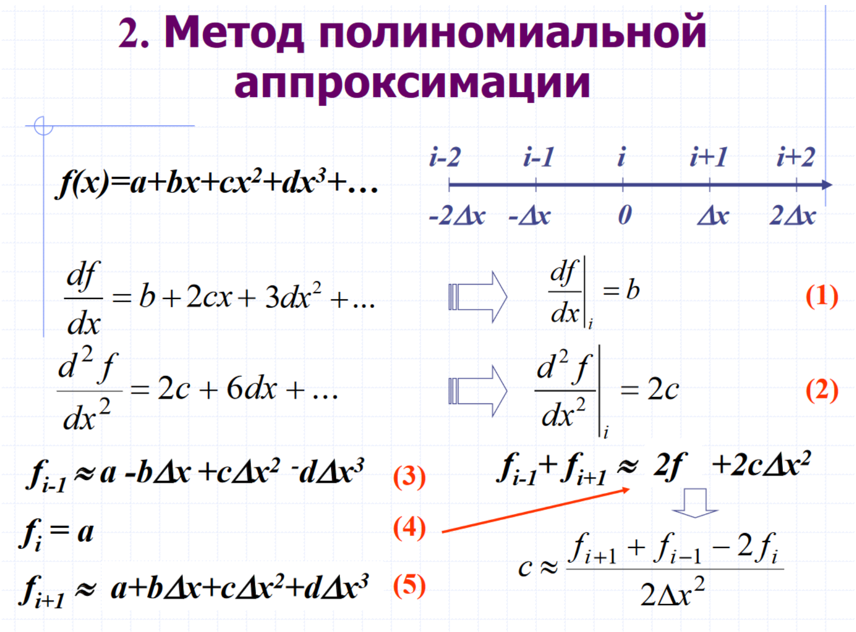
КОМПЬЮТЕРНОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ТЕХНИЧЕСКИХ ЗАДАЧ

Лектор: Болегенова Салтанат Алихановна
+7 701 386 97 55
e-mail.: Saltanat.Bolegenova@kaznu.kz

МЕТОД ПОЛИНОМИАЛЬНОЙ АППРОКСИМАЦИИ

Цель лекции - Основные методы полиномиальной аппроксимации, метод получения конечно-разностных выражений основан на применении аппроксимирующей аналитической функции со свободными параметрами, которая строится по значениям в узлах сетки и затем аналитически дифференцируется

Другой метод получения конечно-разностных выражений основан на применении аппроксимирующей аналитической функции со свободными параметрами, которая строится по значениям в узлах сетки и затем аналитически дифференцируется. Это обычный метод нахождения производных по экспериментальным данным. В идеале вид аппроксимирующей функции должен определяться приближенным аналитическим решением, однако обычно в качестве аппроксимирующих функций используются полиномы. Мы продемонстрируем настоящий метод на примере параболической аппроксимации.



Предположим, что значения функции f заданы в точках i-1, i и $i+1$, и проведем параболическую аппроксимацию функции $f(x)$:

$$f(x)=a+bx+cx^2+dx^3+\dots \qquad (2.11)$$

Найдем первую и вторую производные:

$$\frac{df}{dx}=b+2cx+3dx^2+\dots \qquad (2.12)$$

$$\frac{d^2 f}{dx^2} = 2c + 6dx + \ldots \tag{2.13}$$

Для удобства за начало координат *(x = 0)* примем точку *i*. Тогда уравнение (2.11), записанное в точках *i-1, i* и *i+1* соответственно, даст:

$$\boxed{\left.\frac{d^2 f}{dx^2}\right|_i \approx \frac{f_{i+1} + f_{i-1} - 2f_i}{\Delta x^2}}$$

(5)- (3): $\boldsymbol{f_{i+1} - f_{i-1} \approx 2b\Delta x + 2d\Delta x^3}$

$$\boldsymbol{f_{i+1} - f_{i-1} \approx 2b\Delta x} \quad \Rightarrow \quad b \approx \frac{f_{i+1} - f_{i-1}}{2\Delta x}$$

$$\boxed{\left.\frac{df}{dx}\right|_i \approx \frac{f_{i+1} - f_{i-1}}{2\Delta x}} \qquad \textbf{(1)}$$

(3): $\boldsymbol{f_{i-1} \approx a - b\Delta x}$

(4): $\boldsymbol{f_i \approx a}$

(5): $\boldsymbol{f_{i+1} \approx a + b\Delta x}$

$$\boldsymbol{f_{i-1} \approx f_i - b\Delta x} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\left.\frac{df}{dx}\right|_i \approx \frac{f_i - f_{i-1}}{\Delta x}}$$

$$\boldsymbol{f_{i+1} \approx f_i + b\Delta x} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\left.\frac{df}{dx}\right|_i \approx \frac{f_{i+1} - f_i}{\Delta x}}$$

$$f_{i-1} \approx a - b\Delta x + c\Delta x^2 - d\Delta x, \tag{2.14}$$

$$f_i \approx a, \tag{2.15}$$

$$f_{i+1} \approx a + b\Delta x + c\Delta x^2 + d\Delta x^3. \tag{2.16}$$

Складывая (2.14) и (2.16), получим:

$$f_{i-1} + f_{i+1} \approx 2a + 2c\Delta x^2.$$

Учитывая (2.15), найдем *c*:

$$c \approx \frac{f_{i+1} + f_{i-1} - 2f_i}{2\Delta x^2}.$$

Из (2.16) определим *b*:

$$b \approx \frac{f_{i+1} - f_{i-1}}{2\Delta x}.$$

В точке i (при $x=0$) значение первой производной из (2.12) будет равно:

$$\left.\frac{df}{dx}\right|_i = b \approx \frac{f_{i+1} - f_{i-1}}{2\Delta x}. \qquad (2.17)$$

а из (2.13) значение второй производной в точке i равно:

$$\left.\frac{d^2 f}{dx^2}\right|_i = 2c \approx \frac{f_{i+1} + f_{i-1} - 2f_i}{\Delta x^2}. \qquad (2.18)$$

Формулы (2.17) и (2.18) в точности совпадают с формулами (2.6) и (2.7), полученными разложением в ряд Тейлора. Если предположить, что f — полином первой степени, т. е.:

$f(x)=a+bx+...,$

то в зависимости от того, какие значения используются для определения a и b: значения f_i и f_{i+1} или f_i и f_{i-1}, для первой производной получаются формулы с разностями «вперед» или «назад» соответственно. Очевидно, что при линейной аппроксимации f нельзя получить выражение для второй производной.

Разностные формулы для производных более высокого порядка выводятся с использованием полиномов высших порядков. Выражения, полученные при помощи полиномов порядков выше второго, уже не идентичны выражениям, полученным разложениями в ряды Тейлора, и в каждом случае ошибка аппроксимации должна проверяться при помощи разложения в ряд Тейлора. В вычислительной теплофизике метод полиномиальной аппроксимации, как правило, применяется только для вычисления значений производных вблизи границ.

Недостатком полиномиальных аппроксимаций является то, что с увеличением порядка аппроксимации они оказываются чувствительными к «шумам», т.е. к более или менее случайно распределенным малым ошибкам данных.

Метод интегрирования по контрольному объему

Рассмотрим опять уравнение (2.1). Для того чтобы представить его в конечно-разностном виде, проинтегрируем все члены этого уравнения по времени от t_n до t_{n+1} (или в наших обозначениях от n до n+1) и по пространству от $x_{i-1/2}$ до $x_{i+1/2}$ (или от i-1/2 до i+1/2). Поскольку переменные t и x независимы, то порядок интегрирования несущественен и поэтому выберем его так, чтобы можно было провести одно точное интегрирование:

$$\int_{i-1/2}^{i+1/2}\int_{n}^{n+1}\frac{\partial f}{\partial t}\,dtdx + \int_{n}^{n+1}\int_{i-1/2}^{i+1/2} u\frac{\partial f}{\partial x}dxdt = \int_{n}^{n+1}\int_{i-1/2}^{i+1/2} a\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}dxdt.$$

Первое интегрирование дает:

$$\int\limits_{i-1/2}^{i+1/2}\left(f^{n+1}-f^{n}\right)dx+u\int\limits_{n}^{n+1}\left(f_{i+1/2}-f_{i-1/2}\right)dt=$$
$$=a\int\limits_{n}^{n+1}\left(\left.\frac{df}{dx}\right|_{i+1/2}-\left.\frac{df}{dx}\right|_{i-1/2}\right)dt$$

Воспользуемся известной теоремой «о среднем»:

$$\int\limits_{z_k}^{z_{k+1}} f(z)dz \approx f(z^*)\Delta z\,,$$

где $\Delta z = z_{k+1} - z_k$, $z^* \in [z_k, z_{k+1}]$.

Взяв при вычислении интегралов за среднюю точку по координате x_i, а по времени – крайнюю левую точку t_n, получим:

$$\left(f_i^{\,n+1}-f_i^{\,n}\right)\Delta x+u\left(f_{i+1/2}^{\,n}-f_{i-1/2}^{\,n}\right)\Delta t=$$
$$=a\left(\left.\frac{df}{dx}\right|_{i+1/2}^{n}-\left.\frac{df}{dx}\right|_{i-1/2}^{n}\right)\Delta t\,. \qquad (2.19)$$

Конечно-разностные соотношения для производных в правой части этого уравнения найдем следующим образом.

Проинтегрируем $\frac{df}{dx}$ по x:

$$\int\limits_{i}^{i+1}\left.\frac{df}{dx}\right|^{n}dx=f_{i+1}^{\,n}-f_i^{\,n}\,. \qquad (2.20)$$

С другой стороны, если в качестве средней точки из интервала $[x_i, x_{i+1}]$ взять $x_{i+1/2}$, то по теореме «о среднем» приближенное значение этого интеграла равно:

$$\int\limits_{i}^{i+1}\left.\frac{df}{dx}\right|^{n}dx\approx\left.\frac{df}{dx}\right|_{i+1/2}^{n}\Delta x\,. \qquad (2.21)$$

Приравняв правые части равенств (2.20) и (2.21), получим:

$$\left.\frac{df}{dx}\right|_{i+1/2}^{n} \Delta x \approx f_{i+1}^{n} - f_{i}^{n},$$

откуда:

$$\left.\frac{df}{dx}\right|_{i+1/2}^{n} \approx \frac{f_{i+1}^{n} - f_{i}^{n}}{\Delta x}. \qquad (2.22)$$

Аналогично можно получить выражение для производной в узле $x_{i-1/2}$:

$$\left.\frac{df}{dx}\right|_{i-1/2}^{n} \approx \frac{f_{i}^{n} - f_{i-1}^{n}}{\Delta x}. \qquad (2.23)$$

Значения $f_{i+1/2}$ и $f_{i-1/2}$ заменим их средними арифметическими значений f в соседних узлах:

$$f_{iF1/2} = (f_{iF1} + f_i)/2. \qquad (2.24)$$

Подставляя (2.22)-(2.24) в уравнение (2.19), получим:

$$\left(f_i^{n+1} - f_i^{n}\right)\Delta x + \frac{u}{2}\left(f_{i+1}^{n} - f_{i-1}^{n}\right)\Delta t =$$
$$= a\left(\frac{f_{i+1}^{n} - f_{i}^{n}}{\Delta x} - \frac{f_{i}^{n} - f_{i-1}^{n}}{\Delta x}\right)\Delta t \quad , \qquad (2.25)$$

откуда, разделив все уравнение почленно на произведение $\Delta x\Delta t$ и приведя подобные, окончательно будем иметь следующее конечно-разностное уравнение:

$$\frac{f_i^{n+1} - f_i^{n}}{\Delta t} + u\,\frac{f_{i+1}^{n} - f_{i-1}^{n}}{2\Delta x} = a\,\frac{f_{i+1}^{n} + f_{i-1}^{n} - 2 f_i^{n}}{\Delta x^2}, \qquad (2.26)$$

которое в точности совпадает с уравнением (2.9). Такого совпадения мы добились, подбирая соответствующим образом пределы интегрирования.

Вообще же, в интегральном методе, как и при разложении в ряд Тейлора, существует большой произвол при выводе конечно-разностных уравнений, связанный с выбором контрольного объема, по которому производится интегрирование. Различие между интегральным методом и разложением в ряд Тейлора наиболее четко проявляется при использовании непрямоугольной системы координат.

Таким образом, все три рассмотренных метода могут привести к одинаковым конечно-разностным выражениям. Это обнадеживает и укрепляет доверие ко всем методам. Но в каждом из них имеется некоторая свобода выбора. В самом деле, существует много правдоподобных конечно-разностных аналогов одного и того же дифференциального уравнения, не все из которых работают.

Контрольные вопросы:

1. Какое ДУ является линейным?
2. Какое ДУ является однородным?
3. Как определяется порядок ДУ?
4. Какие типы ДУ II порядка Вы знаете?
5. Чем отличается равномерная сетка от неравномерной?
6. Что такое «сеточная функция»?
7. Что такое «конечно-разностная схема»?
8. Что такое «шаблон»?