МЕНШІКСІЗ ИНТЕГРАЛДАР

Анықталған интегралдың Риман берген анықтамасында функцияға екі қажетті шарт қойылады:

1. функция *кесіндіде* анықталған

және

2. функция кесіндіде *шектелген.*

Мысалы, $\int_0^1 e^{-x^2}dx$, $\int_1^{\pi}\frac{\sin x}{x}dx$, $\int_a^b \cos(x^2)dx$ интегралдар үшін осы екі шарт орындалады. Алайда, бұл интегралдарды тек жуықтап есептейді. Енді осы екі шартты әлсіретейік, яғни, екеуінің біреуі орындалмасын:

1. функцияның анықталу жиыны *кесінді емес*

немесе

2. функция анықталу жиынында *шектелмеген.*

1. 1-текті меншіксіз интеграл.

Функцияның анықталу жиыны кесінді емес болсын. Ендеше анықталу жиыны (a,b), $[a,b)$, $(a,b]$, $(a,+\infty)$, $(-\infty,a)$, $(-\infty,+\infty)$ аралықтары немесе осы аралықтардың кейбірінің бірігуі болуы мүмкін. $f(x)=x:[1;2]\to\Re$ функциясын қарастырайық. Бұл функция 1. $[1;2]$ кесіндіде анықталған,

2. $[1;2]$ кесіндіде шектелген.

Біз $[1;2]$ кесіндіде $\int_1^2 xdx=\left.\frac{x^2}{2}\right|_1^2=\frac{3}{2}$ есептелуін білеміз.

Енді $(1;2]$ аралығын қарастырайық.
Егер $\delta>1$ үшін

$$\lim_{\delta\to 1-0}\int_{\delta}^{2}xdx=\lim_{\delta\to 1-0}\left.\frac{x^2}{2}\right|_{\delta}^{2}=\lim_{\delta\to 1-0}\left(2-\frac{\delta^2}{2}\right)=\frac{3}{2}$$

деп анықтасақ та, сол жауапқа келеміз. Яғни, $\int_1^2 xdx=\lim_{\delta\to 1-0}\int_{\delta}^{2}xdx$.

Осы сияқты, $[a,b)$ аралығында анықталған $f(x)$ шектелген функциясының анықталған интегралын

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\delta \to b+0} \int_a^{\delta} f(x)dx$$

деп анықтауға болады. Ал, (a,b) аралығында анықталған $f(x)$ шектелген функциясының анықталған интегралын

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\substack{\delta \to b+0 \\ \varepsilon \to a-0}} \int_{\varepsilon}^{\delta} f(x)dx$$

деп анықтауға болады. Мұнда $\varepsilon, \quad \delta$ бір-бірінен тәуелсіз a-ға және b-ға ұмтылады.

Енді функция ақырсыз аралықтардың бірінде анықталсын. $-\infty < x < +\infty$ түзуінде үш түрлі ақырсыз байланысты облыс бар:

1. $a \leq x < +\infty$ жарты түзуі
2. $-\infty < x \leq в$ жарты түзуі
3. $-\infty < x < +\infty$ ақырсыз түзуі

Анықтық үшін $a \leq x < +\infty$ жарты түзуін қарастырайық. Айталық, $f(x)$ функциясы $a \leq x < +\infty$ аралығында анықталсын және функция осы аралықта шектелген болсын. $A \geq a$ шартын қанағаттандыратын $\forall A$ саны үшін $\int_a^A f(x)dx$ Риманның анықталған интегралы бар болады. Анықталған интегралды $[a,b)$ аралығында анықтаған сияқты, $[a,+\infty)$ аралығында

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx = \lim_{A \to +\infty} \int_a^A f(x)dx \tag{1}$$

деп анықтасақ, төмендегі анықтамаға келеміз:

Анықтама. Егер

$$\lim_{A \to +\infty} \int_a^A f(x)dx$$

шегі табылса, онда сол шекті $f(x)$ функциясының $[a;+\infty)$ жарты түзуіндегі *1-текті меншіксіз интегралы* деп атайды және $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ деп белгілейді.

Егер (1) шегі бар болса, онда $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$ *меншіксіз интегралын жинақталады* деп айтады. Басқа жағдайларда, яғни, шек табылмаса немесе шектің мәні ∞ болса $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$ *меншіксіз интегралын жинақталмайды* деп айтады.

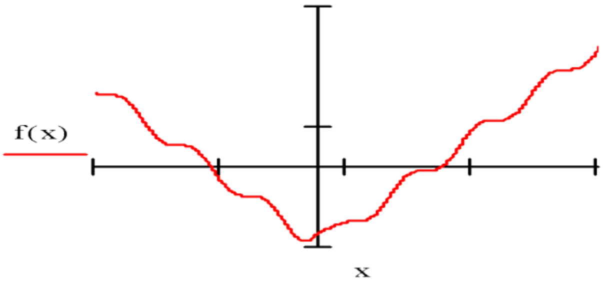
Осыған ұқсас $-\infty < x \leq \text{в}$ жарты түзуінде меншіксіз интегралды $\lim\limits_{A \to -\infty} \int\limits_A^b f(x)dx$ шегі ретінде қарастырамыз да, $\int\limits_{-\infty}^{b} f(x)dx$ деп белгілейміз. Ал, $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$ интегралын

$$\lim_{\substack{A' \to -\infty \\ A'' \to +\infty}} \int\limits_{A'}^{A''} f(x)dx$$

шегі ретінде қарастырамыз. Мұнда A', A'' бір-бірінен тәуелсіз $-\infty$-ке және $+\infty$-ке ұмтылады. Егер $\forall a \in \Re$ үшін $\int\limits_{-\infty}^{a} f(x)dx$, $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$ меншіксіз интегралдары жинақты болса, онда $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$ интегралы да жинақты болады және

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int\limits_{-\infty}^{a} f(x)dx + \int\limits_{a}^{+\infty} f(x)dx$$

теңдігі орындалады. Меншіксіз интегралдың геометриялық мағынасы: $y = f(x)$ функциясы және Ox өсімен шектелген фигураның ауданы.



2. 1-текті меншіксіз интегралдың қасиеттері

1. (Ньютон-Лейбниц формуласы)

1) $\forall\beta\in[a,+\infty)$ үшін $f(x)$ функциясы $[a,\beta]$ аралығында Риман бойынша интегралдансын;

2) $f(x)$ функциясының $[a,+\infty)$ аралығында алғашқы функциясы $F(x)$ бар болсын. Онда

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx = F(x)\Big|_a^{+\infty} = F(\infty)-F(a),$$ мұнда $$F(\infty)=\lim_{A\to+\infty}\int_a^A f(x)dx.$$

2. $\int_a^{+\infty} f(x)dx$, $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ меншіксіз интегралдары жинақталса, онда кез келген λ,μ сандары үшін $\int_a^{+\infty}(\lambda\cdot f(x)+\mu\cdot g(x))dx$ интегралы да жинақталады және

$$\int_a^{+\infty}(\lambda f(x)+\mu g(x))dx=\lambda\int_a^{+\infty} f(x)dx+\mu\int_a^{+\infty} g(x)dx$$

орындалады. (мұндағы кез-келген екі интегралдың жинақтылығынан үшінші интегралдың жинақтылығы шығады**)**

3. $\int_a^{+\infty} f(x)dx$, $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ меншіксіз интегралдары жинақталса, барлық $x\in[a,+\infty)$ үшін $f(x)\le g(x)$ теңсіздігі орындалса, онда

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx\le\int_a^{+\infty} g(x)dx.$$

4. $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ интегралы жинақталса, онда $\forall c\in[a,+\infty)$ үшін

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx=\int_a^{c} f(x)dx+\int_c^{+\infty} f(x)dx$$

теңдігі орындалады.

5. Айталық, $u(x),\quad v(x)$ функциялары $[a,+\infty)$ аралығында үзіліссіз дифференциалдансын және $\lim_{x\to+\infty} u(x)\cdot v(x)$ шегі бар, әрі ақырлы болсын. Онда

$\int_a^{+\infty} u'(x)\cdot v(x)dx$ және $\int_a^{+\infty} v'(x)\cdot u(x)dx$ интегралдарының жинақтылығы мен жинақсыздығы бірдей болады. Егер олар жинақталса, онда

$$\int_a^{+\infty} u(x)dv(x) = u(x)\cdot v(x)\Big|_a^{+\infty} - \int_a^{+\infty} v(x)du(x)$$

теңдігі орындалады.

6. Меншіксіз интегралда айнымалыны алмастыру.

$[t_0,T)$ аралығында анықталған $x=\varphi(t)$ функциясының мәндерінің жиыны $[a,+\infty)$ болсын. $x=\varphi(t)$ функциясы $[t_0,T)$ аралығында қатаң өспелі, $a=\varphi(t_0)\le\varphi(t)<\lim\limits_{t\to T-0}\varphi(t)=\infty$, $t_0\le t<T\le+\infty$. Сонымен қатар, $x=\varphi(t)$ функциясы $[t_0,T)$ аралығында үзіліссіз дифференциалданса, $f(x)$ функциясы $[a,+\infty)$ аралығында үзіліссіз болса, онда $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ интегралы және $\int_{t_0}^{T} f(\varphi(t))\cdot\varphi'(t)dt$ интегралының жинақтылығы мен жинақсыздығы бірдей болады және

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx = \int_{t_0}^{T} f(\varphi(t))\cdot\varphi'(t)dt$$.

(дәлелдеулерін [4], параграф 33, п.2 қараңыз **)**

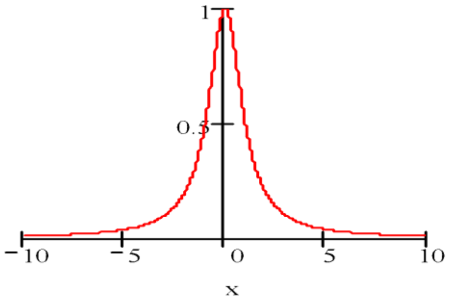
Мысал 1. $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{1+x^2}dx$ интегралын есептеңіз.

Шешуі. Бұл 1-текті меншіксіз интеграл болады. Мұнда аралық ақырсыз, интеграл астындағы функция $f(x)=\frac{1}{1+x^2}$ шектелген, $0 \le \frac{1}{1+x^2}\le 1$
.
Ол $\forall[A';A'']$ сегментінде интегралданады. Сондықтан,

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{1+x^2}dx=\int_{-\infty}^{0}\frac{1}{1+x^2}dx+\int_{0}^{+\infty}\frac{1}{1+x^2}dx=\lim_{A'\to-\infty}\int_{A'}^{0}\frac{1}{1+x^2}dx+\lim_{A''\to+\infty}\int_{0}^{A''}\frac{1}{1+x^2}dx=$$

$$=\lim_{A'\to-\infty}arctgx\Big|_{A'}^{0}+\lim_{A''\to+\infty}arctgx\Big|_{0}^{A''}=\lim_{A'\to-\infty}(arctg0-arctgA')+\lim_{A''\to+\infty}(arctgA''-arctg0)=\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}=\pi$$

Геометриялық мағынасы: $f(x)=\dfrac{1}{1+x^2}$ функциясының графигі және Ox өсімен шектелген фигураның ауданын, екінші жағынан, $\pi\cdot 1^2=S_{донг.}$ радиусы 1-ге тең дөңгелектің ауданы деп қарауға болады. Төменде $f(x)=\dfrac{1}{1+x^2}$ функциясының графигі:



Мысал 2. $\displaystyle\int_{a}^{+\infty}\frac{dx}{x^{\lambda}}$ меншіксіз интегралын жинақтылыққа зерттеңіз. Мұнда $a > 0,\quad \lambda$ - кез келген нақты сан.

Шешуі. Бұл 1-текті меншіксіз интеграл. $f(x)=\dfrac{1}{x^{\lambda}}$ функциясы $\forall 0 < A$ үшін $[a;A]$ сегментінде интегралданады. Төмендегідей жағдайларды қарастырайық:

1. $\lambda\neq 1$

$$\int_{a}^{+\infty}\frac{dx}{x^{\lambda}}=\lim_{A\to+\infty}\int_{a}^{A}\frac{dx}{x^{\lambda}}=\lim_{A\to+\infty}\frac{x^{1-\lambda}}{1-\lambda}\Bigg|_{a}^{A}=\lim_{A\to+\infty}\frac{A^{1-\lambda}-a^{1-\lambda}}{1-\lambda}=\begin{cases}-\dfrac{a^{1-\lambda}}{1-\lambda}, & \lambda > 1\\ \infty, & \lambda < 1\end{cases}$$

2. $\lambda=1$

$$\int_{a}^{+\infty}\frac{dx}{x}=\lim_{A\to+\infty}\int_{a}^{A}\frac{dx}{x}=\lim_{A\to+\infty}(\ln A-\ln a)=+\infty$$

Осылайша, егер $\lambda > 1$ болса $\int\limits_a^{+\infty} \frac{dx}{x^{\lambda}}$ меншіксіз интегралы жинақты болады, ал $\lambda \le 1$ болса интеграл жинақсыз болады. Төменде $f(x) = \frac{1}{x^{\lambda}}$ функциясының $a = 1, \quad \lambda = 2, \quad \lambda = \frac{1}{5}$ болғанда графиктері келтірілген: