Керімақын Айнұрдың
«8D05405 Есептеу ғылымдары және статистика»
білім беру бағдарламасы бойынша
PhD философия докторы ғылыми дәрежесін алу үшін
«Геометриясы күрделі облыстардағы есептеу гидродинамикасы есептерін бейімдегіш торлар әдісімен шешу» тақырыбында
дайындалған диссертациялық жұмысының

Андатпасы

Тұтқыр сығылмайтын сұйықтықтың қозғалысын сипаттайтын Навье–Стокс теңдеулері қазіргі гидродинамиканың іргелі моделі болып табылады және күрделі инженерлік жүйелердегі ағындарды сандық модельдеуде кеңінен қолданылады. Геометриясы күрделі, коффициенттері жылдам өзгеретін Навье–Стокс теңдеулерін шешу үшін қисық сызықты координаталар әдісі қолданылды. Ұсынылған сандық шешу әдісін Роуч тесттік есебін шығару арқылы верификацияланды. Қарастырылған есепте FEM-мен табылған әлсіз шешімі мен FDM әдісі арқылы алынған жуық шешімі өзара салыстырылып, олардың жоғары дәлдікпен сәйкес келетіні көрсетілді. Цилиндрлік координаталардағы Навье–Стокс теңдеулері үшін шеттік есептің әлсіз шешімі анықталды, оның орнықтылығы мен жинақтылығы дәлелденді. u, v, p айнымалыларындағы Навье–Стокс теңдеулерінің әлсіз шешіміне арналған шеттік есепті сандық есептеу үшін FEniCS есептеу платформасында программалық код жасалды. Айнымалы радиусы бар құбыр үшін осьтік және радиалдық жылдамдық анықталды. Ток функциясын табу үшін жылдамдық иірімі "арнайы" түрде өрнектелді. ψ, ω айнымалыларындағы Навье–Стокс теңдеулерін еркін қисық сызықты координаталарда сандық шешу үшін Python 3.11 тілінде бағдарлама жасалды. Қысымның мәнін сандық есептеу үшін сатылы интегралдау әдісі ұсынылды.

Зерттеу мақсаты. Кез келген геометриясы күрделі облыстардағы тұтқыр сығылмайтын сұйық ағынын бейімделгіш торлар әдісімен сандық модельдеу, сондай-ақ ұсынылған әдістің тұрақтылығы, дәлдігі және есептеу тиімділігін теориялық және сандық тұрғыдан дәлелдеу.

Зерттеу нысаны. Күрделі геометрияда Навье–Стокс теңдеулері сандық шешімдерін талдау.Бейімделгіш қисықсызықты тор құрып, FEM әдісі арқылы шешім алу.Навье–Стокс теңдеулерін еркін ортогоналды қисықсызықты координаталарға түрлендіріп, орнықты сандық схема құру. Әртүрлі Рейнольдс сандары үшін есептеулер жүргізіп, дәлдік пен тиімділікті зерттеу. Әзірленген әдісті тесттік есептерде верификациялап, ақырлы элементтер әдісі (FEM) және ақырлы айырымдылық әдісінен (FDM) алынған сандық нәтижелерге талдау жүргізу.

Зерттеу әдістері. Жұмыста тұтқыр сығылмайтын сұйықтық үшін Навье–Стокс теңдеулеріне негізделген сандық және компьютерлік модельдеу әдістері қолданылады. Теңдеулер жүйесін шешу үшін еркін ортогоналды қисық сызықты координаттарға көшу әдісі, ақырлы айырымдар әдісі және

ақырлы элементтер әдісі пайдаланылады. Сонымен қатар есептеу аймағын дискреттеу үшін құрылымдалған және құрылымдалмаған торлар қарастырылып, шекаралық және бастапқы шарттар тиісті түрде беріледі. Есептеулердің тұрақтылығы мен жинақтылығы талданып, алынған нәтижелердің дәлдігін бағалау үшін салыстырмалы талдау жүргізіледі. Сандық есептеулер заманауи есептеуіш бағдарламалар көмегімен жүзеге асырылып, модельдеу нәтижелері графиктер мен кестелер түрінде ұсынылады.

Ғылыми жаңалығы. Қорғауға ұсынылған негізгі нәтижелер.

1.Геометриясы күрделі, коффициенттері жылдам өзгеретін Навье–Стокс теңдеулерін шешу үшін қисық сызықты координаталар әдісі жасалды.

2.Ұсынылған сандық шешу әдісін Роуч тесттік есебін шығару арқылы верификациялау.

3.Қарастырылған есептің FEM-мен табылған әлсіз шешімі мен FDM әдісі арқылы алынған жуық шешімі өзара салыстырылып, олардың жоғары дәлдікпен сәйкес келетіні көрсетілді.

4.Цилиндрлік координаталардағы Навье–Стокс теңдеулері үшін шеттік есептің әлсіз шешімі анықталды, оның орнықтылығы мен жинақтылығы дәлелденді.

5. u, v, p айнымалыларындағы Навье–Стокс теңдеулерінің әлсіз шешіміне арналған шеттік есепті сандық есептеу үшін FEniCS есептеу платформасында программалық код жасалды. Айнымалы радиусы бар құбыр үшін осьтік және радиалдық жылдамдық анықталды. Ток функциясын табу үшін жылдамдық иірімі “арнайы” түрде өрнектелді.

6. ψ, ω айнымалыларындағы Навье–Стокс теңдеулерін еркін қисық сызықты координаталарда сандық шешу үшін Python 3.11 тілінде бағдарлама жасалды және авторлық куәлік алынды. Қысымның мәнін сандық есептеу үшін сатылы интегралдау әдісі ұсынылды.

Аппробация. Диссертациялық жұмысы бойынша 7 ғылыми семинарларында баяндама жасалынды және талқылаудан өтті.

1. Темірбеков Н.М., Керімақын А. Бейімделгіш торды құру әдісі арқылы екі өлшемді кеңістікте дифференциалдық теңдеулерді шешу. // Түркі әлемі математиктерінің VII Дүниежүзілік конгресінің материалдары (TWMS-2023). – Түркістан, Қазақстан, 20–23 қыркүйек, 2023 жыл. – Түркі әлемі математикалық қоғамы, 2023.

2. Темірбеков Н.М., Керімақын Айнұр, Навье-Стокс теңдеулері арқылы еркін қисық сызықты координаттарда автомобильдердің каталитикалық түрлендіргіштерінің динамикасын зерттеу, “Ғылым, техника және білім берудегі есептеу және ақпараттық технологиялар” (CITech-2024) халықаралық конференциясында жасалған баяндама, Алматы, 23-24 қазан, 2024 жыл.

3. Темирбеков Н.М., Керімақын А., Қисық сызықты координаталардағы Навье-Стокс теңдеулерімен каталитикалық нейтрализаторды математикалық және компьютерлік моделдеу Математическое моделирование,уравнения

математической физики и геометрия, 60-летия Института математики и математического моделирования ,april_conference_2025.

4. Керімақын Айнұр, Навье–Стокс теңдеулері арқылы қисық сызықты координаттар жүйесінде каталитикалық түрлендіргішті математикалық және есептеуіштік модельдеу, ISAAC CONGRESS ASTANA 2025, Назарбаев Университетінде өткен 15-ші ISAAC халықаралық конгресі, Қазақстан, 2025 жылғы 21–25 шілде.

5. Темірбеков Н.М., Керімақын Айнұр, Навье–Стокс теңдеулері арқылы қисық сызықты координаттар жүйесінде каталитикалық түрлендіргішті математикалық және есептеуіштік модельдеу, «МАТЕМАТИКА, МЕХАНИКА ЖӘНЕ АҚПАРАТТЫҚ ТЕХНОЛОГИЯЛАР» атты X халықаралық ғылыми конференциясының ТЕЗИСТЕР ЖИНАҒЫ, Әл-Фараби атындағы Қазақ ұлттық университеті, Қазақстан Республикасы, Алматы, 2025 жылғы 24–26 қыркүйек.

6. Керімақын А., Айтуғанова Ж., Ибраһимова Д., Күрделі геометриялық облыста эквивалентті үлестіру әдісі негізінде бейімделгіш тор құруды математикалық модельдеу, – Алматы: “Информатика және қолданбалы математика”.

7. Темірбеков Н.М., Керімақын, Күрделі геометриялардағы ағынды модельдеу үшін қисық сызықты координаталар әдістерін қолдану, Қазақстан жасанды интеллект дәуірінде: агроөнеркәсіптік кешен мен инжинирингтің дамуының мәселелері мен болашағы, Алматы, 16-17 сәуір 2026 ж.

Жарияланымдар. Диссертациялық зерттеу жұмысының нәтижелері бойынша 4 жұмыс жарияланды, оның ішінде:

— Халықаралық Scopus деректер қорында 2 мақала

1. Темірбеков Н., Керімақын Айнұр, Қисық сызықты координаттардағы Навье–Стокс теңдеулерін қолдану арқылы каталитикалық түрлендіргішті математикалық және есептеуіш модельдеу, - Mathematics 2025, 13(8), 1355; https://doi.org/10.3390/math13081355

2. Темірбеков Н., Хакимзянов Г., Керімақын А. Күрделі шекаралары бар аймақтарда Навье–Стокс теңдеулерін сандық шешу үшін қисық сызықты координаттар әдісін қолдану // Computation. – 2026. – Т. 14. – № 3. – Мақала 58. – DOI: 10.3390/computation14030058

3. Темірбеков Н.М., және Керімақын, Айнұр. Күрделі геометриялы орталарда ортогональды қисық сызықты торларды құру әдістері. Қазақстан Республикасы Ұлттық инженерлік академиясының хабаршысы, 2025, 3(97), 242–250.

4. Керімақын А., Шекербаева Ш., Керімақын С., Талпақова Б. Күрделі геометриялық облыста эквивалентті тарату әдісіне негізделген адаптивті торды құру. Абай атындағы Қазақ ұлттық педагогикалық университетінің хабаршысы. Физика-математика ғылымдары сериясы, 2025, 2(90), 72–80. https://doi.org/10.51889/2959-5894.2025.90.2.006.

Диссертацияның құрылымы. Диссертациялық жұмыс нормативтік сілтемелерден, кіріспеден, негізгі үш бөлімнен (әр бөлім бөлімшелерден), қорытындыдан және пайдаланылған әдебиеттер тізімінен тұрады.

Кіріспе бөлім зерттеу өзектілігіне, зерттеудің мақсатына, зерттелінетін есептердің математикалық модельдеуіне, қорғауға ұсынылатын нәтижелерге, зерттеу нысанына, алынған нәтижелердің ғылыми жаңалығына және олардың теориялық-практикалық құндылығына, сондай-ақ апробацияларға, автордың жарияланымдарына, диссертациялық жұмыстың мазмұнына, қорытындыға шолу жасаудан тұрады.

Диссертацияның **бірінші бөлімінде** кеуекті ортадағы тұтқыр сығылмайтын сұйықтың ағысын сипаттайтын Навье–Стокс–Бринкман теңдеулері үшін цилиндрлік координаталардағы бастапқы-шеттік есептің әлсіз қойылымы қарастырылған. Есеп осьтік симметриялық жағдай үшін вариациялық түрде тұжырымдалған, ал әлсіз шешім Соболев кеңістіктерінде анықталған; энергетикалық әдіс негізінде шешімнің тұрақтылығын қамтамасыз ететін априорлық баға алынған. Сандық есептеулер FEniCS платформасында орындалды. Рейнольдс саны артқан сайын ток функциясының максимал мәні ψ_{max} өседі, бұл құбылыс инерциялық әсерлердің күшеюімен және айналым аймағының кеңеюімен байланысты.

Сонымен қатар, тордың әртүрлі мәндері үшін талдау жүргізілді. Нәтижелер тығыздығы 350 және 450 торларда алынған шешімдер арасындағы айырмашылық шамалы, бұл сандық шешімнің тор тәуелсіздігіне қол жеткізілгенін және қолданылған ақырлы элементтер әдісінің моделінің орнықтылығын растайды.

Диссертацияның **екінші бөлімінде** Навье-Стокс теңдеулері цилиндрлік координаталар жүйесінен кез-келген қисық сызықты координаталар жүйесіне түрлендіріліп, алынған теңдеулер үшін ақырлы айырымдық схема құрылды. Ортогональды қисық сызықты торлар әдісі қолданылып, осы торлар негізінде теңдеулердің сандық шешімі табылады. Теңдеулер жүйесін шешу үшін үшдеңгейлі айырымдық схема қолданылып, итерациялық әдіс ұсынылды.

Әзірленген алгоритм тордың ортогоналдылығын және шешімнің сандық тұрақтылығын қамтамасыз етеді. Re = 10–1000 аралығындағы есептеулер алынған нәтижелердің Роуч есебінің эталондық деректерімен және Napolitano M., мен Orlandi P., зерттеулерімен жақсы сәйкестігін көрсетті.

Диссертацияның **үшінші бөлімінде** каталитикалық нейтрализаторды модельдеу үшін қолданылған Навье–Стокс теңдеулер жүйесі физикалық заңдылықтарға негізделген. Цилиндрлік координаталардан кез келген қисықсызықты ортогональ координаталарға көшу қатаң математикалық өрнектер арқылы негізделді. Қисықсызықты облыс үшін ортогональ тор құруда белгілі әдістер пайдаланылды.

Теңдеулерді шешу үшін ақырлы айырымдық қолданылып, есептеу үдерісі үшдеңгейлі алгоритм негізінде жүзеге асырылды. Бұл схеманың орнықтылығы мен жинақтылығы теориялық тұрғыдан дәлелденген. Сандық шешім Jupyter ортасында Python 3.11 бағдарламалау тілін пайдалану арқылы алынды.

Енгізу дәрежесі. Диссертациялық жұмыста алынған нәтижелер Навье–Стокс теңдеулерін жуықтап шешудің сандық әдістерін жетілдірумен, олардың тұрақтылығы мен жинақтылығын арттырумен, сондай-ақ күрделі геометриялы

аймақтарда есептеу дәлдігін жоғарылатумен сипатталады. Сонымен қатар, ұсынылған тәсілдер есептеу торларын тиімді қолдануға және сандық алгоритмдердің сенімділігін арттыруға мүмкіндік береді.

Зерттеудің практикалық маңыздылығы әзірленген әдісті автомобильдік каталитикалық бейтараптандырғыштардағы және күрделі геометриясы бар өзге де инженерлік жүйелердегі сұйықтық ағындарын модельдеуде қолдану мүмкіндігімен айқындалады.

Қолдану саласы. Диссертациялық жұмыста алынған модельді жылудинамикалық және химиялық реакция әсерлерін енгізу арқылы жетілдіруге болады, бұл катализатордың жалпы тиімділігін бағалау үшін маңызды болып табылады. Диссертациядағы модельді нейтрализатордың геометриясын анықтауға,оның ішіндегі өтетін процестерді модельдеуге қолдануға болады. Бұл модельді тек автомобиль саласында ғана емес, келесі бағыттарда өнеркәсіптік газдарды тазарту, химия өндірісіндегі газ реакторлары, қоршаған ортаны қорғау жүйелері саласында да қолдануға болады.

Үміткердің мақалаға үлесі. Диссертациялық жұмыста алынған нәтижелер бойынша Scopus деректер қорына кіретін журналдардан 2 мақала, отандық журналдардан 2 мақала, жарияланды. Мақалалардағы қолданылған әдіс-тәсілдер мен терең теориялық мағлұматтарды үміткер терең түсініп, ой елегінен өткізді. Сондай-ақ, әрбір бөлімдегі алынған нәтиже тікелей үміткермен байланысты. Алайда кейбір теориялық идеяны талап ететін тұстарда үміткер отандық және шетелдік жетекшілердің кеңесіне жүгініп отырды.