6 дәріс

Карман мен Прандтльдің жылдамдықтың үлестірілуі туралы әмбебап заңдары

Дәрістің мақсаты

Қабырға маңындағы турбуленттік ағыстың аймақтарын ажырату, үйкеліс жылдамдығы мен қабырғалық өлшемсіз координаталарды қолдану және Прандтль–Карман заңдарының физикалық мағынасын түсіндіру.

Дәрістің мазмұны

1. Қабырға маңындағы турбуленттік ағыс құрылымы.
2. Үйкеліс жылдамдығы және өлшемсіз шамалар.
3. Тұтқыр қабатшадағы сызықтық заң.
4. Логарифмдік жылдамдық заңы.
5. Тәжірибелік тексеру және инженерлік қолдану.

1. Кіріспе

Сұйықтар мен газдардың турбуленттік қозғалысын зерттеу кезінде жылдамдықтың қабырға маңында қалай өзгеретіні — гидроаэродинамиканың маңызды мәселелерінің бірі.
Бұл аймақ **шекаралық қабат (шекаралық ағын)** деп аталады, онда тұтқырлықтың және турбуленттік араласудың әсері бірге байқалады.

XX ғасырдың басында неміс ғалымдары **Т. фон Карман** мен **Л. Прандтль** турбуленттік қабаттағы жылдамдықтың таралуын сипаттайтын **әмбебап заңдарды (универсал заңдарды)** ұсынды. Бұл заңдар бүгінгі күнге дейін инженерлік және ғылыми есептерде кеңінен қолданылады — әсіресе құбырлардағы, аэродинамикалық жазық беттердегі және қанат профилдеріндегі ағынды есептеу кезінде.

2. Турбуленттік шекаралық қабат құрылымы

Прандтль мен Карманның зерттеулеріне сәйкес, қабырға жанындағы турбуленттік ағын үш негізгі аймақтан тұрады:

1. **Тұтқыр ішкі қабат (viscous sublayer)**
   - Бұл аймақта жылдамдықтың өзгерісі Ньютон заңы бойынша жүреді;
   - Турбуленттік әсер шамалы, ал тұтқырлық басым.
2. **Бұлыңғыр өтпелі қабат (buffer layer)**
   - Мұнда тұтқырлық пен турбуленттік әсер бірдей деңгейде болады;
   - Бұл аймақ турбуленттіліктің басталу шекарасы.
3. **Логарифмдік (немесе толық турбуленттік) қабат**
   - Турбуленттік алмасу негізгі рөл атқарады;
   - Жылдамдықтың таралуы логарифмдік заң бойынша өзгереді.

3. Прандтльдің тұтқырлық гипотезасы

Прандтль турбуленттік алмасуды **турбуленттік тұтқырлық** ұғымы арқылы сипаттады. Ол ламинарлық тұтқырлық сияқты жұмыс істейді, бірақ оның мәні ағын жылдамдығына және қабырғаға дейінгі қашықтыққа тәуелді:

$$\tau = \rho \nu_t \frac{du}{dy}$$

мұндағы:

- τ – жанама (срез) кернеу,
- ρ – тығыздық,
- ν_t – турбуленттік тұтқырлық коэффициенті,
- dy/du – жылдамдық градиенті.

Прандтль болжамы бойынша, турбуленттік тұтқырлық қабырғаға дейінгі қашықтық ууу және жылдамдықтың лүпілдік масштабы u′u′u′ арқылы өрнектеледі:

$$\nu_t = l^2 \left| \frac{du}{dy} \right|$$

мұндағы l — **араласу масштабы (mixing length)**.

4. Карман мен Прандтльдің әмбебап логарифмдік заңы

Прандтльдің идеяларын негізге ала отырып, Т. фон Карман турбуленттік қабаттағы жылдамдықтың үлестірілуін әмбебап түрге келтірді.

4.1 Логарифмдік заң

Қабырғадан қашықтықты өлшемсіз координата түрінде жазайық:

$$y^+ = \frac{u_* y}{\nu}, \quad \text{мұнда } u_* = \sqrt{\frac{\tau_w}{\rho}}$$

мұндағы u_* – **үйкеліс жылдамдығы**, τ_w – қабырғадағы жанама кернеу.

Жылдамдықтың өлшемсіз шамасы:

$$u^+ = \frac{u}{u_*}$$

Сонда Карман мен Прандтль ұсынған **жылдамдықтың логарифмдік таралу заңы** былай жазылады:

$$u^+ = \frac{1}{\kappa} \ln(y^+) + B$$

мұндағы:

- κ=0.41 – Карман тұрақтысы,
- $B \approx 5.0$ – тәжірибелік тұрақты.

Бұл теңдеу қабырғаға жақын турбуленттік аймақ үшін әмбебап сипатқа ие.

5. Тұтқыр ішкі қабаттағы заң (сызықтық аймақ)

Қабырғаға өте жақын аймақта (яғни, $y^+<5$) турбуленттік әсер аз, сондықтан жылдамдықтың таралуы Ньютон заңына сәйкес сызықты түрде өзгереді:

$$u^+=y^+$$

Бұл аймақ **ламинарлық ішкі қабат** деп аталады. Мұнда ағын тұтқырлықтың әсерімен ғана реттеледі.

6. Аралас және толық турбуленттік аймақ

$30<y^+<300$ аралығында логарифмдік заң жақсы орындалады.

Ал $y^+>300$ болғанда, ағын толық турбуленттік сипат алады және жылдамдықтың өзгерісі баяу өседі.

Осылайша, Прандтль мен Карман заңдары турбуленттік қабаттың **құрылымын үш аймаққа бөліп,** әрқайсысын өз заңымен сипаттайды.

Аймақ түрі	Негізгі заң	Шамамен диапазон y^+
Тұтқыр ішкі қабат	$u^+ = y^+$	0–5
Өтпелі қабат	аралас сипат	5–30
Логарифмдік аймақ	$u^+ = \frac{1}{\kappa}\ln(y^+) + B$	30–300

7. Әмбебап заңдардың инженерлік қолданысы

Карман мен Прандтльдің логарифмдік заңы тәжірибелік ағындардың барлығында дерлік қолдануға жарамды.

Ол келесі есептерде қолданылады:

1. **Құбыр ішіндегі ағын**
   - Турбуленттік режимде жылдамдықтың таралуын анықтау;
   - Гидравликалық кедергіні есептеу.
2. **Аэродинамикалық профильдердің бетіндегі ағын**
   - Қанат бетінде үйкеліс кедергісін есептеу;
   - Шекаралық қабаттың қалыңдығын табу.
3. **Турбуленттік жылу алмасу**
   - Жылу беру коэффициентін анықтау кезінде турбуленттік профильді ескеру.

8. Тәжірибелік тексерулер

Карман мен Прандтль заңы көптеген тәжірибелермен расталған. Аэродинамикалық құбырларда және гидравликалық каналдарда жүргізілген өлшеулер (мысалы, Никурдзе, Лаури және Левенсон жұмыстары) көрсеткендей, логарифмдік тәуелділік жоғары дәлдікпен орындалады.

Тәжірибелерде анықталған типтік мәндер:

- $\kappa=0.41\pm0.02$
- $B=5.0\pm0.5$

Бұл заңдар турбуленттік ағынды сипаттайтын әмбебап эмпирикалық негіз ретінде қабылданған.

9. Карман тұрақтысы және энергия балансы

Т. фон Карман ағынның энергия балансы мен импульс теңдеуін талдау арқылы өзінің тұрақтысын (к) анықтаған.

Ол турбуленттік қозғалыстың инвариантты сипаттамасы ретінде қарастырылады және турбуленттік энергияның таралуымен байланысты.

10. Қорытынды

Карман мен Прандтльдің әмбебап заңдары турбуленттік шекаралық қабаттың құрылымын сипаттайтын негізгі теориялық негіз болып табылады.

Олар көрсетеді:

- қабырға маңындағы ағынның жылдамдық профилі әмбебап сипатта болады;
- тұтқырлық, турбуленттік алмасу және геометриялық факторлар өзара байланысты;

логарифмдік заң көптеген инженерлік есептерде (құбыр ағыны, қанат профилі, жел арнасы) тиімді қолданылады.

Өзін өзі тексеруге арналған сұрақтар

1. Тұтқыр қабатша, буферлік және логарифмдік аймақтар қалай ажыратылады?
2. Үйкеліс жылдамдығы қандай өрнекпен анықталады?
3. u^+ және y^+ шамаларының физикалық мағынасы қандай?
4. Тұтқыр қабатшада $u^+ = y^+$ заңы неліктен орындалады?
5. Логарифмдік заңдағы Карман тұрақтысы мен қосылғыш тұрақтының рөлі қандай?
6. Сызықтық және логарифмдік заңдарды бүкіл қимаға қолдануға бола ма?
7. Әмбебап профиль қабырғалық үйкелісті бағалауға қалай көмектеседі?
8. Қысым градиенті мен кедір-бұдырлық жылдамдық профилін қалай өзгертеді?