ҚУАНЫШ СӘУЛЕ ҚАЛДАРБЕККЫЗЫ

Параболалық тектес интегралдық-дифференциалдық теңдеулер үшін бейлокал есептерді шешудің сандық-аналитикалық әдістері

«8D05401 – Математика» білім беру бағдарламасы бойынша философия докторы (PhD) дәрежесін алуға ұсынылған диссертацияның

АҢДАТПАСЫ

Параболалық тектес дербес туындылы теңдеулер ғылым мен техниканың көптеген салаларында маңызды рөл атқарады. Параболалық теңдеулер үшін қойылатын шеттік есептер инженерлік жылулық талдау, жер асты суларының қозғалысы, климаттық модельдеу, биологиялық процестер, химиялық реакциялар, экологиялық инженерия, материалтану және қаржы инженериясы сияқты қолданбалы есептерде кеңінен кездеседі.

Зерттеудің өзектілігі. Қазіргі уақытта математикалық физика, жылуөткізгіштік теориясы, диффузия процестері, гидродинамика, биология және басқару теориясында жады қасиеті бар процестерді зерттеу ерекше маңызға ие. Мұндай процестерді сипаттауда параболалық тектес интегралдық-дифференциалдық және жүктемелері бар теңдеулер кеңінен қолданылады. Бұл теңдеулерде жүйенің ағымдағы күйі тек уақыттың берілген мезетіндегі шамаларға ғана емес, сонымен қатар оның алдыңғы және кейінгі уақыттағы күйлеріне де тәуелді болады. Осыған байланысты жүктелген және интегралдық-дифференциалдық теңдеулер теориясы қарқынды дамып келеді.

Жүктелген параболалық теңдеулер теориясының дамуына А.Д. Искендеров, А.М. Нахушев, М.Т. Дженалиев, Х.Ж. Дикинов, А.А. Керефов, А.П. Белогуров, С.Х. Геккиева, М.А. Керефов, Р.И. Паровик, В.М. Борок, Я.И. Житомирский, Liu Junyi, Xu Mingyu, М.Х. Шхануков және басқа зерттеушілер үлес қосты. Нахушев пен Борисов өз жұмыстарында бастапқы Буссинеск теңдеуін сызықтандыру нәтижесінде алынатын жүктелген параболалық теңдеулерді зерттеді. Ал А.Д. Искендеров кейбір кері есептердің жүктелген параболалық теңдеулерге келтірілетінін көрсетті. Сонымен қатар, Н.Н. Кочина суару процестеріндегі жер асты сулары деңгейін реттеу есептерінің жүктелген параболалық теңдеулерге келтірілетінін дәлелдеді.

Математикалық талдау курсынан белгілі анықталған интегралды жуықтап есептеу үшін квадратуралық формулалар қолданылады: $\int_a^b f(x)dx \approx \sum_{k=0}^{N} c_k f(x_k)$, мұнда x_k - квадратура түйіндері, ал c_k - квадратура коэффициенттері. Жуықтау теориясындағы осы тәсілдер интегралдық-дифференциалдық теңдеулерді жүктелген теңдеулерге келтіруде жиі қолданылады. Атап айтсақ, А.М.Нахушев еңбектерінде $\frac{\partial u(t,x)}{\partial t} = \Delta_x u(t,x) + \int_0^T k(t,s)u(s,x)ds$ түріндегі параболалық тектес

интегралдық-дифференциалдық теңдеулер қарастырылады, мұнда Δ_x-Лаплас операторы, $k(t,s)$- өзек, ал интегралдық бөлік жүйенің уақыттық-кеңістік байланысын сипаттайды. $0 \le s \le T$ аралығында $0 \le t_0 < t_1 < \ldots < t_m < t_{m+1} = T$ нүктелері берілсін. Егер өзек белгілі аралықтарда тұрақты мән қабылдаса, яғни $k(t,s) = a_i(t)$, $t_i \le s \le t_{i+1}$, $i = 0,1,\ldots,m$, онда интегралдық бөлік $\int_0^T k(t,s)u(s,x)ds = \sum_{i=0}^{m} a_i(t) \int_{t_i}^{t_{i+1}} u(s,x)ds$ түрінде өрнектеледі. Демек, квадратуралық формула $\int_0^T k(t,s)u(s,x)ds \approx \sum_{j=0}^{m} b_j(t)u(t_j,x)$, $b_j(t)$-квадратуралық коэффициенттер, қолдану нәтижесінде бастапқы интегралдық-дифференциалдық теңдеуді жүктелген параболалық теңдеуге келтіріледі. Яғни осы түрлендіру көмегімен параболалық интегралдық-дифференциалдық теңдеулер модельдерін жүктелген параболалық теңдеулерге келтіру жолы негізделеді. Осылайша, жүктелген параболалық теңдеулерді параболалық тектес Фредгольм интегралдық-дифференциалдық теңдеулердің дербес немесе жуықталған моделі ретінде қарастыруға болады.

Зерттеу мақсаты. Диссертациялық жұмыстың мақсаты - жүктелген параболалық теңдеулер үшін бейлокал есептерді және параболалық тектес интегралдық-дифференциалдық теңдеулер үшін бейлокал есептердің бірмәнді шешілімділігін орнату және аналитикалық-сандық шешімдерін құру.

Зерттеу нысаны. Жүктелген параболалық теңдеулер мен параболалық тектес Фредгольм интегралдық-дифференциалдық теңдеулері үшін бейлокал есептерді шешудің сандық-аналитикалық әдістері.

Зерттеу әдістері. Диссертациялық жұмыста дифференциалдық және интегралдық-дифференциалдық теориясының әдістері, дербес туындылы дифференциалдық теңдеулер үшін бейлокал есептер теориясы, сынықтар әдісі, Джумабаев параметрлеу әдісі және сандық әдістер қолданылды.

Теориялық және практикалық құндылығы. Диссертациялық жұмыста жүктелген параболалық теңдеулер мен Фредгольм типті параболалық тектес интегралдық-дифференциалдық теңдеулер үшін қойылған бейлокал шеттік есептердің шешімділігі зерттелді. Алынған нәтижелер жүктелген және интегралдық-дифференциалдық теңдеулер теориясын дамытуға үлес қосады. Жұмыста қолданылған әдістер бейлокал есептер теориясында, интегралдық-дифференциалдық теңдеулерді зерттеуде және жүктелген теңдеулер теориясында қолданылуы мүмкін.

Ғылыми жаңалығы. Қорғауға ұсынылған негізгі нәтижелер. Жұмыстың ғылыми жаңалығы төмендегідей нәтижелермен сипатталады:

- Жүктелген параболалық теңдеулер және параболалық тектес Фредгольм интегралдық-дифференциалдық теңдеулер үшін бейлокал есептерді шешуге арналған сынықтар әдісі негізделіп, дискреттелген есептер алынды.

- Дискреттелген есептерді зерттеуде жүктелген дифференциалдық теңдеулер жүйесіне және Фредгольм интегралдық-дифференциалдық теңдеулер жүйесі үшін Джумабаев параметрлеу әдісі қолданылып, шеттік есептердің шешімдерін табу алгоритмдері құрылды.
- Зерттелген есептердің бірмәнді шешілімділік шарттары анықталып, сандық-аналитикалық шешімдері жүзеге асырылуы көрсетілді.
- Жүктелген параболалық теңдеулер және параболалық тектес Фредгольм интегралдық-дифференциалдық теңдеулер үшін бейлокал шеттік есептерге қолданылған сынықтар әдісінің жинақтылығы, орнықтылығы мен дәлдігі шарттары көрсетілді.
- Ұсынылған әдістер мен нәтижелер бейлокал шеттік есептер теориясын дамытуға, сондай-ақ математикалық физика мен қолданбалы математика салаларындағы күрделі процестерді модельдеуде қолдануға мүмкіндік береді.

Аппробация. Зерттеу жұмысындағы алынған нәтижелер индекстелген халықаралық журналдардағы жарияланымдар мен конференция материалдары арқылы расталады. Диссертация нәтижелері бойынша 16 жұмыс жарияланды.

-Web of Science және Scopus деректер қорына енетін басылымдардағы жарияланымдар:

1. **Kuanysh S.K.,** Assanova A.T., Kadirbayeva Zh.M. "Method of lines for a loaded parabolic equation" Journal of Mathematics, Mechanics, Computer Science, 1(125), 2025, pp. 3–17. Scopus: 37%, Web of Science: Q3.

2. Assanova A.T., Kadirbayeva Zh.M., **Kuanysh S.K.** "Numerical-analytical method for solving initial-boundary value problem for loaded parabolic equation" Bulletin of the Karaganda University. Mathematics Series, 1(117), 2025, pp. 34–45. Scopus: 53%, Web of Science: Q2.

3. Assanova A.T., Liu Zh., **Kuanysh S.K.,** Kadirbayeva Zh.M. "Convergence, stability, and error analysis of the method of lines for solving loaded parabolic equation" AIMS Mathematics, 10(12), 2025, pp. 29454-29469. Scopus: 86%, Web of Science: Q1.

4. **S.K. Kuanysh,** Zh. M. Kadirbayeva, Analysis of Nonlocal Problem for Loaded Parabolic Equation via Numerical Method, Lobachevskii Journal of Mathematics. 46 (10) (2025) 5417--5427. Scopus: 56%, Web of Science: Q2.

5. S. M. Temesheva, Zh. M. Kadirbayeva, **S. K. Kuanysh**, Analysis of Semi-periodic Problem for Integro-differential Equations of Parabolic Type, Lobachevskii Journal of Mathematics. 46 (12) (2025) 6441-6454. Scopus: 56%, Web of Science: Q2.

6. Н.Б. Искакова, Ж.М. Кадирбаева, Э.А. Бакирова, **С.Қ. Қуаныш** «Параболалық теңдеу үшін шеттік есепті шешудің сандық әдісі», Қазақстан-Британ техникалық университетінің хабаршысы, 21-том, №3 (2024). 165-175.

- Халықаралық ғылыми конференция еңбектеріндегі жарияланымдар:

1. **Қуаныш С.Қ.** Параболалық теңдеу үшін қойылған бейлокал шеттік есепті шешудің бір әдісі туралы // «Фараби әлемі» атты студенттер мен жас

ғалымдардың халықаралық ғылыми конференциясы. – Алматы: әл-Фараби атындағы ҚазҰУ, 4–6 сәуір 2024 ж.- 26 бет.

2. **Kuanysh S.** Algorithm for Solving the Two-Point Boundary Value Problem for Loaded Parabolic Equations // Proceedings of the CITech–2024 Conference "Computational and Information Technologies in Science, Engineering and Education". – Almaty, Kazakhstan, October 23–24, 2024. – P. 93.

3. **Kuanysh S.** Solution of Nonlocal Problem for Loaded Parabolic Equations // Traditional International April Mathematical Conference in Honor of the Kazakhstan Day of Science Workers. – Almaty, Kazakhstan, April 1–4, 2025. – P. 158.

4. **Қуаныш С.Қ.** Жүктелген параболалық теңдеулер үшін екі нүктелі шеттік есеп // «Фараби әлемі» студенттер мен жас ғалымдардың халықаралық ғылыми конференциясы. – Алматы: әл-Фараби атындағы ҚазҰУ, 3–5 сәуір 2025 ж. - 4 бет.

5. **Қуаныш С.** Параболалық тектес интегралдық-дифференциалдық теңдеулер үшін периодтық есепті сандық шешу // «Білім мен ғылымдағы қолданбалы мәселелерді шешудегі цифрлық технологиялар мен пәнаралық тәсілдер» халықаралық ғылыми-практикалық конференциясы. – Атырау, Қазақстан, 3 қазан 2025 ж. – 342 бет.

6. **S.K. Kuanysh**, E.A. Bakirova. A Stable and Convergent Method of Lines for Fredholm-Type Parabolic Integro-Differential Equations // The First Congress of Kazakhstan Mathematicians. – Shymkent, Kazakhstan, April 3–7, 2025. – P. 238.

7. **S. K. Kuanysh,** N.B. Iskakova, P.B. Abdimanapova. Convergence, stability, and error analysis of the method of lines for solving loaded parabolic equations // The First Congress of Kazakhstan Mathematicians. – Shymkent, Kazakhstan, April 3–7, 2026. P.239.

8. **Қуаныш С.Қ,** Қуаныш Ж.Қ. Уақыт бойынша бейлокал шарттары бар параболалық интегро-дифференциалдық теңдеулердің классикалық шешімі // «Фараби әлемі» студенттер мен жас ғалымдардың халықаралық ғылыми конференциясы. – Алматы: әл-Фараби атындағы ҚазҰУ, 7–8 сәуір 2026 ж.

9. **Kuanysh S.** Numerical analysis of parabolic Volterra integro-differential equations // «Fundamental and Applied Issues in Mathematics, Mechanics, and Computer Science» International Scientific Conference. -Karaganda, Buketov Karaganda National Research University, June 3-4, 2026. - P.61.

10. **S.K. Kuanysh.** Classical Solutions of Parabolic Integro-Differential Equations with Nonlocal-in-Time Boundary Conditions// «Integral Operators in Function Spaces and Harmonic Analysis» International Scientific Conference. -Astana, L.N.Gumilyov Eurasian National University, June 11-14, 2026. - P.148.

Сонымен қоса, диссертациялық зерттеудің негізгі нәтижелері 14th AIMS International Conference on Dynamical Systems, Differential Equations and Applications (Абу-Даби, БАӘ, 16–20 желтоқсан 2024 ж.), «Математика, механика және ақпараттық технологиялар» X халықаралық ғылыми конференциясында (Алматы, Қазақстан, 24–26 қыркүйек 2025 ж.) және International CMMSE Conference and the Fourth Conference on High Performance Computing (CHPC) халықаралық конференциясында (Кадис, Испания, 2–9 шілде 2026 ж.) баяндалды. Конференция материалдары баспаға жарияланбады.

Диссертацияның құрылымы. Диссертациялық жұмыс кіріспеден, екі бөлімнен, қорытынды және пайдаланылған әдебиеттер тізімінен тұрады. **Бірінші бөлімде** жүктелген параболалық теңдеулер үшін бейлокал шеттік есептер қарастырылды. **Жұмыстың 1.1** ішкі бөлімде жүктелген параболалық теңдеулер үшін бейлокал шеттік есептің қойылымы беріліп, сыныктар әдісін қолдану арқылы сәйкес дискретті есеп алынды. **Жұмыстың 1.2** ішкі бөлімінде дискреттеу нәтижесінде алынған жүктелген дифференциалдық теңдеулер жүйесін шешу үшін Джумабаев параметрлеу әдісінің классикалық нұсқасы қолданылып, бірмәнді шешілімділік шарттары орнатылды және жуық шешімді табу алгоритмі ұсынылды. **Жұмыстың 1.3** шеттік есептерге қолданылған сыныктар әдісінің жинақтылығы, орныктылығы және дәлдігі көрсетілді. **Жұмыстың 1.4** ішкі бөлімінде жүктелген параболалық теңдеулердің сандық есептеу нәтижелері мен мысалдар келтірілді. **Жұмыстың 1.5** ішкі бөлімінде жүктелген параболалық теңдеулер үшін бастапқы-шеттік есептің қойылымы беріліп, оны шешу әдістері талданды. **Жұмыстың 1.6** ішкі бөлімде жүктелген параболалық теңдеулер үшін қойылған бастапқы-шеттік есептің бірмәнді шешілімділігі туралы теорема дәлелденді. **Жұмыстың 1.7** ішкі бөлімде дискреттелген есепті шешудің Джумабаев параметрлеу әдісі қарастырылып, бірмәнді шешілімділік шарттары анықталды. **Жұмыстың 1.8** ішкі бөлімінде жүктелген параболалық теңдеулер үшін бастапқы-шеттік есепті сандық шешу алгоритмі ұсынылып, сандық мысалдар келтірілді. **Екінші бөлімде** параболалық тектес Фредгольм интегралдық-дифференциалдық теңдеулер үшін бейлокал шеттік есептер қарастырылды. **Жұмыстың 2.1** ішкі бөлімінде параболалық тектес Фредгольм интегралдық-дифференциалдық теңдеулер үшін бейлокал шеттік есептің қойылымы ұсынылды. Есепке сыныктар әдісін қолдану нәтижесінде Фредгольм интегралдық-дифференциалдық теңдеулер жүйесі үшін дискреттелген бейлокал шеттік есеп алынды. **Жұмыстың 2.2** ішкі бөлімінде интегралдық-дифференциалдық теңдеулер үшін алынған дискреттелген бейлокал есепті шешуде Джумабаев параметрлеу әдісі қолданылып, есептің шешу алгоритмі талданды. **Жұмыстың 2.3** ішкі бөлімінде параболалық тектес Фредгольм интегралдық-дифференциалдық теңдеулер үшін бейлокал шеттік есепке қолданылған сыныктар әдісінің жинақтылығы, орныктылығы және дәлдігі көрсетілді. **Жұмыстың 2.4** ішкі бөлімде параболалық тектес Фредгольм интегралдық-дифференциалдық теңдеулер үшін бейлокал есептің шешімін табудың Джумабаев параметрлеу әдісінің алгоритміне негізделген сандық мысалдар келтіріліп, есептеу нәтижелерінің дәлдігі мен қателік шамалары көрсетілді. **Қорытынды бөлімде** диссертациялық жұмыс барысында қол жеткізілген негізгі ғылыми нәтижелер мен алынған тұжырымдар қорытындыланды.