0.0397	0.0392	0.0200	0.0190	0.0410	0.0412
0.7	0.017	0.0550	0.0459	0.0500	0.0425	0.0570	0.0404	0.0500	0.0480	0.0482	0.0482	0.0220	0.0230	0.0500	0.0503
0.75	0.018	0.0640	0.0520	0.0570	0.0500	0.650	0.0574	0.0600	0.0560	0.0548	0.0560	0.0270	0.0270	0.0570	0.0576
0.8	0.016	0.0710	0.0565	0.0610	0.0550	0.0710	0.0133	0.0650	0.0640	0.0598	0.0605	0.0310	0.0300	0.0620	0.0633
0.85	0.16	0.0760	0.0559	0.0640	0.0600	0.0660	0.0636	0.0700	0.0680	0.0633	0.0656	0.0330	0.0330	0.0660	0.0678
0.9	0.014	0.0810	0.0628	0.0630	0.0675	0.0790	0.0634	0.0720	0.0730	0.0654	0.0692	0.0350	0.0350	0.0680	0.0713
0.95	0.008	0.0856	0.0660	0.0610	0.0725	0.0810	0.0603	0.0720	0.0740	0.0673	0.0734	0.0370	0.0370	0.0700	0.0739
1	-0.003	0.0860	0.0691	0.0590	0.0775	0.0830	0.0560	0.0720	0.0760	0.0692	0.0797	0.0380	0.0380	0.0710	0.0764

№2.4. кесте

Есептеуші	Санау уақыты	ω_{min}	$\omega_{\text{вых}}$	ε_{ω}	ε_{p}
A	168-0				10.67
DG	9-6	-0.1042	0.3856	26.51	8.11
G	5-9	-0.079	0.5210	52.12	2.63
GBV	120-8	-0.1000	0.3100	34.92	11.15
GF	60-0	-0.2330	0.3810	48.98	10.72
H	7-65	-0.1311	0.5317	9.22	2.24
K	62-0	-0.1000	0.4700	41.21	8.24
LD	6415-0	-0.1300	0.3400	10.75	4.81
MN	1-2	0.1302	0.4341	6.70	3.44
PSW	10-0	-0.1300	0.3928	6.30	4.97
QN	104-0	-0.1312	0.4215	2.63	
R	19-0	-0.1240	0.3320	30.14	61.25
S	168-0	-0.1329	0.4220	1.74	
WA2	3-91	-0.051	0.7530	111.92	78.92
WAI		-0.930	0.1970	55.04	58.56
CJG		-0.1350	0.5080	0.0	0.0
Біздің нәтижелер	90	-0.1612	0.4021	15.2832	6.7604

Алынған нәтиже CJG [36] тобының эталондық деректерімен салыстырылды, бұл Re=10 кезіндегі кеңейетін арнадағы ламинарлы ағын есебінде стандарт ретінде қабылданған. 4-кестеден көрініп тұрғандай, қысым бойынша салыстырмалы қателік небәрі $\varepsilon_p = 6.76\%$- ды құрайды, бұл қысым градиентінің жоғары дәлдікпен берілгенін және оны ψ, ω айнымалылары арқылы қалпына келтіру процедурасының дұрыстығын айғақтайды. Жылдамдық иірімі бойынша қателік $\varepsilon_{\omega} = 15.2832$ көптеген белгілі әдістер (мысалы, DG=26.51%, GBV=34.92%) деңгейінде болып, рециркуляциялық аймақтың қанағаттанарлықтай көрсетілгенін білдіреді. Бұл ретте есептеу уақыты (90 секунд) басқа тәсілдермен салыстырғанда қолайлы деңгейде қалады. Қысым және жылдамдық иірімі профильдері (2.9–2.13-сурет) 16 тәуелсіз зерттеу нәтижелерімен сапалы және сандық тұрғыдан сәйкес келеді, бұл қисықсызықты координаттар жүйесіндегі ұсынылған сызбаның физикалық дұрыстығы мен сандық орнықтылығын растайды.



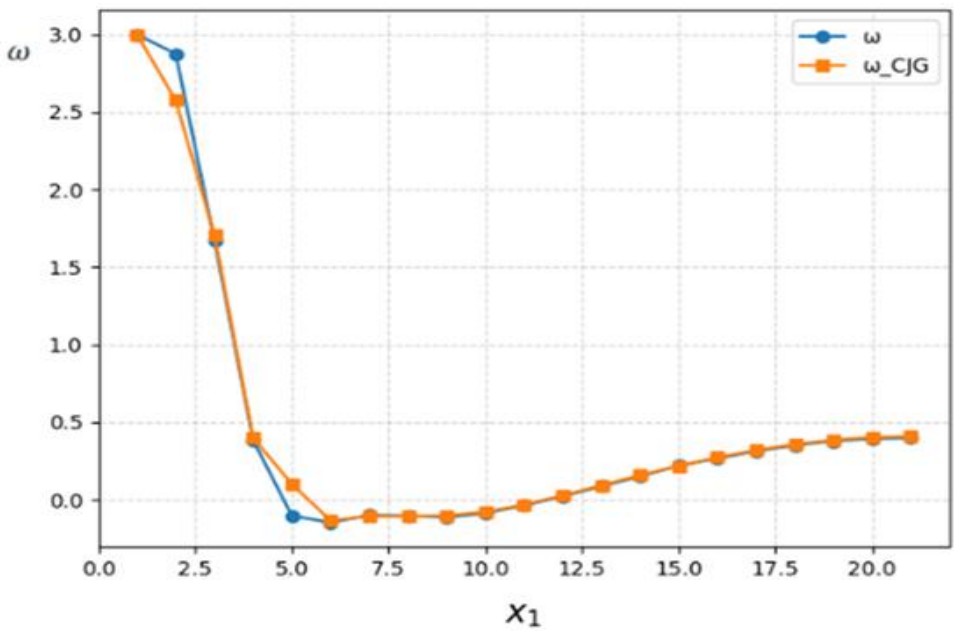
2.9-сурет. Есептелген қысым мәндерін CJG нәтижелерімен салыстыру

Әзірленген айырымдық схема бойынша есептелген қысым мәндері P (2-сурет, көк нүктелер) белгілі P_{CJG} деректерімен (қызғылт сары нүктелер) сәйкес келеді. Екі қисық та бірдей қарқынды көрсетеді: ағын кірісінде қысымның төмендеуі байқалады, одан кейін ол біртіндеп қалпына келіп, шығысқа қарай тұрақталады. Нәтижелер арасындағы орташа айырмашылық ε_p= 6.76044%-ды құрайды, бұл есептеу моделінің жоғары дәлдігі мен физикалық тұрғыдан сенімділігін айғақтайды.

Кірістегі сингулярлық пен шығыстағы «жұмсақ» шекаралық шарттардың әсерін азайту мақсатында, $x_1 = 0$ және $x_1 = x_{1l}$ бақылау нүктелеріндегі мәндер ε_p анықтамасына енгізілмеді.

Orlandi мен Napolitano [61] авторлары Cliffe және т.б. жүргізген сандық шешім нәтижелерін эталон ретінде таңдады, себебі бұл деректер Schonauer-дің неғұрлым ұсақ торларда алған нәтижелерімен жоғары деңгейде сәйкес келді.

4-кестеден байқалатынындай, Schonauer нәтижелері Re=10 жағдайында 1.74% -ға, ал Re=100 болғанда 0.44% -ға ғана ерекшеленеді. Бұл екі ғылыми топ Роуч есебін мүлдем өзгеше айнымалылар мен әдістер арқылы шешеді. CJG тобындағы авторлар u, υ,p теңдеулерін және ақырлы элементтер әдісін пайдаланады, ал Schonauer u, υ, ω айнымалыларында ақырлы айырымдар әдісін қолданады. Бұл факт екі шешімнің де жоғары дәлдігін растайды.



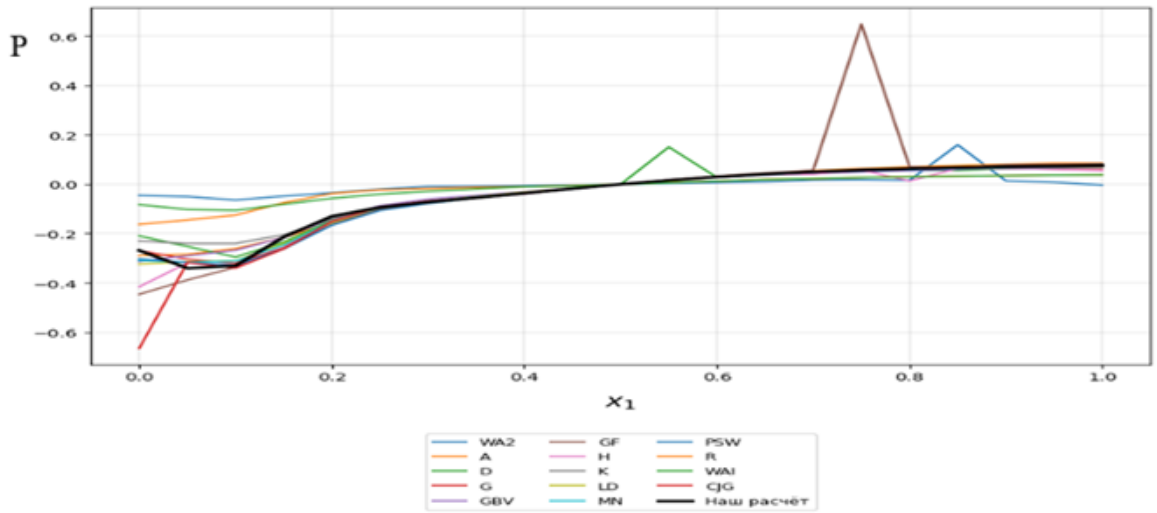
2.10-сурет. Жылдамдық иірімінің сандық мәндерін CJG нәтижелерімен салыстыру

Біз есептеген иірімнің ω мәндерін (2.10-суреттегі көк нүктелер) ω_{CJG} нәтижелерімен (қызғылт сары квадраттар) салыстыру.

Екі профиль де ұқсас үдерісті көрсетеді: облыстың басында жылдамдық иірімі мәндері максималды болады, сонан соң күрт төмендейді, нөлден өтіп, біртіндеп тұрақталады және ағын шығысына қарай артады. Орташа салыстырмалы қателік $\varepsilon_\omega = 15.2832$мәнін құрайды, бұл нәтижелердің қанағаттанарлық сәйкестігін көрсетеді және есептеу моделінің физикалық тұрғыдан дұрыстығын растайды.

Декарттық координаттар жүйесіндегі u, v,p айнымалыларындағы Навье–Стокс теңдеулерінің Wada және Adachi (WA2) сандық нәтижелері бұл әдістің жарамсыз екенін көрсетеді. Бұл әдісте геометриясы күрделі аймақтың қатты қабырғасындағы шекаралық шарттарды анықтау үшін интерполяциялау қажеттілігі туындайды. 4-кестеден байқалғанындай, сандық есептеулер нәтижесі сұйықтық ағынының қабырғадан бөліну құбылысын анықтамайды әрі Re=10 кезіндегі $\varepsilon_\omega = 111.92\%$ және ε_p=78.92% өте үлкен қателік мәндеріне ие. Re саны 100-ге жеткенде ε_ω көрсеткіші одан әрі артып, ε_ω=135.48% -ды құрайды.

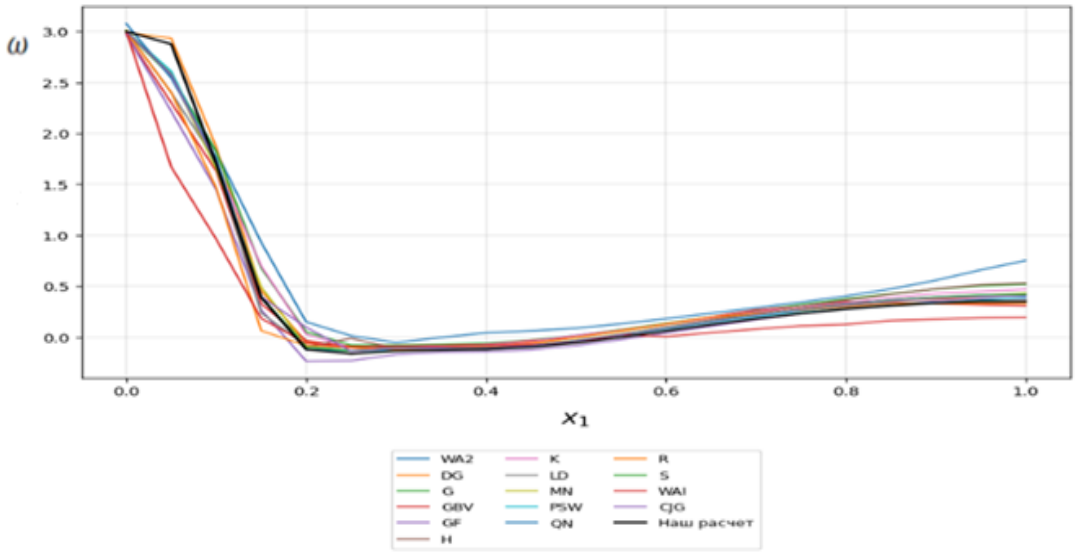
16 зерттеу тобы есептеген ағынның қарапайым түріне қарамастан, 2 және 3-кестелерде көрсетілгендей, кейбір шешімдер ε_ω және ε_p көрсеткіштерінің жоғары болуымен, яғни жылдамдық иірімі мен қысымның екеуі үшін де диссипацияның (шашыраудың) айтарлықтай деңгейімен сипатталады.



2.11-сурет. Қысым профилін таңдалған зерттеулермен салыстыру

2.11-суретте CJG эталондық шешімі мен үш іргелес зерттеудің (LD, MN, PSW) нәтижелері көрсетілген. Барлық қисықтар төменде теріс мәндерден басталып, кейін біртіндеп нөлге және шағын оң мәндерге жақындайды; бұл сұйықтық ағынының кірісінде жылдамдық пен қысымның күрт төмендеуін, сондай-ақ шығысында ағыстың баяулауы мен қысымның қалпына келуін білдіреді.

Облыстың бастапқы бөлігінде ($x_1/x_{1l} \leq 0.2$) қысым күрт төмендейді. Бұл аймақта ағын жылдамдығы артады, ал қысым кемиді (Бернулли принципіне сәйкес). Кейбір зерттеулер аздаған айырмашылықты көрсетеді, себебі бұл аймаққа тор тығыздығының, Re санының немесе шекаралық шарттардың өзгешелігі әсер етеді. Облыстың ортаңғы бөлігінде ($0.2 \leq x_1/x_{1l} \leq 0.6$) қысым мәндері біртіндеп тұрақтанады. Бұл аймақта ағынның турбуленттік әсері бәсеңдеп, ол орнықты қозғалысқа ауысатындықтан, өсу үдерісінің бір бағытта жүруі барлық зерттеулерде дерлік байқалады. Облыстың шығыс бөлігінде ($x_1/x_{1l} \geq 0.7$) қысым мәндері нөлге жақындап, мардымсыз ауытқулар тіркеледі. Бұл ағынның орнықты күйге жеткенін және қысым өрісінің тұрақтанғанын айғақтайды. Біздің зерттеуіміздегі қара түспен белгіленген қисық сызық басқа зерттеулердің нәтижелерімен өте үйлесімді. Оның траекториясы барлық 16 зерттеу жұмыстарының орташа үрдісіне жақын, тек аздаған ауытқулары бар. Сандық моделіміз қысымның таралуын және есептеу әдісінің физикалық дұрыстығын дәл сипаттайтынын көрсетеді.



2.12-сурет. 5 зерттеуден алынған жылдамдық иірімі профильдері

2.12-суретте есептеу облысындағы ω жылдамдық иірімінің таралуы CJG эталондық шешімімен және ең жақын үш зерттеудің (MN, S, QN) нәтижелерімен салыстырмалы түрде көрсетілген.

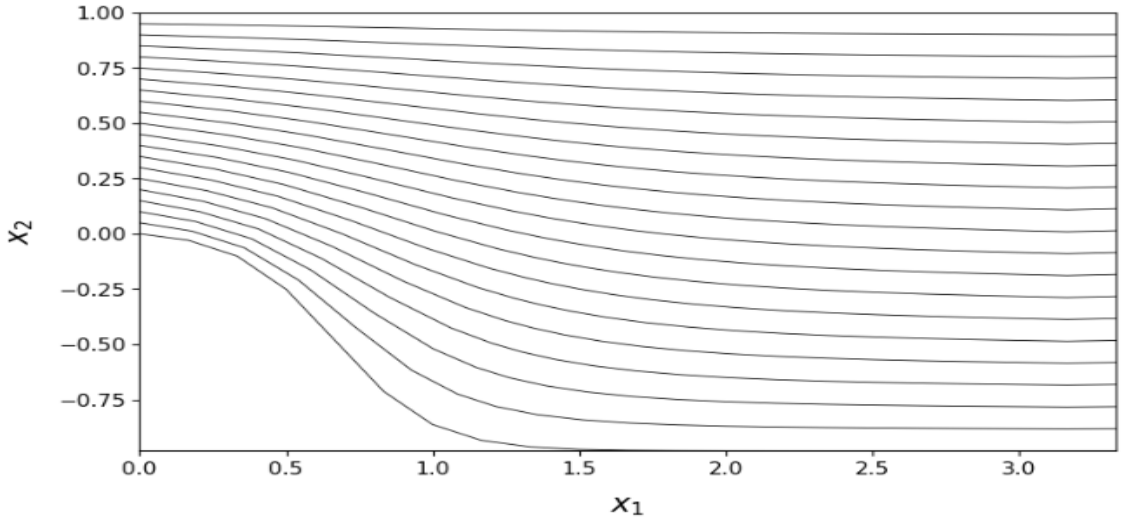
Графиктен байқалғандай, іс жүзінде барлық қисықтар есептеу аймағының кіріс бөлігінде ($x_1/x_{1l}\approx 0$) ең жоғары оң мәнге ие болады.

($x_1/x_{1l} \approx 0.1-0.2$) аралығында жылдамдық иірімі мәндері күрт төмендейді және кейбір әдістерде тіпті теріс мәндерге ие болады, бұл ағын бағытының өзгеруін, яғни инверсия құбылысының орын алғанын білдіреді.

Ары қарай ($x_1/x_{1l} > 0.3$) болған кезде, жылдамдық иірімі біртіндеп тұрақталып, барлық зерттеулердегі мәндері бойынша өзара жақындай түседі. Бұл облыста ағын стационарлық режимге өтіп, турбуленттілік сипат төмендейді.

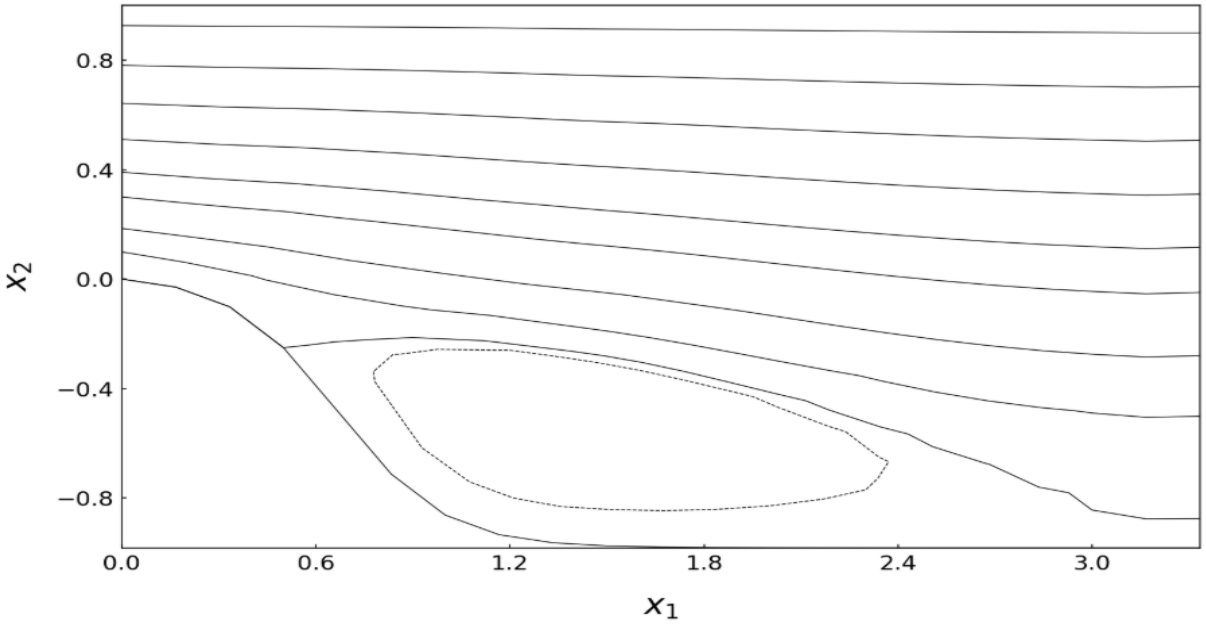
Біздің зерттеуімізге сәйкес келетін қара сызық басқа зерттеулердің нәтижелерімен жақсы сәйкес келеді және ауытқуы аз. Бұл біздің есептеу әдісіміздің сенімділігін және сандық модельдеудің физикалық шынайылығын растайды.

Жалпы алғанда, барлық зерттеулерде жылдамдық иірімділігінің таралу сипаты ұқсас.



2.13-сурет. Тоқ функциясының изосызықтары, Re=10 , $\varepsilon = 10^{-4}, t = 0.005$

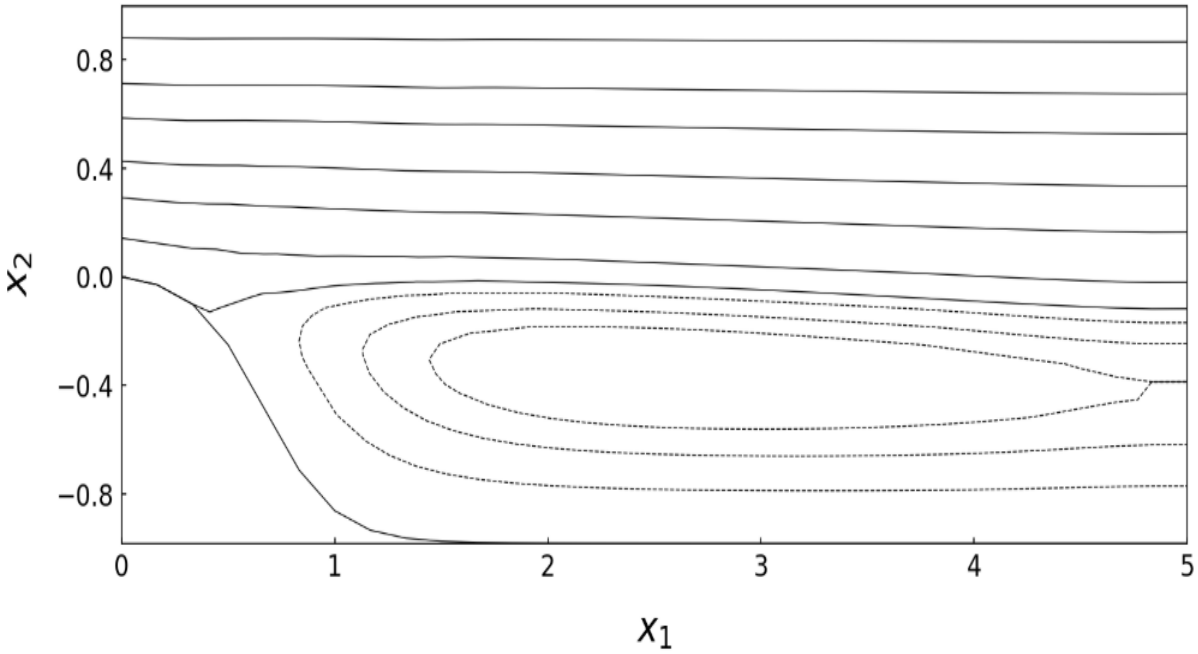
2.13-сурет ψ ток функциясының изосызықтары ағыс құрылымын көрнекі түрде көрсетеді: есептеу облысының жоғарғы бөлігінде сызықтар тығыздалған (жоғары жылдамдықтар), ал төменгі бөлігінде сиреген. Төменгі қабырға маңындағы кіріс аймағында (x_1≈0–0.3) өте әлсіз рециркуляция байқалады $\psi_{min} = -0.002$. Әрі қарай ψ мәні өседі, шығыс қимасында 0.90 – 1.00 аралығында тұрақталады. Шекаралық шарттардың орындалуы (кірісте ψ ≈0, шығыста ψ =1.00) контурлардың тегістігі шешімнің сандық тұрақтылығы мен модельдің физикалық тұрғыдан дұрыстығын айғақтайды. Жалпы есептеу уақыты 90 с құрады, жинақталу үшін 645 итерация қажет болды.



2.14-сурет. Тоқ функциясының изосызықтары, Re=20 , $\varepsilon = 10^{-4}, t = 0.005$

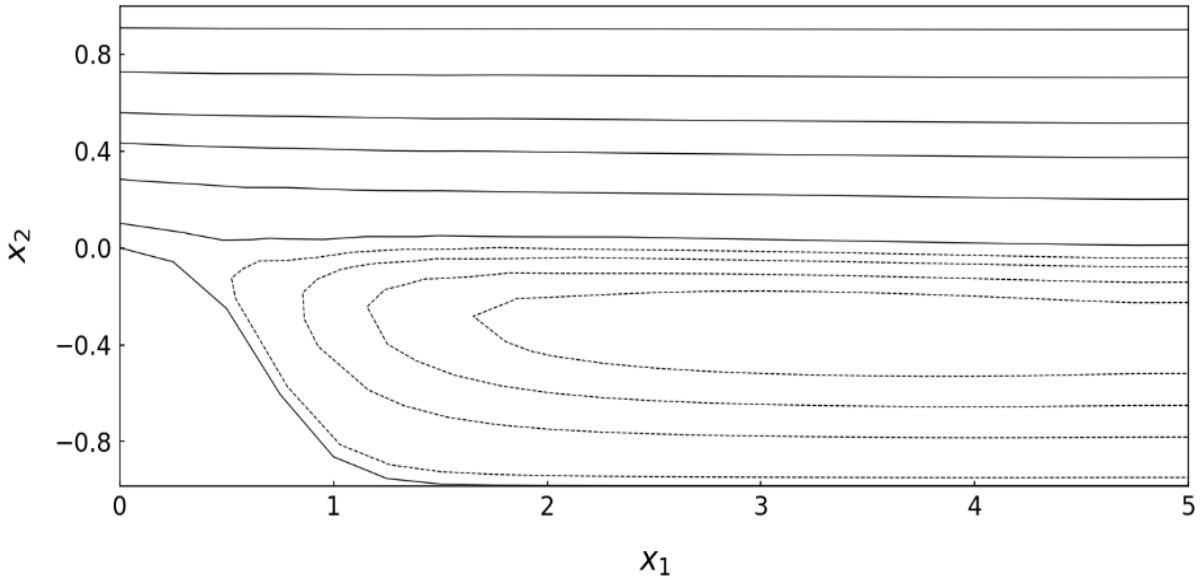
Re = 20 кезіндегі ток функциясының ψ изосызықтары қисық сызықты облыстағы ағыстың күрделі сипатын көрсетеді. Есептеу облысының жоғарғы

бөлігінде сызықтар жиіленген, бұл ағын жылдамдығы жоғары аймақтарға сәйкес келеді. Төменгі бөлікте, облыс кірісінде ($x_1 \approx 0$–0.3, $x_2 < 0$), жергілікті құйынның түзілуімен байланысты әлсіз рециркуляция байқалады. Тоқ функциясының минималды мәні $\psi_{min} = -0.038$ құрайды. Әрі қарай ψ мәні артып, шығысқа қарай 0.86–1.00 диапазонында тұрақталады. Изосызықтардың тегістігі және шекаралық шарттардың дұрыс орындалуы алынған шешімнің сандық орнықтылығы мен физикалық сенімділігін айғақтайды, жалпы есептеу уақыты 108 с, итерация саны 898 болмақ.



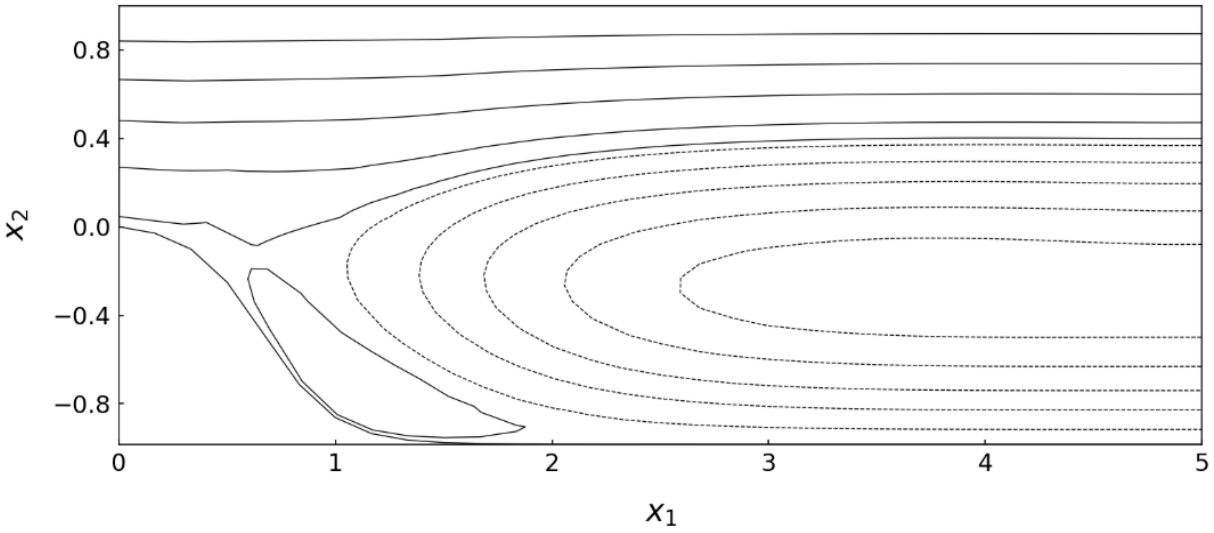
2.15-сурет. Тоқ функциясының изосызықтары , Re=100 , $\varepsilon = 10^{-4}, t = 0.005$

Re=100 болғандағы тоқ функциясының изосызықтары облыстың төменгі бөлігінде орнықты рециркуляция аймағының қалыптасқанын көрсетеді. Re=20 режимімен салыстырғанда, конвективті әсерлердің күшеюіне байланысты құйынды құрылым ұлғайып, ағын бағытымен төмен қарай ығысады. Тоқ функциясының минималды мәні $\psi_{min} = -0.0419$ құрайды. Изосызықтардың тегістігі мен тұйықтығы сандық сызбаның орнықтылығын растайды. Есептеу уақыты 180 с, итерация саны 1541.



2.16-сурет. Тоқ функциясының изосызықтары , Re=500 , $\varepsilon = 10^{-4}, t = 0.005$

Re=500 болған кезде рециркуляциялық аймақтың одан әрі дамуы байқалады. Иірімді аймақ ұлғайып, ағын бойымен созылады, бұл бейсызықтық конвективті мүшелердің өсуін көрсетеді. Тоқ функциясының минималды мәні $\psi_{min} = -0.0469$. Есептеу 2788 итерацияда 265 секунд уақытта орындалды.



2.17-сурет. Тоқ функциясының изолайндары, Re=1000 , $\varepsilon = 10^{-4}, t = 0.005$

Re=1000 кезінде конвективті әсерлер диффузиядан айтарлықтай басым түседі. Иірімді аймақ едәуір кеңейеді, ал тоқ функциясының минимумы ψ_{min} =-0.1618 мәніне жетеді, бұл қарқынды қайталама циркуляцияның қалыптасқанын көрсетеді. Ағыс құрылымының күрделіленгеніне қарамастан, изосызықтар тегіс әрі тұйықталған күйінде қалады, бұл әдістің орнықтылығын растайды. Есептеу уақыты 664 с, итерациялар саны 6530.

№2.5.кесте: әртүрлі есептеу торының өлшемдері кезіндегі ω_{min}, $\omega_{\text{вых}}$ және L_2 нормалары

Тор өлшемі	ω_{min}	$\omega_{\text{вых}}$	$\left\|\omega_{CJG} - \omega_h\right\|_{L_2}$	$\left\|P_{CJG} - P_h\right\|_{L_2}$
41×41	-0.1612	0.4021	1.035753	0,186360
81×81	-0.1653	0.40811	0,93348	0.18516
161×161	-0.16831	0.40903	0.9268361	0.184565

Норма келесі формула бойынша есептеледі:

$$\left\|\omega_{CJG} - \omega_h\right\|_{L_2} = \sqrt{\sum_{i=2}^{20} (\omega_{CJG,i,0} - \omega_{h,i,0})^2 h_1 h_2} \qquad (2.104)$$

мұндағы $\omega_{CJG,i,0}$ жылдамдық иірімінің CJG жұмысындағы эталондық мәні, $\omega_{h,i,0}$- бірдей есептеу торында алынған біздің есептелген сандық мән, $h_1 h_2$ - координаттық бағыттар бойынша тор қадамдары.

$$\left\|P_{CJG} - P_h\right\|_{L_2} = \sqrt{\sum_{i=2}^{20} (P_{CJG,i,0} - P_{h,i,0})^2 h_1 h_2}$$

мұндағы $P_{CJG,i,0}$ - қысымның эталондық мәні, ал $P_{h,i,0}$ - қатты қабырғадағы қысым мәні.

Ұсынылған деректерден көрініп тұрғандай, есептеу торы артқан сайын, сандық шешім тұрақтану үдерісін көрсетеді. $\omega_{\text{вых}}$ мәндері CJG эталондық мәніне ұмтылады, ал L_2 нормалары кемиді, бұл аппроксимацияның дұрыстығын және алгоритмнің орнықтылығын растайды.

2.8 2-ші бөлім бойынша қорытынды

Бұл жұмыста еркін қисық сызықты ортогоналды координаттар жүйесінде тоқ функциясы ψ және жылдамдық иірімі ω айнымалыларының негізінде Навье–Стокс теңдеулерін шешудің сандық әдісі жасалып, әзірленген алгоритм тордың ортогоналдығы мен біркелкілігін, сондай-ақ шешімнің сандық тұрақтылығын қамтамасыз етеді. Әртүрлі Рейнольдс сандары үшін (Re = 10 - 1000) жүргізілген есептеулер алынған жылдамдық пен қысым өрістерінің ағынның физикалық табиғатына сәйкес келетінін және Роуч есебінің эталондық нәтижелерімен үйлесетінін көрсетті [63].

Наполитано мен Орландидің [36] белгілі зерттеулерімен салыстыру кеңейетін арнадағы ағын құрылымының алынған нәтижелерінің дұрыстығын растады. Сонымен қатар, есептелген ψ және ω мәндері негізінде Р қысым өрісі анықталды, бұл ағынның жылдамдық және күштік сипаттамаларының өзара сәйкестігін бақылауға мүмкіндік берді. Осылайша, ұсынылған әдіс күрделі геометриялы аймақтардағы ламинарлық ағындарды тиімді модельдеуге мүмкіндік береді. Ол шешімнің жоғары дәлдігі мен орнықтылығын қамтамасыз етеді және инженерлік әрі аэродинамикалық есептердегі ағындарды сандық талдау үшін қолдануға жарамды.

3. Навье-Стокс теңдеулер жүйесін еркін қисық сызықты координаттарда қолдана отырып, каталитикалық нейтрализаторды математикалық және компьютерлік модельдеу.

3.1 Математикалық модель

Каталитикалық нейтрализатордың шекарасы тегіс, қисық сызықты облыстарда стационарлы емес ағыннын сипаттау үшін цилиндрлік координаталардағы Навье-Стокс теңдеулер жүйесін келесі формада жазуға болады[4].Теңдеулер жүйесі ток функциясы, жылдамдық иірімі айнымалыларында болғандықтан үзіліссіздік теңдеуі автоматты түрде орындалады.

$$\frac{\partial \omega}{\partial t}+\frac{\partial u\omega}{\partial x}+\frac{\partial v\omega}{\partial r}=\frac{1}{Re}\left(\Delta\omega+\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\omega}{r}\right)\right)-div\left(\frac{k_P}{r}\ grad\,\psi\right)-\frac{Gr}{Re^2}\frac{\partial\theta}{\partial x}\ , \quad (3.1)$$

$$div\left(\frac{1}{r}\ grad\,\psi\right)=\ \omega\ , \quad (3.2)$$

$$\frac{\partial \varphi_i}{\partial t}+\frac{\partial u\varphi_i}{\partial x}+\frac{\partial v\varphi_i}{\partial r}=div\left(\frac{D_i}{r}\ grad\,\varphi_i\right), \quad (3.3)$$

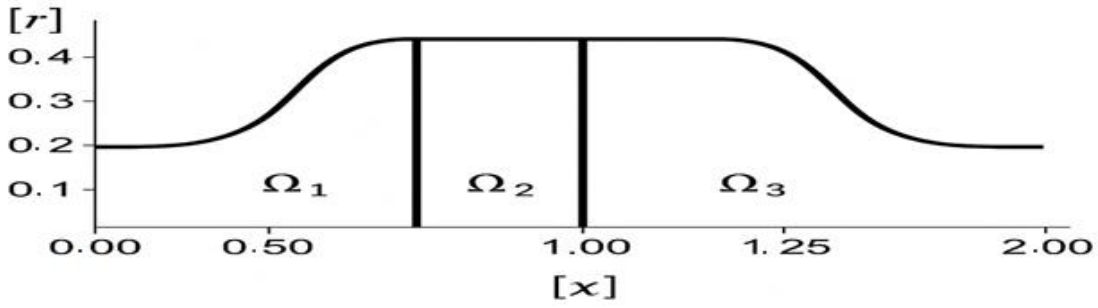
$$\frac{\partial \theta}{\partial t}+\frac{\partial u\theta}{\partial x}+\frac{\partial v\theta}{\partial r}=\frac{1}{Pe\ Pr}\left(\frac{\partial^2\theta}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\theta}{\partial r^2}+\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\theta}{r}\right)\right)+\frac{NuF}{PePr}\ (T-\theta)\ , \quad (3.4)$$

$$\frac{\partial T}{\partial t}+\frac{1}{PePr}\frac{1}{r}\left(\frac{\partial}{\partial x}\left(k_T r\ \frac{\partial T}{\partial x}\right)\right)+\frac{\partial}{\partial r}\left(k_T r\ \frac{\partial T}{\partial r}\right)=\frac{NuF}{PePr}\ (T-\theta)\ , \quad (3.5)$$

мұнда

$$u=\frac{1}{r}\ \frac{\partial\psi}{\partial r},\ \ v=-\frac{1}{r}\ \frac{\partial\psi}{\partial x}\ ,\ \ \omega=\frac{\partial u}{\partial r}-\frac{\partial v}{\partial x} \quad (3.6)$$

$$k_P=\begin{cases}0, & \text{в}\quad \Omega_1\cup\Omega_3,\\ k_0(x,r), & \text{в}\quad \Omega_2\end{cases}$$



Сурет- 3.1. зерттеу облысы

Есепте қолданылған айнымалылар, өлшемсіз параметрлер тобы.

$k_0(x,r)$-кеуекті ортаның өткізгіштік коэффициенті,

ψ –ток функциясы,

ω- жылдамдық иірімі,

φ_i- зиянды заттардың концентрациясы,

θ- шығатын газдың температурасы,

T- кеуекті ортаның температурасы,

V– жылдамдық,

a–жылулық диффузия коэффициенті,

β–жылулық кеңею коэффициенті,

g– ауырлық күшінің үдеуі,

ΔT–температураның айырмашылық масштабы,

ν–кинеметикалық тұтқырлық коэффициенті,

k_T–жылуөткізгіштік коэффициенті.

D_i $(i = CH_4, CO_2, H_2O, H_2, CO$ и $N_2)$- бөлшектердің массалық өткізгіштігі,

Математикалық моделі келесі 6 өлшемсіз параметр қолданылған.

$Re = \frac{\mathrm{V}\ D_{an}}{\nu}$ – Рейнольдс саны,

$Pe = \frac{V\ D_{an}}{a}$ – Пекле саны,

$\mathrm{Fr} = \frac{\nu^2}{g\ D_{an}}$ – Фрудо саны,

$Pr = \frac{Pe}{Re} = \frac{\nu}{a}$ - Прандтль саны,

$Gr = \frac{Re^2}{Fr} = \frac{\beta\ g\ D_{an}{}^3\ \Delta T}{\nu^2}$ - Грасгоф саны,

$Nu = 0{,}664\ Pr^{1/3}\sqrt{Re}$ - Нуссельт саны,

Кеуекті орта өткізгіштігінің коэффициенті k_P және F келесідей анықталады;

$$k_P(x,r) = \begin{cases} 0, & \text{в } \Omega_1 \cup \Omega_3, \\ \dfrac{150(1-m)^2}{m^3}\left(\dfrac{D_{an}}{d_{\text{ш}}}\right)^2, & \text{в } \Omega_2 \end{cases} \qquad (3.7)$$

$$F = \begin{cases} 0, & \text{в} \quad \Omega_1 \cup \Omega_3, \\ \dfrac{6(1-m)}{d_{\text{ш}}}, & \text{в} \quad \Omega_2 \end{cases}$$

Мұнда m- кеуектілік коэффициенті, Dan- аппараттың диаметрі, $d_{\text{ш}}$- кеуек ортадағы шарлардың диаметрі. Осы жұмыста (3.3) формуламен қарастырылған диффузиялық модель Льюис санына негізделген.Бұл модель зиянды заттар компоненттерінің таралуын сипаттайды. Сондықтан, і - компонент үшін диффузия коэффициенті келесі Льюис санымен өрнектеледі:

$$D_i = \frac{\lambda}{PLe_i\, C_\rho} \tag{3.8}$$

Мұндағы P- қысым, Le_i -Льюис саны, C_ρ - тұрақты қысымдағы газдың жылу сыйымдылығы. Ал қоспаның меншікті жылусыйымдылығы мен тұрақты қысымдағы газдың жылу сыйымдылығы компоненттердің массалық үлестеріне тәуелді болады.

$$\lambda = \sum_{i=1}^{n} (\varphi_i \lambda_i)\,, \quad n = 1,..,6 \tag{3.9}$$

$$C_\rho = \sum_{i=1}^{n} (\varphi_i \mathrm{C}_{\rho_i}). \tag{3.10}$$

λ_i-диффузия коэффициенті.

Қоспа идеал газ деп қабылданғандықтан, оның құрамындағы заттар Дальтон заңына бағынады. Осыған байланысты, қоспаның компоненттерінің парциалды қысымдарын олардың қоспадағы мольдік үлестері арқылы көрсетуге болады.

Идеал газдың күй теңдеуі тығыздықты есептеу үшін келесі түрде қолданылады:

$$PM_{mix} = \rho R_g T \tag{3.11}$$

мұнда M_{mix} - қоспаның молекулалық массасы

$$M_{mix} = \frac{1}{\sum_{i=1}^{n} (\frac{\varphi_i}{M_i})} \tag{3.12}$$

R_g –уилл версаль газ тұрақтысы, M_i-компоненттің молекулалық массасы.

3.2 Шекаралық шарттар

Жоғарыда келтірілген математикалық модельдің толықтығы үшін келесі шекаралық шарттар қойылады.

кіріс шекарасы: $x = 0\ ,\ 0 \le r \le r_0; \psi = \psi_0(r),\ \omega = \ \omega_0(r), \frac{\partial\theta}{\partial x} = 0, \varphi_{CH_4},$ $\varphi_{H_2o}, \varphi_{CO}, \varphi_{H_2}, \varphi_{NO}$- мәндері беріледі.

шығыс шекарасы: $x = L, \quad 0 \le r \le f(L); \frac{\partial\psi}{\partial x} = 0\ ,\ \frac{\partial\omega}{\partial x} = 0,\ \ \frac{\partial\theta}{\partial x} = 0,$

$$\frac{\partial\varphi_i}{\partial x} = 0$$

қатты қабырғада: $0 \le x \le L\ ,\ r(x) = f(x)\ ;\ \frac{\partial\psi}{\partial n} = 0\ ,\ \psi = const,$

$$\frac{\partial\theta}{\partial n} = 0,\ T = 1,\ \frac{\partial\theta}{\partial x} = 0,\ \varphi_i = 0$$

симметрия осінде: $0 \le \mathrm{x} \le \mathrm{L}\ ,\ r = 0\ ;\ \psi = 0,\ \frac{\partial\omega}{\partial r} = 0,\ \frac{\partial\theta}{\partial r} = 0,$

$$\frac{\partial\mathrm{T}}{\partial r} = 0,\ \frac{\partial\varphi_i}{\partial r} = 0 \qquad (3.13)$$

Қатты қабырғадағы жылдамдық градиентін есептеу үшін Том формуласы қолданылады.

$$\sqrt{g_{11}\ g_{22}}\ \omega_{i,0} = \frac{\partial}{\partial q_2}\left(\frac{1}{r}\sqrt{\frac{g_{11}}{g_{22}}}\frac{\partial\psi}{\partial q_2}\right)_{i,0}$$

Осыған ұқсас түрде конвективтік туынды да аппроксимацияланады:

$$\frac{\partial}{\partial q_2}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial q_1}\omega\right)$$

Қатты қабырғадағы шекаралық шарт бойынша Том формуласы арқылы құйын ω мәнін толық итерациялық қадамда релаксациялау көмегімен ес-керіледі

$$\omega_{i,N_2}^{n+1} = (1-\alpha)\omega_{i,N_2}^{n} - \alpha\frac{2\psi_{q_{2,i,N_2-1/2}}^{n+1}}{r_{i,N_2-1/2}\left[\left(x_{1,q_2,i,N_2-1/2}^{0}\right)^2 + \left(x_{2,q_2,i,N_2-1/2}^{0}\right)^2\right]h_2}$$

Енді Тома формуласын қарастырайық.

Қатты қабырғада келесі шекаралық шарттар орындалады:

$$\psi = const\ , \frac{\partial\psi}{\partial n} = 0$$

Осы шарттарды пайдаланып, қабырғадағы құйын үшін келесі өрнек алынады:

$$\sqrt{g_{11}\,g_{22}}\omega_{i,N_2} = \frac{\partial}{\partial q_2}\left(\frac{1}{r}\sqrt{\frac{g_{11}}{g_{22}}}\frac{\partial\psi}{\partial q_2}\right)_{i,N_2}$$

Енді

$$\left(\frac{1}{r}\sqrt{\frac{g_{11}}{g_{22}}}\frac{\partial\psi}{\partial q_2}\right)_{i,N_2-1/2}$$

Функциясын $q_2 = N_2$ нүктесінің маңында Тейлор қатарына жіктейміз:

$$\left(\frac{1}{r}\sqrt{\frac{g_{11}}{g_{22}}}\frac{\partial\psi}{\partial q_2}\right)_{i,N_2-1/2} = \left(\frac{1}{r}\sqrt{\frac{g_{11}}{g_{22}}}\frac{\partial\psi}{\partial q_2}\right)_{i,N_2} - \frac{h_2}{2}\frac{\partial}{\partial q_2}\left(\frac{1}{r}\sqrt{\frac{g_{11}}{g_{22}}}\frac{\partial\psi}{\partial q_2}\right)_{i,N_2} + 0(h_2^2)$$

Қабырғада

$$\left(\frac{\partial\psi}{\partial q_2}\right)_{i,N_2} = 0$$

Бірінші қосылғыш нөлге тең болғандықтан

$$\sqrt{g_{11}\cdot g_{22}}\omega_{i,N_2} = -\frac{2}{h_2}\left(\frac{1}{r}\sqrt{\frac{g_{11}}{g_{22}}}\frac{\partial\psi}{\partial q_2}\right)_{i,N_2-1/2} + 0(h_2)$$

Сондықтан:

$$\omega_{i,N_2} = -\frac{2}{h_2}\left(\frac{1}{r}\frac{1}{g_{22}}\frac{\partial\psi}{\partial q_2}\right)_{i,N_2-1/2}$$

Метрикалық коэффициент үшін

$$g_{22} = \left(\frac{\partial x_1}{\partial q_2}\right)^2 + \left(\frac{\partial x_2}{\partial q_2}\right)^2$$

Тома формуласы:

$$\omega_{i,N_2} = \frac{2\psi^0_{q_{2,i,N_2-1/2}}}{r_{i,N_2-1/2}\left[\left(x^0_{1,q_2,i,N_2-1/2}\right)^2 + \left(x^0_{2,q_2,i,N_2-1/2}\right)^2\right]h_2}$$

3.3 Жаңа координаталар жүйесіндегі негізгі теңдеулер

Координаттар түрленуі $\vec{x}: G \to X$ арқылы беріледі, жаңа локалды координаталар q_1 мен q_2 бастапқы координаталар арқылы келесі түрде байланысқан болсын бірақ мақалада орын үнемдеу мақсатында, тек (3.1)және(3.2) теңдеулерін ғана ашып қарастырамыз:

$$x = x_1 = x_1(q_1, q_2)\,, r = x_2 = x_2(q_1, q_2).$$

Жоғарыдағы (3.1)-(3.6) теңдеулерді цилиндрлік координаттар жүйесінен еркін ортогонаьлды қисық сызықты координаттар жүйесіне түрлендіргенде келесі түрде жазылады

$$J\frac{\partial \omega}{\partial t} + \frac{\partial(u\omega)}{\partial q_m}\frac{\partial q_m}{\partial x_1} + \frac{\partial(\upsilon\omega)}{\partial q_m}\frac{\partial q_m}{\partial x_2} = \frac{1}{Re}\left[\left(\frac{\partial}{\partial q_m}\left(Jg^{km}\frac{\partial \omega}{\partial q_k}\right)\right) + \left(\frac{\partial}{\partial q_m}\left(J\frac{\omega}{r}\frac{\partial q_m}{\partial q_k}\right)\right)\right] - \frac{\partial}{\partial q_m}\left(J\frac{k}{r}g^{km}\frac{\partial \psi}{\partial q_k}\right) - \frac{Gr}{Re^2}\frac{\partial}{\partial q_m}\left(J\theta\frac{\partial q_m}{\partial x}\right), \tag{3.14}$$

$$\frac{\partial}{\partial q_m}\left(J\frac{1}{r}g^{km}\frac{\partial \psi}{\partial q_k}\right) = J\omega, \tag{3.15}$$

$$J\frac{\partial \varphi_i}{\partial t} + \frac{\partial(u\varphi_i)}{\partial q_m}\frac{\partial q_m}{\partial x_1} + \frac{\partial(\upsilon\varphi_i)}{\partial q_m}\frac{\partial q_m}{\partial x_2} = \frac{\partial}{\partial q_m}\left(Jg^{km}\frac{D_i}{r}\frac{\partial \varphi_i}{\partial q_k}\right), \tag{3.16}$$

$$J\frac{\partial \theta}{\partial t} + \frac{\partial(u\theta)}{\partial q_m}\frac{\partial q_m}{\partial x_1} + \frac{\partial(\upsilon\theta)}{\partial q_m}\frac{\partial q_m}{\partial x_2} = \frac{1}{Pe\ Pr}\left[\frac{\partial}{\partial q_m}\left(Jg^{km}\frac{\partial \theta}{\partial q_k}\right) + \frac{\partial}{\partial q_m}\left(J\frac{\theta}{r}\frac{\partial q_m}{\partial r}\right)\right] + \frac{NuF}{RePr}(T-\theta), \tag{3.17}$$

$$J\frac{\partial T}{\partial t} + \frac{1}{Pe\ Pr}\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial q_m}\left(Jg^{km}k_T r\frac{\partial T}{\partial q_k}\right) = \frac{NuF}{PePr}(T-\theta). \tag{3.18}$$

мұндағы, $J = \frac{\partial x_1}{\partial q_1}\frac{\partial x_2}{\partial q_2} - \frac{\partial x_1}{\partial q_2}\frac{\partial x_2}{\partial q_1}$, түрлендіру Якобианы.

$g^{km} = \frac{\partial q_k}{\partial x_n}\frac{\partial q_m}{\partial x_n}$ k,m,n=1,2 -контравариантты тензор элементтері және $g_{km} = \frac{\partial x_n}{\partial q_k}\frac{\partial x_n}{\partial q_m}, k,m = 1,2$,-ковариантты тензор элементтері, тензорлар үшін келесі қатынас орындалады

$$g_{11}.g_{22} = g_{12}^2 + J^2 .$$

Координаттар жүйесі ортогоналды болғандықтан $g_{12} = g_{21} = 0$, ал $J^2 = g_{11}.g_{22}$ болады.

Келесі түрлендірулерді жасайық

$$Jg^{11} = \frac{J^2\left(\left(\frac{\partial q_1}{\partial x_1}\right)^2+\left(\frac{\partial q_1}{\partial x_2}\right)^2\right)}{J} = \frac{\left(\frac{\partial x_1}{\partial q_1}\frac{\partial x_2}{\partial q_2}-\frac{\partial x_1}{\partial q_2}\frac{\partial x_2}{\partial q_1}\right)^2\left(\left(\frac{\partial q_1}{\partial x_1}\right)^2+\left(\frac{\partial q_1}{\partial x_2}\right)^2\right)}{J} =$$
$$\frac{\left(\left(\frac{\partial x_1}{\partial q_1}\right)^2\left(\frac{\partial x_2}{\partial q_2}\right)^2-2\frac{\partial x_1}{\partial q_1}\frac{\partial x_2}{\partial q_2}\frac{\partial x_1}{\partial q_2}\frac{\partial x_2}{\partial q_1}+\left(\frac{\partial x_1}{\partial q_2}\right)^2\left(\frac{\partial x_2}{\partial q_1}\right)^2\right)\left(\left(\frac{\partial q_1}{\partial x_1}\right)^2+\left(\frac{\partial q_1}{\partial x_2}\right)^2\right)}{J} =$$
$$\frac{\left(\left(\frac{\partial x_1}{\partial q_1}\right)^2\left(\frac{\partial x_2}{\partial q_2}\right)^2\left(\frac{\partial q_1}{\partial x_1}\right)^2-2\frac{\partial x_1}{\partial q_1}\frac{\partial x_2}{\partial q_2}\frac{\partial x_1}{\partial q_2}\frac{\partial x_2}{\partial q_1}\left(\frac{\partial q_1}{\partial x_1}\right)^2+\left(\frac{\partial x_1}{\partial q_2}\right)^2\left(\frac{\partial x_2}{\partial q_1}\right)^2\left(\frac{\partial q_1}{\partial x_1}\right)^2\right)}{J} + \quad (3.19)$$
$$\frac{\left(\left(\frac{\partial x_2}{\partial q_2}\right)^2-2\frac{\partial x_2}{\partial q_2}\frac{\partial x_1}{\partial q_2}\frac{\partial x_2}{\partial x_1}+\left(\frac{\partial x_1}{\partial q_2}\right)^2\left(\frac{\partial x_2}{\partial x_1}\right)^2\right)+\left(\left(\frac{\partial x_1}{\partial x_2}\right)^2\left(\frac{\partial x_2}{\partial q_2}\right)^2\left(\frac{\partial q_1}{\partial x_1}\right)^2-2\frac{\partial x_1}{\partial x_2}\frac{\partial x_2}{\partial q_2}\frac{\partial x_1}{\partial q_2}+\left(\frac{\partial x_1}{\partial q_2}\right)^2\right)}{J} =$$
$$\frac{\left(\left(\frac{\partial x_2}{\partial q_2}\right)^2+\left(\frac{\partial x_1}{\partial q_2}\right)^2\right)}{J} = \frac{g_{22}}{J} = \frac{g_{22}}{\sqrt{g_{11}\,g_{22}}} = \sqrt{\frac{g_{22}}{g_{11}}}$$

Дәл осылай

$$Jg^{22} = \frac{J^2\left(\left(\frac{\partial q_2}{\partial x_1}\right)^2+\left(\frac{\partial q_2}{\partial x_2}\right)^2\right)}{J} = \frac{\left(\left(\frac{\partial x_1}{\partial q_1}\right)^2+\left(\frac{\partial x_2}{\partial q_1}\right)^2\right)}{J} = \frac{g_{11}}{J} = \frac{g_{11}}{\sqrt{g_{11}.g_{22}}} = \sqrt{\frac{g_{11}}{g_{22}}}$$

Қисық сызықты цилиндрлік координаталар жүйесіндегі (3.1)-(3.2) теңдеулерді локалды координата жүйесіне түрлендіру үшін:

$$\frac{\partial u}{\partial x_1} = \frac{\partial u}{\partial q_1}\frac{\partial q_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u}{\partial q_2}\frac{\partial q_2}{\partial x_1}, \quad (3.20)$$
$$\frac{\partial u}{\partial x_2} = \frac{\partial u}{\partial q_1}\frac{\partial q_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u}{\partial q_2}\frac{\partial q_2}{\partial x_2}. \quad (3.21)$$

Ал (3.20), (3.21) формулада u –дің x_1 және x_2-ні қойғанда формулалар шығады

$$\begin{cases} \frac{\partial x_1}{\partial q_1}\frac{\partial q_1}{\partial x_1} + \frac{\partial x_1}{\partial q_2}\frac{\partial q_2}{\partial x_1} = 1, \\ \frac{\partial x_2}{\partial q_1}\frac{\partial q_1}{\partial x_1} + \frac{\partial x_2}{\partial q_2}\frac{\partial q_2}{\partial x_1} = 0. \end{cases} \quad (3.22)$$

Ал (3.20), (3.21) формулаларына x_1 және x_2 ні қойғанда, төмендегі формуларлар шығады

$$\begin{cases} \dfrac{\partial x_1}{\partial q_1}\dfrac{\partial q_1}{\partial x_2}+\dfrac{\partial x_1}{\partial q_2}\dfrac{\partial q_2}{\partial x_2}=0, \\ \dfrac{\partial x_2}{\partial q_1}\dfrac{\partial q_1}{\partial x_2}+\dfrac{\partial x_2}{\partial q_2}\dfrac{\partial q_2}{\partial x_2}=1. \end{cases} \tag{3.23}$$

Енді (3.22) формуланы пайдалана отырып $\frac{\partial q_2}{\partial x_1}$ және $\frac{\partial q_1}{\partial x_1}$ табамыз. Ол үшін мына $\frac{\partial x_2}{\partial q_1}\frac{\partial q_1}{\partial x_1}+\frac{\partial x_2}{\partial q_2}\frac{\partial q_2}{\partial x_1}=0$ теңдеуден $\frac{\partial q_1}{\partial x_1}$ - ды түрлендіріп аламыз:

$$\frac{\partial q_1}{\partial x_1}=-\frac{\dfrac{\partial x_2}{\partial q_2}\dfrac{\partial q_2}{\partial x_1}}{\dfrac{\partial x_2}{\partial q_1}}$$

Ары қарай, $\frac{\partial x_1}{\partial q_1}\frac{\partial q_1}{\partial x_1}+\frac{\partial x_1}{\partial q_2}\frac{\partial q_2}{\partial x_1}=1$ теңдеуіне апарып $\frac{\partial q_1}{\partial x_1}$ мәнін қойғанда (3.24) формула шығады

$$\frac{\partial x_1}{\partial q_1}\frac{\dfrac{\partial x_2}{\partial q_2}\left(\dfrac{\partial q_2}{\partial x_1}\right)}{\dfrac{\partial x_2}{\partial q_1}}+\frac{\partial x_1}{\partial q_2}\left(\frac{\partial q_2}{\partial x_1}\right)=1$$

$$\frac{\partial q_2}{\partial x_1}=\frac{\dfrac{\partial x_2}{\partial q_1}}{\left(\dfrac{\partial x_1}{\partial q_2}\dfrac{\partial x_2}{\partial q_1}-\dfrac{\partial x_1}{\partial q_1}\dfrac{\partial x_2}{\partial q_2}\right)}=-\frac{1}{J}\frac{\partial x_2}{\partial q_1} \tag{3.24}$$

Мұндағы J - якобиан жаңа координаттар мен бастапқы координаттар жүйесі арасындағы байланысты көрсетеді. Қалған $\frac{\partial q_i}{\partial x_j}$ туындылары үшін жоғарыдағы (3.22), (3.23) теңдеулерді пайдалана отырып, төмендегі теңдіктерді аламыз:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial q_2}{\partial x_1} = -\dfrac{1}{J}\dfrac{\partial x_2}{\partial q_1} \\ \dfrac{\partial q_1}{\partial x_1} = \dfrac{1}{J}\dfrac{\partial x_2}{\partial q_2} \\ \dfrac{\partial q_2}{\partial x_2} = \dfrac{1}{J}\dfrac{\partial x_1}{\partial q_1} \\ \dfrac{\partial q_1}{\partial x_2} = -\dfrac{1}{J}\dfrac{\partial x_1}{\partial q_2} \end{cases} \tag{3.25}$$

Жаңа координата бойынша сызықтық емес мүшелерді келесі түрде жазайық:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u\omega}{\partial x_1} &= \frac{\partial(u\omega)}{\partial q_m}\frac{\partial q_m}{\partial x_1} \\ \frac{\partial \upsilon\omega}{\partial x_2} &= \frac{\partial(\upsilon\omega)}{\partial q_m}\frac{\partial q_m}{\partial x_2} \end{aligned} \tag{3.26}$$

Ток функциясының жылдамдық компоненталары мен байланысын былай аламыз :

$$u = \frac{1}{r}\frac{\partial \psi}{\partial x_2}, \qquad \upsilon = -\frac{1}{r}\frac{\partial \psi}{\partial x_1}$$

Локалды координаттар арқылы келесі түрде жазамыз

$$u = \frac{1}{r}\left(\frac{\partial \psi}{\partial q_1}\frac{\partial q_1}{\partial x_2} + \frac{\partial \psi}{\partial q_2}\frac{\partial q_2}{\partial x_2}\right) = \frac{1}{r}\frac{\partial \psi}{\partial q_m}\frac{\partial q_m}{\partial x_2},$$

$$\upsilon = -\frac{1}{r}\left(\frac{\partial \psi}{\partial q_1}\frac{\partial q_1}{\partial x_1} + \frac{\partial \psi}{\partial q_2}\frac{\partial q_2}{\partial x_1}\right) = -\frac{1}{r}\frac{\partial \psi}{\partial q_m}\frac{\partial q_m}{\partial x_1}$$

Сызықтық емес мүшелерді ары қарай түрлендірсек

$$\frac{\partial u\omega}{\partial x_1}=\frac{\partial}{\partial q_m}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial q_n}\frac{\partial q_n}{\partial x_2}\omega\right)\frac{\partial q_m}{\partial x_1}$$
$$=\frac{\partial}{\partial q_m}\left[\frac{1}{r}\left(\frac{\partial\psi}{\partial q_1}\left(-\frac{1}{J}\frac{\partial x_1}{\partial q_2}\right)+\frac{\partial\psi}{\partial q_2}\left(\frac{1}{J}\frac{\partial x_1}{\partial q_1}\right)\right)\omega\right]\frac{\partial q_m}{\partial x_1}$$
$$=\frac{\partial}{\partial q_1}\left[\frac{1}{r}\left(-\frac{1}{J}\frac{\partial\psi}{\partial q_1}\frac{\partial x_1}{\partial q_2}+\frac{1}{J}\frac{\partial\psi}{\partial q_2}\frac{\partial x_1}{\partial q_1}\right)\omega\right]\frac{\partial q_1}{\partial x_1}$$
$$+\frac{\partial}{\partial q_2}\left[\frac{1}{rJ}.\left(-\frac{\partial\psi}{\partial q_1}\frac{\partial x_1}{\partial q_2}+\frac{\partial\psi}{\partial q_2}\frac{\partial x_1}{\partial q_1}\right)\omega\right]\frac{\partial q_2}{\partial x_1} \qquad (3.27)$$
$$=\frac{\partial}{\partial q_1}\left[\frac{1}{rJ}\left(-\frac{\partial\psi}{\partial q_1}\frac{\partial x_1}{\partial q_2}+\frac{\partial\psi}{\partial q_2}\frac{\partial x_1}{\partial q_1}\right)\omega\right]\frac{1}{J}\frac{\partial x_2}{\partial q_2}$$
$$+\frac{\partial}{\partial q_2}\left[\frac{1}{rJ}\left(-\frac{\partial\psi}{\partial q_1}\frac{\partial x_1}{\partial q_2}+\frac{\partial\psi}{\partial q_2}\frac{\partial x_1}{\partial q_1}\right)\omega\right]\left(-\frac{1}{J}\frac{\partial x_2}{\partial q_1}\right)$$
$$=\frac{1}{J}\frac{\partial}{\partial q_1}\left[\frac{1}{rJ}\left(-\frac{\partial\psi}{\partial q_1}\frac{\partial x_1}{\partial q_2}+\frac{\partial\psi}{\partial q_2}\frac{\partial x_1}{\partial q_1}\right)\omega\right]\frac{\partial x_2}{\partial q_2}$$
$$-\frac{1}{J}\frac{\partial}{\partial q_2}\left[\frac{1}{rJ}\left(-\frac{\partial\psi}{\partial q_1}\frac{\partial x_1}{\partial q_2}+\frac{\partial\psi}{\partial q_2}\frac{\partial x_1}{\partial q_1}\right)\omega\right]\frac{\partial x_2}{\partial q_1}$$

Осылайша келесі сызықтық емес мүшені түрлендіреміз.

$$\frac{\partial v\omega}{\partial x_2}=\frac{\partial}{\partial x_2}\left(-\frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial x_1}\omega\right)=\frac{\partial}{\partial q_m}\left(-\frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial q_n}\frac{\partial q_n}{\partial x_1}\omega\right)\frac{\partial q_m}{\partial x_2}$$
$$=\frac{\partial}{\partial q_1}\left[-\frac{1}{r}\left(\frac{\partial\psi}{\partial q_1}\frac{\partial q_1}{\partial x_1}+\frac{\partial\psi}{\partial q_2}\frac{\partial q_2}{\partial x_1}\right)\omega\right]\frac{\partial q_1}{\partial x_2}$$
$$+\frac{\partial}{\partial q_2}\left[-\frac{1}{r}\left(\frac{\partial\psi}{\partial q_1}\frac{\partial q_1}{\partial x_1}+\frac{\partial\psi}{\partial q_2}\frac{\partial q_2}{\partial x_1}\right)\omega\right]\frac{\partial q_2}{\partial x_2}$$
$$=\frac{\partial}{\partial q_1}\left[-\frac{1}{rJ}\left(\frac{\partial\psi}{\partial q_1}\frac{\partial x_2}{\partial q_2}-\frac{\partial\psi}{\partial q_2}\frac{\partial x_2}{\partial q_1}\right)\omega\right]\left(-\frac{1}{J}\frac{\partial x_1}{\partial q_2}\right) \qquad (3.28)$$
$$+\frac{\partial}{\partial q_2}\left[-\frac{1}{rJ}\left(\frac{\partial\psi}{\partial q_1}\frac{\partial x_2}{\partial q_2}-\frac{\partial\psi}{\partial q_2}\frac{\partial x_2}{\partial q_1}\right)\omega\right]\left(\frac{1}{J}\frac{\partial x_1}{\partial q_1}\right)$$
$$=-\frac{1}{J}\frac{\partial}{\partial q_1}\left[\frac{1}{rJ}\left(\frac{\partial\psi}{\partial q_1}\frac{\partial x_2}{\partial q_1}-\frac{\partial\psi}{\partial q_2}\frac{\partial x_2}{\partial q_1}\right)\omega\right]\frac{\partial x_1}{\partial q_2}$$
$$-\frac{1}{J}\frac{\partial}{\partial q_2}\left[\frac{1}{rJ}\left(\frac{\partial\psi}{\partial q_1}\frac{\partial x_2}{\partial q_2}-\frac{\partial\psi}{\partial q_2}\frac{\partial x_2}{\partial q_1}\right)\omega\right]\frac{\partial x_1}{\partial q_2}$$

Жаңа координаталардағы, теңдеудің оң жағындағы Лаплас операторының жазылуы:

$$\Delta\omega=\frac{1}{J}\frac{\partial}{\partial q_m}\left(Jg^{km}\frac{\partial\omega}{\partial q_k}\right), \qquad (3.29)$$

мұндағы g^{km} - метрикалық тензор m,k=1,2.

$$div\left(\frac{k}{r}grad\psi\right)=\frac{\partial}{\partial q_m}\left(J\frac{k}{r}g^{km}\frac{\partial\psi}{\partial q_k}\right) \tag{3.30}$$

мұндағы $grad\psi=\left(\frac{\partial\psi}{\partial x_1},\frac{\partial\psi}{\partial x_2}\right)$, ψ - ток функциясы.

Тұтқыр сығылмайтын сұйықтықтың ағынын температура өрісін ескере отырып, кеуекті орталар арқылы сипаттайтын теңдеулер жүйесі ортогональ қисық сызықты координаттар жүйесінде келесі түрде жазылады:

$$a_{ij}=\frac{\partial x_i}{\partial q_j},k,m=1,2,$$

$$\sqrt{g_{11}\,g_{22}}\frac{\partial\omega}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial q_m}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial q_n}\frac{\partial q_n}{\partial x_2}\omega\right)\frac{\partial q_m}{\partial x_1}-\frac{\partial}{\partial q_m}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial q_n}\frac{\partial q_n}{\partial x_1}\omega\right)\frac{\partial q_m}{\partial x_2}= \tag{3.31}$$
$$\frac{1}{Re}\left[\frac{\partial}{\partial q_1}\left(\sqrt{\frac{g_{22}}{g_{11}}}\frac{\partial\omega}{\partial q_1}\right)+\frac{\partial}{\partial q_2}\left(\sqrt{\frac{g_{11}}{g_{22}}}\frac{\partial\omega}{\partial q_2}\right)-\frac{\partial}{\partial q_1}\left(\frac{\omega}{r}a_{12}\right)+\frac{\partial}{\partial q_2}\left(\frac{\omega}{r}a_{11}\right)\right]-$$
$$\frac{\partial}{\partial q_1}\left(\frac{k}{r}\sqrt{\frac{g_{22}}{g_{11}}}\frac{\partial\psi}{\partial q_1}\right)-\frac{\partial}{\partial q_2}\left(\frac{k}{r}\sqrt{\frac{g_{11}}{g_{22}}}\frac{\partial\psi}{\partial q_2}\right)-\frac{Gr}{Re^2}\left(\frac{\partial\theta}{\partial q_1}a_{22}-\frac{\partial\theta}{\partial q_2}a_{21}\right),$$

$$\frac{\partial}{\partial q_1}\left(\frac{1}{r}\sqrt{\frac{g_{22}}{g_{11}}}\frac{\partial\psi}{\partial q_1}\right)+\frac{\partial}{\partial q_2}\left(\frac{1}{r}\sqrt{\frac{g_{11}}{g_{22}}}\frac{\partial\psi}{\partial q_2}\right)=\sqrt{g_{11}g_{22}}\omega, \tag{3.32}$$

$$\sqrt{g_{11}\,g_{22}}\frac{\partial\varphi_i}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial q_m}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial q_n}\frac{\partial q_n}{\partial x_2}\varphi_i\right)\frac{\partial q_m}{\partial x_1}-\frac{\partial}{\partial q_m}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial q_n}\frac{\partial q_n}{\partial x_1}\varphi_i\right)= \tag{3.33}$$
$$\frac{\partial}{\partial q_1}\left(\frac{D_i}{r}\sqrt{\frac{g_{22}}{g_{11}}}\frac{\partial\varphi_i}{\partial q_1}\right)+\frac{\partial}{\partial q_2}\left(\frac{D_i}{r}\sqrt{\frac{g_{11}}{g_{22}}}\frac{\partial\varphi_i}{\partial q_2}\right),$$

$$\sqrt{g_{11}\,g_{22}}\frac{\partial\theta}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial q_m}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial q_n}\frac{\partial q_n}{\partial x_2}\theta\right)\frac{\partial q_m}{\partial x_1}-\frac{\partial}{\partial q_m}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial q_n}\frac{\partial q_n}{\partial x_1}\theta\right)= \tag{3.34}$$
$$\frac{1}{PePr}\left[\frac{\partial}{\partial q_1}\left(\sqrt{\frac{g_{22}}{g_{11}}}\frac{\partial\theta}{\partial q_1}\right)+\frac{\partial}{\partial q_2}\left(\sqrt{\frac{g_{11}}{g_{22}}}\frac{\partial\theta}{\partial q_2}\right)-\frac{\partial}{\partial q_1}\left(\frac{\theta}{r}a_{12}\right)+\frac{\partial}{\partial q_2}\left(\frac{\theta}{r}a_{11}\right)\right]+$$
$$\frac{N_uF}{PePr}(T-\theta),$$

$$\sqrt{g_{11}\,g_{22}}\frac{\partial T}{\partial t}+\frac{1}{PePr}\frac{1}{r}\left[\frac{\partial}{\partial q_1}\left(kr\left(\sqrt{\frac{g_{22}}{g_{11}}}\frac{\partial T}{\partial q_1}\right)+\frac{\partial}{\partial q_2}\left(kr\sqrt{\frac{g_{11}}{g_{22}}}\frac{\partial T}{\partial q_2}\right)\right]=\right. \tag{3.35}$$
$$\frac{Nu.F}{PePr}(T-\theta)$$

3.4 Жаңа координаттар жүйесінде шекаралық шарттар:

кіріс шекарасында: $q_1=0$, $0\le q_2\le 1;\ \psi=\psi_0(q_2),\ \omega=\omega_0(q_2)$ болады, ал ψ_0,ω_0 белгілі функциялар.

симметрия осінде: $0\le q_1\le 1$, $q_2=0$; $\omega=\psi=0.$

шығыс шекарасы: $q_1=1,\quad 0\le q_2\le 1;\ \frac{\partial\psi}{\partial q_1}=0,\ \frac{\partial\omega}{\partial q_1}=0.$

қатты қабырғасы: $0\le q_1\le 1$, $0\le q_2\le r(q_1)$; $\psi=const$, $\frac{\partial\psi}{\partial q_2}=0.$

Қатты қабырғада жылдамдық иірімін есептеу үшін Том формуласы қолданылады.

(3.38), (3.39) теңдеулер жүйесін әрі қарай зерттеуге ыңғайлы түрде былай жазамыз:

$$\sqrt{g_{11}g_{22}}\frac{\partial\omega}{\partial t}+(L_1+L_2)\omega=-L_3\psi \tag{3.36}$$

$$\frac{\partial}{\partial q_1}\left(\frac{\Phi}{r}\frac{\partial\psi}{\partial q_1}\right)+\frac{\partial}{\partial q_2}\left(\frac{1}{r\Phi}\frac{\partial\psi}{\partial q_2}\right)=\sqrt{g_{11}g_{22}}\,\omega \tag{3.37}$$

мұнда

$$L_1\omega=\frac{\partial}{\partial q_1}\left[\frac{1}{r}\left(\frac{\partial\psi}{\partial q_2}+\frac{a_{12}}{Re}\right)\omega\right]-\frac{1}{Re}\frac{\partial}{\partial q_1}\left(\Phi\frac{\partial\omega}{\partial q_1}\right)+\frac{Gr}{Re^2}\frac{\partial}{\partial q_1}\left(\frac{\partial\theta}{\partial q_1}\right),$$

$$L_2\omega=-\frac{\partial}{\partial q_2}\left[\frac{1}{r}\left(\frac{\partial\psi}{\partial q_1}+\frac{a_{11}}{Re}\right)\omega\right]-\frac{1}{Re}\frac{\partial}{\partial q_2}\left(\frac{1}{\Phi}\frac{\partial\omega}{\partial q_2}\right)+\frac{Gr}{Re^2}\frac{\partial}{\partial q_2}\left(\frac{\partial\theta}{\partial q_2}\right),$$

$$L_3\psi=\left[\frac{\partial}{\partial q_1}\left(\frac{k}{r}\Phi\frac{\partial\psi}{\partial q_1}\right)+\frac{\partial}{\partial q_2}\left(\frac{k}{r\,\Phi}\frac{\partial\psi}{\partial q_2}\right)\right],$$

$$\Phi=\sqrt{\frac{g_{22}}{g_{11}}},\qquad a_{ij}=\frac{\partial x_i}{\partial q_j},\quad i,j=1,2$$

Ортогоналды координатталар жүйесінде мына шарттар орындалады:

$$g_{12}\frac{\partial\psi}{\partial q_1}-g_{11}\frac{\partial\psi}{\partial q_2}=0,\ g_{12}=0\,,\frac{\partial\psi}{\partial q_2}=0 \tag{3.38}$$

Жылдамдық векторының элементтері қисық сызықты координаттар жүйесінде ток функциясының туындылары арқылы төмендегідей қатынастармен өрнектеледі:

$$u=\frac{1}{J}\left(a_{11}\frac{\partial\psi}{\partial q_2}-a_{12}\frac{\partial\psi}{\partial q_1}\right),$$

$$\upsilon=\frac{1}{J}\left(a_{22}\frac{\partial\psi}{\partial q_1}-a_{21}\frac{\partial\psi}{\partial q_2}\right).$$

3.5 . Ақырлы айырымдық қатынастарының сипаттамасы

Навье-Стокс теңдеулеріне негізделген дифференциалдық теңдеулер жүйесін сандық шешу үшін (36), (37) теңдеулерді келесі итерациялық ақырлы айырымдық схемалар арқылы қарастырамыз [60].

$$\sqrt{g_{11}g_{22}}\,\frac{\omega_{i,j}^{n+1/3}-\omega_{i,j}^{n}}{\tau}+L_{1,h}\omega^{n+\frac{1}{3}}+L_{2,h}\omega^{n}=-L_{3,h}\psi^{n} \tag{3.39}$$

$$\sqrt{g_{11}g_{22}}\,\frac{\omega_{i,j}^{n+2/3}-\omega_{i,j}^{n+1/3}}{\tau}+L_{1,h}\omega^{n+\frac{1}{3}}+L_{2,h}\omega^{n+2/3}=-L_{3,h}\psi^{n},$$

$$\sqrt{g_{11}g_{22}}\,\frac{\omega_{i,j}^{n+1}-\omega_{i,j}^{n+2/3}}{\tau}=-L_{3,h}(\psi^{n+1}-\psi^{n}), \tag{3.40}$$

$$\left(\frac{1}{r}\sqrt{\frac{g_{22}}{g_{11}}}\psi_{q1}^{n+1}\right)_{q1}+\left(\frac{1}{r}\sqrt{\frac{g_{11}}{g_{22}}}\psi_{q2}^{n+1}\right)_{q2}=\sqrt{g_{11}g_{22}}\omega_{i,j}^{n+1}\,,$$

q_1 бағытындағы $L_{1,h}$ операторы келесі түрге ие

$$\begin{aligned}L_{1,h}\omega_{i,j}^{n+\frac{1}{3}}=\frac{1}{h_1}\Bigg[&\frac{1}{r_{i+\frac{1}{2},j}}\left(\left(\frac{\partial\psi^{n}}{\partial q_2}\right)_{i+\frac{1}{2},j}+\frac{a_{12}}{Re}\right)\left(\omega_{i+1,j}^{n+\frac{1}{3}}-\omega_{i,j}^{n+\frac{1}{3}}\right)\\&-\frac{1}{r_{i-\frac{1}{2},j}}\left(\left(\frac{\partial\psi^{n}}{\partial q_2}\right)_{i-\frac{1}{2},j}+\frac{a_{12}}{Re}\right)\left(\omega_{i,j}^{n+\frac{1}{3}}-\omega_{i-1,j}^{n+\frac{1}{3}}\right)\Bigg]\\&-\frac{1}{Reh_1^2}\left[\Phi_{i+\frac{1}{2},j}\left(\omega_{i+1,j}^{n+\frac{1}{3}}-\omega_{i,j}^{n+\frac{1}{3}}\right)-\Phi_{i-\frac{1}{2},j}\left(\omega_{i,j}^{n+\frac{1}{3}}-\omega_{i-1,j}^{n+\frac{1}{3}}\right)\right]\\&+\frac{Gr}{Re^2h_1^2}\left[\left(\theta_{i+1,j}^{n+\frac{1}{3}}-\theta_{i,j}^{n+\frac{1}{3}}\right)-\left(\theta_{i,j}^{n+\frac{1}{3}}-\theta_{i-1,j}^{n+\frac{1}{3}}\right)\right]\end{aligned} \tag{3.41}$$

q_2 бағытындағы $L_{2,h}$ операторы

$$\begin{aligned}L_{2h}\omega_{ij}^{n}=-\frac{1}{h_2}\Bigg[&\frac{1}{r_{i,j+\frac{1}{2}}}\left(\left(\frac{\partial\psi^{n}}{\partial q_1}\right)_{i,j+\frac{1}{2}}+\frac{a_{11}}{Re}\right)\left(\omega_{i,j+1}^{n}-\omega_{i,j}^{n}\right)\\&-\frac{1}{r_{i,j-\frac{1}{2}}}\left(\left(\frac{\partial\psi^{n}}{\partial q_1}\right)_{i,j-\frac{1}{2}}+\frac{a_{11}}{Re}\right)\left(\omega_{i,j}^{n}-\omega_{i,j-1}^{n}\right)\Bigg]\\&-\frac{1}{Reh_2^2}\left[\frac{1}{\Phi_{i,j+\frac{1}{2}}}\left(\omega_{i,j+1}^{n}-\omega_{i,j}^{n}\right)-\frac{1}{\Phi_{i,j-\frac{1}{2}}}\left(\omega_{i,j}^{n}-\omega_{i,j-1}^{n}\right)\right]\\&+\frac{Gr}{Re^2h_2^2}\left(\theta_{i,j+1}^{n}-2\theta_{i,j}^{n}+\theta_{i,j-1}^{n}\right)\end{aligned} \tag{3.42}$$

$$L_{3,h}\psi_{i,j}^{n} = \frac{1}{h_1^2}\left[\frac{k}{r_{i+\frac{1}{2},j}}\left(\frac{1}{\Phi_{i+\frac{1}{2},j}}\left(\psi_{i+1,j}^{n}-\psi_{i,j}^{n}\right)\right)\right.$$
$$\left.-\frac{k}{r_{i-\frac{1}{2},j}}\left(\frac{1}{\Phi_{i-\frac{1}{2},j}}\left(\psi_{i,j}^{n}-\psi_{i-1,j}^{n}\right)\right)\right]$$
$$+\frac{1}{h_2^2}\left[\frac{k}{r_{i,j+\frac{1}{2}}}\left(\Phi_{i,j+\frac{1}{2}}\left(\psi_{i,j+1}^{n}-\psi_{i,j}^{n}\right)\right)+\frac{k}{r_{i,j-\frac{1}{2}}}\left(\Phi_{i,j-\frac{1}{2}}\left(\psi_{i,j}^{n}-\psi_{i,j-1}^{n}\right)\right)\right]$$

(3.59) теңдеуі бірінші бөлік үшін айырымдық түрінде

$$\sqrt{g_{11}\,g_{22}}\frac{\omega_{ij}^{n+1/3}-\omega_{ij}^{n}}{\tau}+\frac{1}{h_1}\left[\frac{1}{r_{i+\frac{1}{2},j}}\left(\left(\frac{\partial\psi^{n}}{\partial q_2}\right)_{i+\frac{1}{2},j}+\frac{a_{12}}{Re}\right)\left(\omega_{i+1,j}^{n+\frac{1}{3}}-\omega_{i,j}^{n+\frac{1}{3}}\right)-\right.$$
$$\left.\frac{1}{r_{i-\frac{1}{2},j}}\left(\left(\frac{\partial\psi^{n}}{\partial q_2}\right)_{i-\frac{1}{2},j}+\frac{a_{12}}{Re}\right)\left(\omega_{i,j}^{n+\frac{1}{3}}-\omega_{i-1,j}^{n+\frac{1}{3}}\right)\right]-\frac{1}{Reh_1^2}\left[\Phi_{i+\frac{1}{2},j}\left(\omega_{i+1,j}^{n+\frac{1}{3}}-\right.\right.$$
$$\left.\left.\omega_{i,j}^{n+\frac{1}{3}}\right)-\Phi_{i-\frac{1}{2},j}\left(\omega_{i,j}^{n+\frac{1}{3}}-\omega_{i-1,j}^{n+\frac{1}{3}}\right)\right]+\frac{Gr}{Re^2h_1^2}\left[\left(\theta_{i+1,j}^{n+\frac{1}{3}}-\theta_{i,j}^{n+\frac{1}{3}}\right)-\right.$$
$$\left.\left(\theta_{i,j}^{n+\frac{1}{3}}-\theta_{i-1,j}^{n+\frac{1}{3}}\right)\right]\quad-\frac{1}{h_2}\left[\frac{1}{r_{i,j+\frac{1}{2}}}\left(\left(\frac{\partial\psi^{n}}{\partial q_1}\right)_{i,j+\frac{1}{2}}+\frac{a_{11}}{Re}\right)\left(\omega_{i,j+1}^{n}-\omega_{i,j}^{n}\right)-\right.$$
$$\left.\frac{1}{r_{i,j-\frac{1}{2}}}\left(\left(\frac{\partial\psi^{n}}{\partial q_1}\right)_{i,j-\frac{1}{2}}+\frac{a_{11}}{Re}\right)\left(\omega_{i,j}^{n}-\omega_{i,j-1}^{n}\right)\right]-\frac{1}{Reh_2^2}\left[\frac{1}{\Phi_{i,j+\frac{1}{2}}}\left(\omega_{i,j+1}^{n}-\omega_{i,j}^{n}\right)-\right.\quad(3.43)$$
$$\left.\frac{1}{\Phi_{i,j-\frac{1}{2}}}\left(\omega_{i,j}^{n}-\omega_{i,j-1}^{n}\right)\right]+\frac{Gr}{Re^2h_2^2}\left(\theta_{i,j+1}^{n}-2\theta_{i,j}^{n}+\theta_{i,j-1}^{n}\right)=$$
$$-\frac{1}{h_1^2}\left[\frac{k}{r_{i+\frac{1}{2},j}}\left(\frac{1}{\Phi_{i+\frac{1}{2},j}}\left(\psi_{i+1,j}^{n}-\psi_{i,j}^{n}\right)\right)-\frac{k}{r_{i-\frac{1}{2},j}}\left(\frac{1}{\Phi_{i-\frac{1}{2},j}}\left(\psi_{i,j}^{n}-\psi_{i-1,j}^{n}\right)\right)\right]+$$
$$\frac{1}{h_2^2}\left[\frac{k}{r_{i,j+\frac{1}{2}}}\left(\Phi_{i,j+\frac{1}{2}}\left(\psi_{i,j+1}^{n}-\psi_{i,j}^{n}\right)\right)+\frac{k}{r_{i,j-\frac{1}{2}}}\left(\Phi_{i,j-\frac{1}{2}}\left(\psi_{i,j}^{n}-\psi_{i,j-1}^{n}\right)\right)\right]$$

i бағыты бойынша мынадай үшдиагоналды жүйе:

$$\mathrm{A}\omega_{i+1,j}^{n+\frac{1}{3}}-C\omega_{i,j}^{n+\frac{1}{3}}+B\omega_{i-1,j}^{n+\frac{1}{3}}=F$$

мұнда коэффициенттері

$$A = \frac{\tau}{2h_1}\frac{1}{r_{i+\frac{1}{2},j}}\left(\left(\frac{\partial\psi^n}{\partial q_2}\right)_{i+\frac{1}{2},j} + \frac{a_{11}}{Re}\right) - \frac{\tau}{Reh_1^2}\Phi_{i+\frac{1}{2},j}$$

$$\text{B}= -\frac{\tau}{2h_1}\frac{1}{r_{i-\frac{1}{2},j}}\left(\left(\frac{\partial\psi^n}{\partial q_2}\right)_{i-\frac{1}{2},j} + \frac{a_{11}}{Re}\right) - \frac{\tau}{Reh_1^2}\Phi_{i-\frac{1}{2},j}$$

$$\text{C}= \frac{\sqrt{g_{11}\,g_{22}}}{\tau} + \frac{\tau}{2h_1}\frac{1}{r_{i+\frac{1}{2},j}}\left(\left(\frac{\partial\psi^n}{\partial q_2}\right)_{i+\frac{1}{2},j} + \frac{a_{11}}{Re}\right) + \frac{\tau}{2h_1}\frac{1}{r_{i-\frac{1}{2},j}}\left(\left(\frac{\partial\psi^n}{\partial q_2}\right)_{i-\frac{1}{2},j} + \frac{a_{11}}{Re}\right) - \frac{1}{Reh_2^2}\left[\Phi_{i+\frac{1}{2},j} + \Phi_{i-\frac{1}{2},j}\right]$$

$$F = \sqrt{g_{11}\,g_{22}}\,\omega_{i,j}^n + L_{2,h}\omega_{i,j}^n - L_{3,h}\psi_{i,j}^n$$

(3.59) теңдеу екінші бөлік үшін айырымдық түрінде

$$\sqrt{g_{11}\,g_{22}}\frac{\omega_{i,j}^{n+2/3}-\omega_{i,j}^{n+1/3}}{\tau} - \frac{1}{2h_1}\left[\frac{1}{r_{i+\frac{1}{2},j}}\left(\left(\frac{\partial\psi^n}{\partial q_2}\right)_{i+\frac{1}{2},j} + \frac{a_{11}}{Re}\right)\left(\omega_{i+1,j}^{n+\frac{1}{3}} - \omega_{i,j}^{n+\frac{1}{3}}\right) - \frac{1}{r_{i-\frac{1}{2},j}}\left(\left(\frac{\partial\psi^n}{\partial q_2}\right)_{i-\frac{1}{2},j} + \frac{a_{11}}{Re}\right)\left(\omega_{i,j}^{n+\frac{1}{3}} - \omega_{i-1,j}^{n+\frac{1}{3}}\right)\right] - \frac{1}{Reh_1^2}\left[\Phi_{i+\frac{1}{2},j}\left(\omega_{i+1,j}^{n+\frac{1}{3}} - \omega_{i,j}^{n+\frac{1}{3}}\right) - \Phi_{i-\frac{1}{2},j}\left(\omega_{i,j}^{n+\frac{1}{3}} - \omega_{i-1,j}^{n+\frac{1}{3}}\right)\right] + \frac{Gr}{Re^2h_1^2}\left[\left(\theta_{i+1,j}^{n+\frac{1}{3}} - \theta_{i,j}^{n+\frac{1}{3}}\right) - \left(\theta_{i,j}^{n+\frac{1}{3}} - \theta_{i-1,j}^{n+\frac{1}{3}}\right)\right] +$$

$$-\frac{1}{2h_2}\left[\frac{1}{r_{i,j+\frac{1}{2}}}\left(\left(\frac{\partial\psi^n}{\partial q_1}\right)_{i,j+\frac{1}{2}} + \frac{a_{11}}{Re}\right)\left(\omega_{i,j+1}^{n+2/3} - \omega_{i,j}^{n+2/3}\right) - \frac{1}{r_{i,j-\frac{1}{2}}}\left(\left(\frac{\partial\psi^n}{\partial q_1}\right)_{i,j-\frac{1}{2}} + \frac{a_{11}}{Re}\right)\left(\omega_{i,j}^{n+2/3} - \omega_{i,j-1}^{n+2/3}\right)\right] - \frac{1}{Reh_2^2}\left[\frac{1}{\Phi_{i,j+\frac{1}{2}}}\left(\omega_{i,j+1}^{n+2/3} - \omega_{ij}^{n+2/3}\right) - \frac{1}{\Phi_{i,j-\frac{1}{2}}}\left(\omega_{i,j}^{n+2/3} - \omega_{i,j-1}^{n+2/3}\right)\right] + \frac{Gr}{Re^2h_2^2}\left(\theta_{i,j+1}^n - 2\theta_{i,j}^n + \theta_{i,j-1}^n\right) = -\frac{1}{h_1^2}\left[\frac{k}{r_{i+\frac{1}{2},j}}\left(\frac{1}{\Phi_{i+\frac{1}{2},j}}\left(\psi_{i+1,j}^n - \psi_{i,j}^n\right)\right) - \frac{k}{r_{i-\frac{1}{2},j}}\left(\frac{1}{\Phi_{i-\frac{1}{2},j}}\left(\psi_{i,j}^n - \psi_{i-1,j}^n\right)\right)\right] + \frac{1}{h_2^2}\left[\frac{k}{r_{i,j+\frac{1}{2}}}\left(\Phi_{i,j+\frac{1}{2}}\left(\psi_{i,j+1}^n - \psi_{i,j}^n\right)\right) + \frac{k}{r_{i,j-\frac{1}{2}}}\left(\Phi_{i,j-\frac{1}{2}}\left(\psi_{i,j}^n - \psi_{i,j-1}^n\right)\right)\right] \quad (3.44)$$

j бағыты бойынша мынадай үшдиагоналды жүйе:

$$\text{A}\omega_{i,j+1}^{n+2/3} - C\omega_{i,j}^{n+2/3} + B\omega_{i,j-1}^{n+2/3} = F \qquad (3.45)$$

мұндағы коэффициенттер:

$$A = \frac{\tau}{2h_2}\frac{1}{r_{i,j+\frac{1}{2}}}\left(\left(\frac{\partial\psi^n}{\partial q_1}\right)_{i,j+\frac{1}{2}} + \frac{a_{11}}{Re}\right) - \frac{\tau}{Reh_2^2}\frac{1}{\Phi_{i,j+\frac{1}{2}}}$$

$$\text{B} = -\frac{\tau}{2h_2}\frac{1}{r_{i,j-\frac{1}{2}}}\left(\left(\frac{\partial\psi^n}{\partial q_1}\right)_{i,j-\frac{1}{2}} + \frac{a_{11}}{Re}\right) - \frac{\tau}{Reh_2^2}\frac{1}{\Phi_{i,j-\frac{1}{2}}}$$

$$\text{C} = \frac{\sqrt{g_{11}\,g_{22}}}{\tau} + \frac{\tau}{2h_2}\frac{1}{r_{i,j+\frac{1}{2}}}\left(\left(\frac{\partial\psi^n}{\partial q_1}\right)_{i,j+\frac{1}{2}} + \frac{a_{11}}{Re}\right) + \frac{\tau}{2h_2}\frac{1}{r_{i,j-\frac{1}{2}}}\left(\left(\frac{\partial\psi^n}{\partial q_1}\right)_{i,j-\frac{1}{2}} + \frac{a_{11}}{Re}\right) -$$

$$\frac{1}{Reh_2^2}\left[\frac{1}{\Phi_{i,j+\frac{1}{2}}} + \frac{1}{\Phi_{i,j-\frac{1}{2}}}\right]$$

$$F = \sqrt{g_{11}g_{22}}\;\omega_{i,j}^n + L_{1h}\omega_{i,j}^n - L_{3h}\psi_{i,j}^n$$

Бұл теңдеулер жүйесі (3.39), (3.40) ағынның динамикасын сипаттайды, Ол үшін бірінші теңдеуден, $\omega_{ij}^{n+1/3}$ - дің мәндері табылады ал екінші теңдеуден, $\omega_{ij}^{n+2/3}$ табылады. Ал (3.40) теңдеулерден ψ^{n+1} - ді есептейміз.Содан соң (3.40)-тың екінші теңдеуінен ω_{ij}^{n+1} табамыз.

Сонымен (3.39) және (3.40) теңдеулерді шешуде итерациялық процесті ω - жылдамдық иірімі үшін, мына теңсіздік орындалғанға дейін жалғастырамыз.

$$\|\omega^{n+1} - \omega^n\|_{\text{c}} \le \tau\,\varepsilon$$

3.6. Нәтижелерді талдау.

3.1-кестеден көріп отырғанымыздай Re санының ұлғаюымен ψ_{max} мәні артады. Кестедегі барлық нәтижелер m=0.2−0.4 аралығында болғанда , Re санының әртүрлі мәндерінде саналған. Қатты шекарадағы ток функциясының мәні 0.02-ге, ал иірім аймағында ток функциясынің мәні кестеде көрсетілгендей өседі.

3.1-кесте 41×21 тор үшін

Re	x_1	x_2	ψ_{max}	Итерация саны	*уақыт*

100	0.5716559337482368	0.3218785880697778	0.0223	2070	273 секунд
500	1.065695666358492	0.37084370176015174	0.0291	4207	*514* секунд
1000	1.065695666358492	0.37084370176015174	0.0325	6287	667.0934 секунд
2000	1.3733211011294242	0.37492454616578524	0.0345	9423	903.8450 секунд
5000	1.0660258676562395	0.3965031311383946	0.0355	9531	981.1325 секунд
10000	1.0660258676562395	0.3965031311383946	0.0354	15000	1371.7946 секунд

Есептеу эксперименттерін жүргізу арқылы тордың дәлдікке әсері талданды. Python тілінде жазылған програмалық код 31×21 , 41×21 және 61×41 торында жүргізілді.Есептеу нәтижесінде Re саны артқан сайын ψ_{max}-өседі.

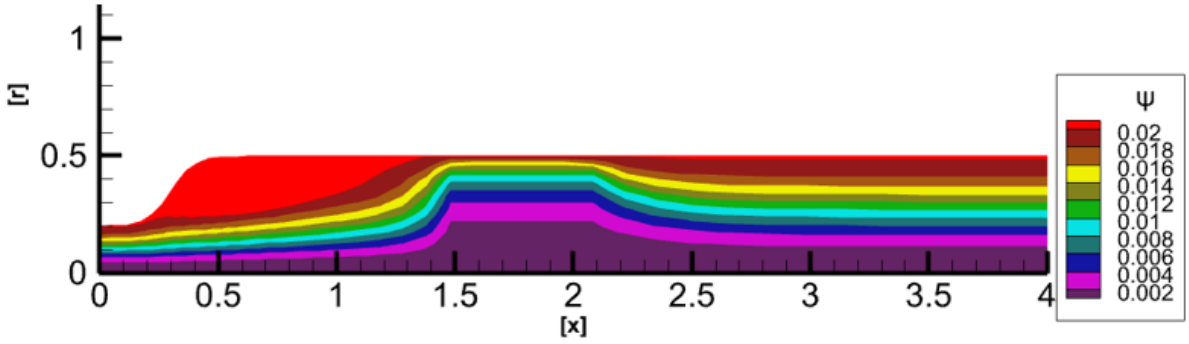
Программалық код тор өлшемін өзгертуге және есепті санауда еш қиындық туғызбайды,себебі барлығы да автоматтандырылған.Тор өлшемі әртүрлі болғанда есептеулер жүргізілді. Нақты симуляцияларда біз 41*21,61*41 торын қолдандық, себебі есептеу дәлдік деңгейі талапқа сай болды, екі жағдайнда да итерация саны мен есептеу уақыты *өзгеше*.Ал нәтижелердің айырмашылығы айтарлықтай өзгеріссіз қалды.

Екі түрлі ток функцияларыының мәндері торлар арасындағы айырмашылық 0.78%-дан аз**,** координаталары x_1және x_2 өзгереді,торда итерациялар саны артады, бірақ орнықтылық сақталады.Бұрыштық нүктелердегі құйындылық ω -мәндерінің айырмашылығы 1%-дан аспады, Сонымен қатар, тор тығыздығы артқанымен, ток функциясы мен жылдамдық иірімі айтарлықтай өзгеріссіз қалды. Ешқандай жасанды осцилляциялар байқалмады, бұл әдістің сенімділігін растайды.

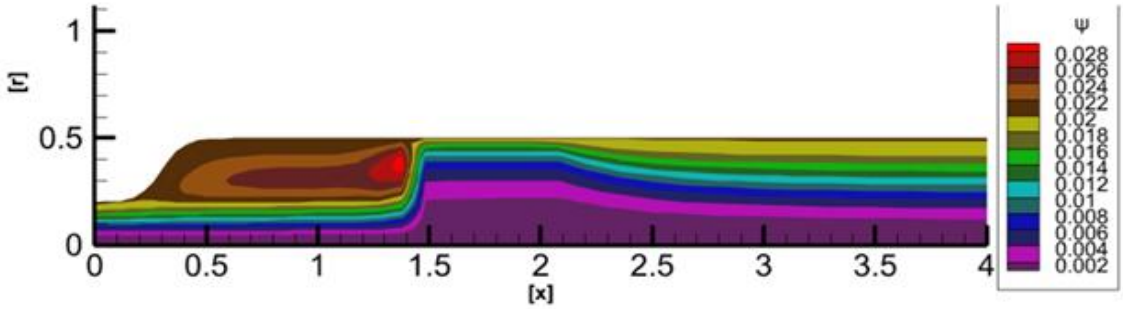
Ал келесі есептеулер

$$m(r) = \begin{cases} 0.4 & \text{кезінде } 0 \le r \le 0.2, \\ \frac{100r^2+59}{210} & \text{кезінде } 0.2 \le r \le 0.5 . \end{cases}$$

алынған жағдайдағы катализатордың жоғарғы бөлігінің ағысына арналған.

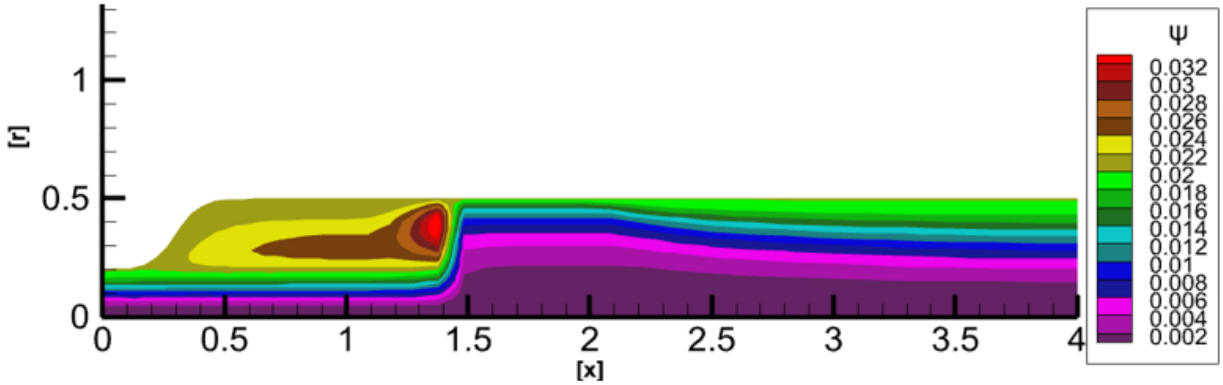


3.2-Сурет. Ток функциясы, уақыт бойынша қадам $\tau = 0.05$, Рейнольдс саны Re=100, тұтқырлық коэффициенті $m = 0.2$-0.5, есептеу шешу дәлдігі ε =0.00001.

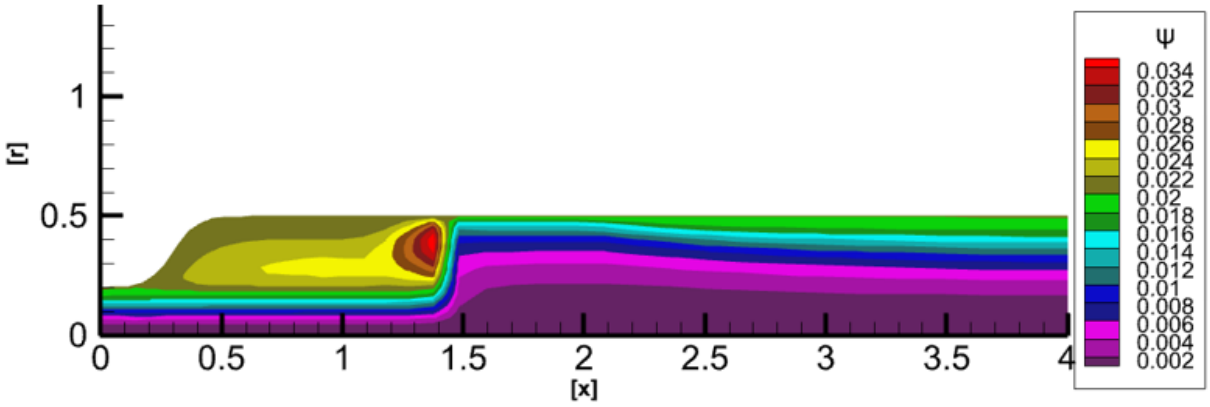


3.3-Сурет. Ток функциясы, уақыт бойынша қадам $\tau = 0.05$, Рейнольдс саны Re=500, тұтқырлық коэффициенті $m = 0.2$-0.5, есептеу шешу дәлдігі ε =0.00001.

Жоғардағы 3.2 суретте Re=100 болғандағы ток функциясының изосызықтарының кері ағыс аймақтары жоқ. Ал Рейнольдс саны 500-ге дейін өскенде 3.3 суретте кеуек ортаның алдында кері ағыс аймағы пайда болды.



3.4-Сурет. Ток функциясы, уақыт бойынша қадам $\tau = 0.05$, Рейнольдс саны Re=2000, тұтқырлық коэффициенті $m = 0.2$-0.5, есептеу шешу дәлдігі ε =0.00001.



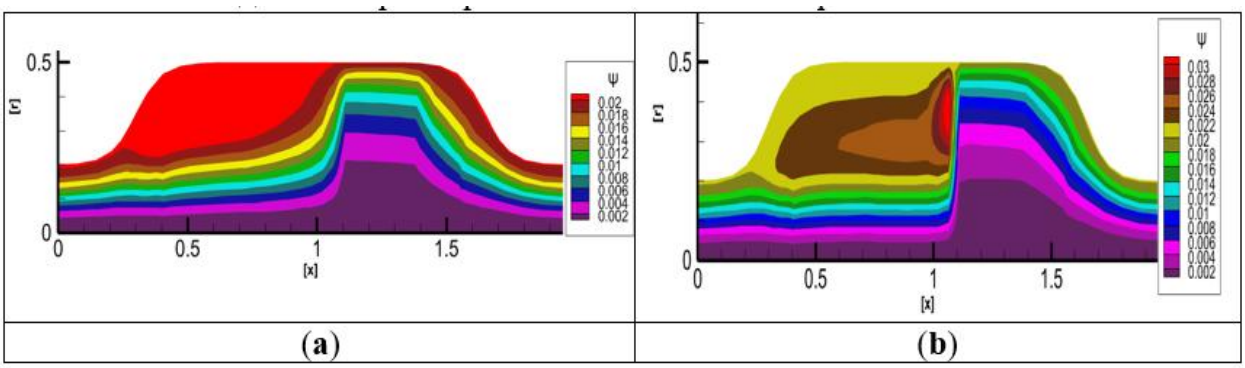
3.5-Сурет. Ток функциясы, уақыт бойынша қадам $\tau = 0.05$, Рейнольдс саны Re=5000, тұтқырлық коэффициенті $m = 0.2\text{-}0.5$, есептеу шешу дәлдігі ε =0.00001.

Келесі 3.4 және 3.5 суреттерде Re =2000 және Re =5000 болғандағы ток функциясының изосызықтарының өзгерісі көрсетілген. суретте көрініп түрғандай кеуек орта кедергісі нәтижесінде Re саны өсуімен иірім ауданы ұлғаяды. Иірім ортасында Re=2000, ψ_{max}=0.0.345 ал Re =5000 үшін ψ_{max}=0.0.355.

Алғашқы 3.2-3.5 суреттерде қисық сызықты тек диффузорлық бөлігі бар,ұзындығы 4-ке тең құбырдағы сұйықтық қозғалысы көрсетілген.Қисық сызықты торлар әдісінің негізгі артықшылығының арқасында осындай ұзін құбырдағы қозғалысты санау мүмкін болды, себебі есептеу облысы біркелкі тордан тұратын бірлік квадрат.

Келесі зерттеулер 3.6-3.7 суреттер диффузоры және конфузоры бар құбырды сандық моделдеуге арналған .Бұл сандық есептеулерде құбырдың ұзындығы 2-ке тең.Диффузор және конфузор бөлігінде жиіленетін торлар құрылады, себебі жылдамдықтың градиенті осы аймақтарда жылдам өзгереді, оның үсіне құбырдың ортасында кеуек орта орналасқан. Бұл ағыстың күрделілігі айтарлықтай жоғары, себебі есептеу облысының геометриясы күрделі.

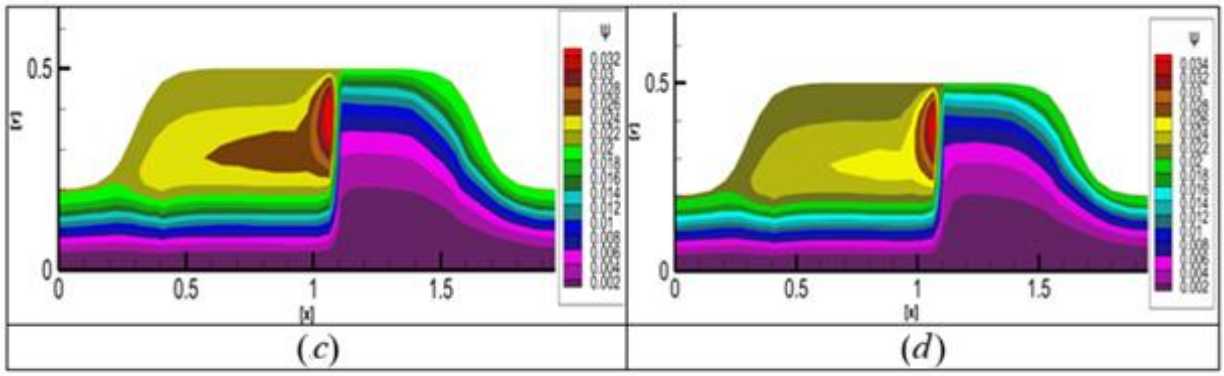
Катализатордың жоғарғы толық бөлігінің сұйықтықтың ағыны:



3.6-Сурет. Ток функциясы, уақыт бойынша қадам $\tau = 0.005$, Рейнольдс саны Re =100 және Re =1000, тұтқырлық коэффициенті $m = 0.2$-0.5, есептеу шешу дәлдігі ε =0.00001.

Жоғардағы (a) және (b) суреттерден Re=100 бен Re =1000 болғандағы есептеулердің нәтижесінде өте үлкен өзгерістер барын көреміз.

Бұл есептеулерде уақыт бойынша параметрді кішірейтуге тура келді,яғни алдыңғы есептеулерден 10 есе $\tau = 0.005$. Уақыт бойынша есептеу параметрін осылайша азайтпаса есептеу орнықсыз болады.



3.7-Сурет. Ток функциясы, уақыт бойынша қадам $\tau = 0.005$, Рейнольдс саны Re =2000 және Re =5000, тұтқырлық коэффициенті $m = 0.2$-0.5, есептеу шешу дәлдігі ε =0.00001.

Ал келесі (c) және (d) суреттерде Re=2000 және Re =5000 мәндеріндегі ток функциясының изосызықтары көрсетілген. Re=2000 болғанда иірім аймағындағы ψ_{max}=0.0225 ал Re =5000 болғанда ψ_{max}=0.0223.

3.6 3-ші бөлім бойынша қорытынды

Мақалада әзірленген әдіс осьтік симметриялы геометриясы қисық сызықты құбырда кеуекті ортаны, тұтқыр сығылмайтын сұйықтықтың қозғалысы есебін сандық шешу үшін қолданылды.

Есептеулер нәтижесінде Рейнольдс саны артқан сайын, құйын аймақтарының көлемі ұлғайып, итерациялар саны артты қолданылған айырымдық схема орнықты екені көрсетті.

Каталитикалық нейтрализаторда ағынның тиімділігін арттыру үшін кері ағыс аймақтарының көлемін азайту керек. Рейнольдс санының артуы ағынның иірімі аймағының үлғайюуына алып келеді. Ал жасалған программалық код құбырдың геометриясын өзгертіп,есептеу экспериментін жүргізуге мүмкіндік берді.

Каталитикалық нейтрализаторды моделдеуге қолданылған Навье-Стокс теңдеулер жүйесі физикалық заңдылықтарға негізделген.

Ал цилиндрлік координаттан кез-келген қисық сызықты ортогональ координаталарға көшу қатаң математикалық өрнектермен дәлелденген.

Қисық сызықты облысқа ортогональ тор тұрғызу үшін белгілі әдістер қолданылған .

Ал кез-келген қисық сызықты ортогональ координаталардағы теңдеулердің айырымдық схемасы үш деңгейлі алгоритммен жүзеге асырылды.

Бұл схеманың орнықтылығы мен жинақтылығы белгілі.

Осы айырымдық схемамен программалық код жасалды.Параметрлердің кең ауқымды диапозонында көптеген методикалық есептеулер жүргізілді.

Рейнольдс санын 100-ден 10000-ға дейін көтердік, Рейнольдс санының артуы ағынның турбуленттілік деңгейін жоғарылатты.

1. Рейнольдс саны $Re \leq 1000$ кезінде ағыс ламинарлы болады.

2. Рейнольдс саны $2000 \leq Re \leq 5000$ аралығында қозғалыс күрделі болады.

3. Рейнольдс саны $Re \geq 8000$ кезінде ағын турбулентті режимге көшеді, бұл сызықтық емес конвекциялық мүшелердің әсерінің күшейгенінің белгісі.

Есептеу эксперименті теориялық дәлелденген пайымдаулардың дұрыстығын көрсетті.Ғныи схема орнықты және шешімі дүріс жинақталады.Алынған нәтижелер зерттеу обьектісінің физикалық процесін дұрыс сипаттайды.

Қазіргі заманауи компьютерлердің көмегімен біздің программалық кодты қолданып әр түрлі геометрия үшін есептеу эксперименттерін жүргізуге болады.Бұл есептеу эксперименттері табиғи эксперименттерімен салыстырғанда қаржылық жағынан өте арзанға түседі.

Бұл мақаладағы математикалық модель эксперименттік деректермен салыстырылды.

Эксперимент нәтижелері каталитикалық нейтрализатордың түйіршіктері қабырғаларына жақын аймақтарда жылдам тозатынын көрсетеді.

Математикалық модельді санауға қолданылған сандық әдістің тиімділігі Роучтың тесттік есебін шығару арқылы корсетілген. Есептеу дәлдігі жоғары, есептеу уақыты төмен.

Модельдеу нәтижелері бойынша зиянды шығарындыларды азайтуда қандай катализатор геометриясы тиімді десек ең тиімді геометрия біз қарастырған пішіндер, яғни диффузорда иірімді азайтуға болады.Мысалы Витошинский профилін пайдаланса иірім өлшемі өте аз болады.

Модельді жылудинамикалық және химиялық реакция әсерлерін енгізу арқылы жетілдіруге болады, бұл катализатордың жалпы тиімділігін бағалау үшін маңызды болып табылады.Мақалада макроскопиялық модель қарастырылған, ал бұл әсерлері қосымша микроскопиялық модельдер қосу арқылы анықтауға болады.Мақаладағы модельді нейтрализатордың геометриясын анықтауға,оның ішіндегі өтетін процестерді модельдеуге қолдануға болады.

Бұл модельді тек автомобиль саласында ғана емес, келесі бағыттарда өнеркәсіптік газдарды тазарту, химия өндірісіндегі газ реакторлары, қоршаған ортаны қорғау жүйелері саласында да қолдануға болады.

ПАЙДАЛАНЫЛҒАН ӘДЕБИЕТТЕР ТІЗІМ

1 Темам Р. Уравнения Навье–Стокса: теория и численный анализ. — М.: Мир, 1981.

2 Lions J.-L. Некоторые методы решения нелинейных краевых задач. — Париж : Dunod, 1969. — 554 с.

3 Ladyzhenskaya, O. A. (1970). Mathematical problems of the dynamics of viscous incompressible fluid (2nd ed.). Moscow: Nauka.

4 Годунов С.К., Забродин А.В., Иванов М.Я., Крайко А.Н., Прокопов Г.П. Численное решение многомерных задач газовой динамики. – М.: Наука, 1976. – 400 с.

5 Kobelkov G. M. О модификациях уравнений Навье–Стокса // Сибирский математический журнал. — 2000. — Т. 41, №5. — С. 1003–1015. — URL: https://www.mathnet.ru/links/58c4f8263aa81951c0c72c702f44420e/sm668.pdf

6 Olshanskii M. A. A low order Galerkin finite element method for the Navier–Stokes equations of steady incompressible flow // Mathematics of Computation. — 2002.

7 N. T.Danaev, Sh. Smagulov, N. M. Temirbekov, Numerical solution of Navier–Stokes equations for an incompressible liquid in channels with a porous insert// *Prikl. Mekh. Tekh. Fiz.*, **36**:5 (1995), 21–29; *J. Appl. Mech. Tech. Phys.*, **36**:5 (1995), 658–665. DOI: https://doi.org/10.1007/BF02369278

8 Sh., Smagulov, N.M. Temirbekov and N.T. Danaev, Modeling of boundary conditions for pressure and total head in hydrodynamic problems using the method of fictitious domains// Doklady Physics, Volume 45, pages 496-498, 2000.

9 Temirbekov N.M., Approximate methods for solving viscous fluid equations in areas with complex geometry ,Almaty, 2000,-143p.

10 Vafai, K.; Tien, C. Boundary and inertia effects on flow and heat transfer in porous media. Int. J. Heat Mass Transfer 1981, 24, 195–203. https://doi.org/10.1016/0017-9310(81)90172-1

11 Angot, P.; Bruneau, C.-H.; Fabrie, P. A penalization method to take into account obstacles in incompressible viscous flows. Numerical Mathematics, 1999, 81, 497–520. https://doi.org/10.1007/s002110050401

12 Masud, A.; Khurram, R.A. A multiscale finite element method for the incompressible Navier–Stokes equations. Comput. Methods Appl. Mech. Engrg. 195 (2006) 1750–1777. https://doi.org/10.1016/j.cma.2005.05.022

13 Ingram, R.N. A Mixed Finite Element Approximation of Stokes–Brinkman and NS–Brinkman Equation for Non-Darcian Flows. https://doi.org/10.1137/11085949X

14 Anand, N.; Ebrahimi Pour, N.; Klimach, H.; Roller, S. Utilization of the Brinkman Penalization to Represent Geometries in a High-Order Discontinuous Galerkin Scheme on Octree Meshes. Symmetry 2019, 11, 1126. https://doi.org/10.3390/sym11091126

15 Garcke, H.; Nürnberg, R. A Parametric Finite Element Method for the Incompressible Navier–Stokes Equations on an Evolving Surface. arXiv 2026, 2508.19198. https://doi.org/10.48550/arXiv.2508.19198
16 Khokhar, R.B.; Bhutto, A.A.; Siddiqui, N.F.; Shaikh, F.; Bhutto, I.A. Numerical Analysis of Flow Rates, Porous Media, and Reynolds Numbers Affecting the Combining and Separating of Newtonian Fluid Flows. VFAST Transactions on Mathematics, 2023, 11(1), 217–236.
17 Li, B.-W.; Zhao, Y.-R.; Yu, Y.; Qian, Z.-D. Three-dimensional transient Navier–Stokes solvers in cylindrical coordinate system based on a spectral collocation method using explicit treatment of the pressure.International Journal for Numerical Methods in Fluids 2011, 66(8), 1039–1060. https://doi.org/10.1002/fld.2291
18 Domenichini, F.; Baccani, B. A formulation of Navier–Stokes problem in cylindrical coordinates applied to the 3D entry jet in a duct. Journal of Computational Physics 2004, 200, 177–191. https://doi.org/10.1016/j.jcp.2004.03.012
19 Pauli, L.; Behr, M. On stabilized space-time FEM for anisotropic meshes: Incompressible Navier–Stokes equations and applications to blood flow in medical devices. International Journal for Numerical Methods in Fluids 2017, 85(12), 698–721. https://doi.org/10.1002/fld.4394
20 M.Bercovier, and M,S. Engelman, A finite element for the numerical solution of viscous incompressible flows. Journal of Computational Physics, 30(2), 181–201, (1979). https://doi.org/10.1016/0021-9991(79)90098-6
21 M. S. Engelman, R. L., Sani, P. M. Gresho, P. M., and M.Bercovier, Consistent vs. reduced integration penalty methods for incompressible media using several old and new elements. International Journal for Numerical Methods in Fluids, 2(1), 25–42, (1982). https://doi.org/10.1002/fld.1650020103
22 J. P.Huffenus, and D. Khaletzky, A finite element method to solve the Navier–Stokes equations using the method of characteristics. International Journal for Numerical Methods in Fluids, 4(3), (1984). 247–269. https://doi.org/10.1002/fld.1650040303
23 L.Beirão da Veiga, F. Dassi, and G, Vacca, Pressure robust SUPG-stabilized finite elements for the unsteady Navier–Stokes equation. International Journal for Numerical Methods in Fluids, 2024, Vol. 1, No. 2, pp. 1–36. DOI: 10.48550/arXiv:2302.13952.
24 V., John, P .Knobloch, and J. Novo, Finite elements for scalar convection–diffusion equations and incompressible flow problems: a never ending story? Computers & Visual Science, 19(3), 47–63, (2018). https://doi.org/10.1007/s00791-017-0271-0
25 P. L .Viollet, J. P Benque, and J.Goussebaile, Two-dimensional numerical modeling of nonisothermal flows for unsteady thermal-hydraulic analysis. Nuclear Science and Engineering, 84(4), 350–372, (1983). https://doi.org/10.13182/NSE83-A15456

26 Zhumagulov, B., Temirbekov, N., & Tamabay, D. (2025). Analysis of stability and convergence of a modified three-step splitting scheme for Navier-Stokes equations. Applied and Computational Mathematics, 24(3), 486-509. doi: 10.30546/1683-6154.24.3.2025.486
27 У.С. Абдибеков, Д. Б. Жакебаев, Б.Т. Жумагулов, Моделирование турбулентного перемешивания однородной жидкости методом крупных вихрей, Вычислительные технологии, Том 14, № 2, 2009.
28 M. Garbey, Yu.V. Vassilevski . A parallel solver for unsteady incompressible 3D Navier-Stokes equations// Parallel Computing 27 (2001) 363-389.
29 Maxim A. Olshanskii and Yuri V. Vassilevski// Pressure Scur Complement Preonditioners for the Discrete Seen Problem, SIAM Journal on Scientific Computing. 2007, Vol.29. No.6, pp.2686-2704. DOI: 10.1137/070679776. Source:DBLP
30 Данилов А.А. Технология построения неструктурированных сеток и монотонная дискретизация уравнения диффузии. Диссертация на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук, Москва, 2010, 148 С. Dodo.inm.ras.ru/research/-media/danilov-thesis.pdf
31 Temirbekov N., Kanagatov Y., Tamabay D. Triangulation by the advanced front method with some additions, Eurazian Journal or Mathematical and computer applications, Volume 11, Issue 1 (2023), p.147-162
32 Лисейкин В.Д. Обзор методов построения структурных адаптивных сеток, Журнал вычислительной математики и математической физики, 1996, том 36, номер 1, с.3-41.
33 Лисейкин В.Д., Лиханова Ю.В., Шокин Ю.И., "Разностные сетки и координатные преобразования для численного решения сингулярно возмущенных задач" –Наука,2007. -312 с.
34 Хомпыш Х., Шакир А.Г., Кабидолданова А.А. Обратные задачи для нелинейной системы Навье–Стокса–Фойгта с памятью // Chaos, Solitons & Fractals. – 2023. – Vol. 177. – Art. 114182. – DOI: 10.1016/j.chaos.2023.114182.
35 Дженалиев М.Т., Серик А.М., Ергалиев М.Г**.** О разрешимости краевой задачи для двумерной системы уравнений Навье–Стокса в конусе // *Вестник Карагандинского университета. Серия «Математика»*. – 2024. – Т. 113, № 1. – С. 84–100. – DOI: 10.31489/2024M1/84-100.
36 Napolitano M., Orlandi P. Laminar flow in a complex geometry a comparison// Numerical Methods in fluids,-1985.-Vol.5.-p.667-683.
37 Danaev N.T. On One Possibility of Numerically Constructing Orthogonal Grids // Numerical Methods in the Mechanics of Continuous Media. - Novosibirsk, - 1983. - Vol. 14, No. 3. - P. 42-53.
38 R. Glowinski , T-W. Pan , J. Periaux, A fictitious domain method for Dirichlet problem and applications. Computer Methods in Applied Mechanics and Enginering, 1994, 111, pp.283-303.
39 R. Glowinski, T. Pan, J. Periaux, A fictitious domain mehod for Dirichlet problems and applications, Comput. Methods Appl. Mech. Engrg. 111 (1994) 283–303.

40 R. Glowinski, T. Pan, J. Periaux, A fictitious domain method for external incompressible flow modeled by Navier-Stokes equations, Comput. Methods Appl. Mech. Engrg. 112 (1994) 133–148.
41 R. Glowinski, T. Pan, J. Periaux, A Lagrange multiplier/fictitious domain method for the Dirichlet problem. Generalization to some flow problems, Japan J. Indust. Appl. Math. 12 (1995) 87–108.
42 R. Glowinski, T. Pan, A. Kearsley, J.Periaux, Numerical simulation and optimal shape for viscous flow by a fictitious domain method, Int. J. Numer. Methods Fluids 20 (1995) 695–711.
43 Chuah T.G., Gimbun J., Choong T.S.Y., Barkawi B.S. A Finite Element Study of Three-Way Catalytic Converter for NOx Abatement Under Transient Isothermal Condition // *International Journal of Engineering and Technology*. – 2004. – Vol. 1, No. 2. – P. 188–196. DOI: https://doi.org/10.1823-1039
44 Danilov A., Vassilevski Y. A monotone nonlinear finite volume method for diffusion equations on conformal polyhedral meshes. // Russ. J. Numer. Anal. Math. Modelling, 2009, Vol. 24, No. 3, pp. 217-227.
45 Laurenzi, Matteo, and Spigler, Renato. "Geometric Effects in the Design of Catalytic Converters in Car Exhaust Pipes." *Mathematics-in-Industry Case Studies*, vol. 9, no. 1, 2018, https://doi.org/10.1186/s40929-018-0018-2.
46 Settar, A., Nebbali, R., Brahim, M., & Abboudi, S. (2015). Numerical Study on the Wall-Coated Steam Methane Reformer Improvement: Effects of the Catalyst Layer Configuration. *Presented at EL-OUED, Algeria*. DOI: 10.13140/RG.2.1.2135.1762.
47 Thompson J.F.; Warsi Z.U.A.; Mastin C.W. Numerical grid generation, foundations and applications. — 1985. New York, etc.: Elsevier.
48 Liseikin V.D. A Computational Differential Geometry Approach to Grid Generation. Second edition. – Berlin: Springer, 2007.
49 Данаев Н.Т., Лисейкин В.В., Яненко Н.Н. О методе подвижных координат в газовой динамике. // Проблемы математической физики и вычислительной математики. – Москва: Наука, 1977. – С. 107-115.
50 Vabishchevich, P. N. "Implementation of Boundary Conditions for Solving the Navier-Stokes Equations in the Variables 'Stream Function and Vorticity'" // Reports of the USSR Academy of Sciences - 1983. - Vol. 273, No. 1, pp. 22-26.
51 Temirbekov A., Zhaksylykova Z., Malgazhdarov Y., Kasenov S. Application of the fictitious domain method for Navier-Stokes equations. Computers, Materials and Continua.–2022.-Vol.73,N.1.-P.2035–2055.
https://doi.org/10.32604/cmc.2022.027830 (Scopus procentile – 78, SJR=0.525, Scopus quartile – Q1, Web of Science quartile - Q2, IF=3.1)
52 Temirbekov A.N., Temirbekova L.N., Zhumagulov B.T. Fictitious domain method with the idea of conjugate optimization for non-linear Navier-Stokes equations. Applied and Computational Mathematics. –2023.-Vol. 22, Issue 2.-P.172–188. https://doi.org/10.30546/1683-6154.22.2.2023.172 (Scopus procentile – 98, SJR=1.191, Scopus quartile - Q1, Web of Science quartile – Q1, IF=10).
53 Лойцянский П. Г. Механика жидкости и газа. — М.: Наука, 1978. — 736 с.

54 Larson M. G., Bengzon F. The Finite Element Method: Theory, Implementation, and Applications. — Springer, 2013. — DOI: 10.1007/978-3-642-33287-6.
55 Xiulei Cao, Koondanibha Mitra. Error estimates for a mixed finite element discretization of a two-phase porous media flow model with dynamic capillarity, Journal of Computational and Applied Mathematics,Volume 353, June 2019, Pages 164-178, DOI: https://doi.org/10.1016/j.cam.2018.12.022
56 Nurlan Temirbekov , Kerimakyn Ainur, Mathematical and Computational Modeling of Catalytic Converter Using Navier–Stokes Equations in Curvilinear Coordinates,Mathematics 2025, 13(8),1355; https://doi.org/10.3390/math13081355
57 Бектемесов М.Ә., Гусманова Ф.Р., Тұрғанбаева А.Р. Сандық әдістер**:** оқу құралы. – Стереотиптік басылым. – Алматы: Қазақ университеті, 2020. – 252 б. ISBN 978-601-04-2281-0.
58 Данаев Н.Т., Темирбеков Н.М., Смагулов Ш.С., Жумагулов Б.Т. О некоторых численных методах решения уравнений Навье-Стокса// Тезисы докладов Школы молодых ученых. “Численные методы механики сплошной среды” .-Красноярск,1989.
59 Марчук Г. И. , Методы вычислительной математики. — Москва: Наука, 1980. — 534 с.
60 Vabishchevich, P. N. "Implementation of Boundary Conditions for Solving the Navier-Stokes Equations in the Variables 'Stream Function and Vorticity'" // Reports of the USSR Academy of Sciences - 1983. - Vol. 273, No. 1, pp. 22-26.
61 Glowinski R. Numerical Methods for Nonlinear Variational Problems. – Berlin; Heidelberg: Springer-Verlag, 1984. – XVII + 493 p. – (Springer Series in Computational Physics).
62 Temirbekov N., Khakimzyanov G., Kerimakyn A. Application of the Curvilinear Coordinate Method for the Numerical Solution of the Navier–Stokes Equations in Domains with Complex Boundaries // Computation. – 2026. – Vol. 14. – No. 3. – Article 58. – DOI: 10.3390/computation14030058, Scopus quartile – Q2
63 Roache, P. "Computational Fluid Dynamics." - Moscow: Mir, 1980. - 616 pages.