Лекция 1. Предмет математического анализа. Основные понятия теории множеств, операции над ними и логическая символика. Множество действительных чисел. Бином Ньютона. Метод математической индукции. Абсолютная величина и её основные свойства. Отображения

Логическая символика

Математика оперирует предложениями, про которые мы обычно можем определенно сказать, истинны они или ложны. Такие предложения называются высказываниями. Высказывания являются объектом изучения раздела математики, который называется математической логикой. Мы не будем вдаваться в детали этого раздела, но будем использовать обозначения, которыми математическая логика пользуется.

Для краткой записи математических высказываний мы будем употреблять следующие логические символы:

Квантор всеобщности

Квантор всеобщности – $\forall$, который читается как «любой», «всякий», «для любого», «для всякого».

Квантор существования

Квантор существования – $\exists$, который читается как «существует», «можно найти», «найдется».

Знак $\forall$ является перевернутой буквой A , а знак $\exists$ перевернутой E, которые являются первыми буквами английских слов All - все и Exists - существуем. Например, запись $\forall x \exists y x + y = 5$ читается следующим образом: «для любого x можно найти y так, что $x + y = 5$ ».

Знак следования $\Rightarrow$

Если α и β два высказывания, то запись $\alpha \Rightarrow \beta$ будет означать: «из α следует β», « α влечет за собой β», «если α, то β», «для того чтобы было выполнено α необходимо, что выполнялось β » или «для того, чтобы выполнялось β, достаточно, чтобы было выполнено α ». Например, запись $x \vdots 6 \Rightarrow x \vdots 2$ можно прочитать следующим образом: «если x делится на 6, то x делится на 2» или «для того, чтобы x делился на 6, необходимо, чтобы x делился на 2» или «для того, чтобы x делился на 2, достаточно, чтобы x делился на 6».

Знак равносильности $\Leftrightarrow$

Запись $\alpha \Leftrightarrow \beta$ означает: « α равносильно β », «из α следует β и из β следует α, « α необходимо и достаточно для выполнения β » или « α выполнено тогда и только тогда, когда выполнено β ». Например, $\forall P_n(x)$-многочлен, $\quad P_n(x) \vdots (x - x_0) \Leftrightarrow x_0$-корень $P_n(x)$ можно прочитать таким образом: «для того, чтобы многочлен $P_n(x)$ делился на $x - x_0$, необходимо и достаточно, чтобы x_0 было корнем этого многочлена» или «многочлен $P_n(x)$ делится на $x - x_0$ тогда и только тогда, когда x_0 является корнем этого многочлена».

Знак отрицания $\rceil$

Запись $\rceil\alpha$ означает «не α », «неверно, что α имеет место».

Замечание.

Использование кванторов позволяет легко строить отрицание высказываний. Запись $\rceil\forall$ («не для любого») читается таким образом:
«существует объект, не обладаюший требуемым свойствам», и запись $\rceil\exists$ («не существует») можно прочитать: «любой объект не обладает указанным свойством».

Например, высказывание $\rceil\forall n \in \mathbb{N}$ число $4n-1$ - простое означает: «не для всякого натурального числа n число $4n-1$ простое», что равносильно высказыванию: «существует натуральное число n, для которого число $4n-1$ составное». А высказьвание $\rceil\exists n \in \mathbb{N}(2n+1)\vdots 4$ означает: «не существует натурального числа n, для которого $2n+1$ делится на 4», что равносильно высказьванию «для всякого натурального n число $2n+1$ не делится на 4».

Бином Ньютона. Метод математической индукции

Приведем здесь одну важную формулу, которая является обобщением двух, хорошо известных школьных формул.

Обозначим через $n!$ (читается n-факториал) произведение всех натуральных чисел от 1 до n. Кроме того, положим по определению, $0! = 1$.
Биномом Ньютона называется формула

$$(a+b)^n = C_n^0 a^n + C_n^1 a^{n-1} b + C_n^2 a^{n-2} b^2 + \ldots + C_n^k a^{n-k} b^k + \ldots + C_n^n b^n$$

где a и b - любые вещественные числа, n - натуральное число, а коэффициенты $C_n^0, C_n^1, C_n^2, \ldots, C_n^k, \ldots, C_n^n$ называются биномиальными коэффициентами и вычисляются по формуле $C_n^k = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$.

В школьном курсе формула бинома Ньютона приводится для $n=2$ и $n=3$.

Прежде чем доказывать формулу бинома Ньютона, сформулируем и докажем свойства биномиальных коэффициентов:

1. $C_n^0 = C_n^n = 1$;
2. $C_n^1 = C_n^{n-1} = n$;
3. $C_n^k = C_n^{n-k}$;
4. $C_n^k + C_n^{k+1} = C_{n+1}^{k+1}$.

Первые два свойства очевидно следуют из формулы для вычисления коэффициентов. Докажем третье свойство:

$$\begin{aligned}\Delta C_n^k + C_n^{k+1} =& \frac{n!}{k!(n-k)!} + \frac{n!}{(k+1)!(n-k-1)!} = \frac{n!(k+1+n-k)}{(k+1)!(n-k)!} = \\ &= \frac{(n+1)!}{(k+1)!((n+1)-(k+1))!} = C_{n+1}^{k+1}.\end{aligned}$$

Метод математической индукции

Чтобы доказать, что некоторое утверждение верно для любого $n \in \mathbb{N}$ (номера n), достаточно доказать, что:

1) это утверждение верно при $n = 1$;

2) из предположения о справедливости утверждения для номера n следует справедливость этого утверждения для следующего номера $n + 1$.

Такой метод доказательства называют методом математической индукиии.

Доказательство формулы бинома Ньютона

Теперь докажем формулу *бинома Ньютона*. Доказательство проведем методом математической индукции.

База индукции

Очевидно, равенство $(a+b)^1 = C_1^0 a + C_1^1 b$ верно.

Индукционная теорема

Равенство

$$(a+b)^m = C_m^0 a^m + C_m^1 a^{m-1} b + C_m^2 a^{m-2} b^2 + \ldots + C_m^k a^{m-k} b^k + \ldots + C_m^m b^m$$

верно при некотором натуральном m.

Шаг индукции

Докажем, что будет верным равенство

$$(a+b)^{m+1} =$$
$$= C_{m+1}^0 a^{m+1} + C_{m+1}^1 a^m b + C_{m+1}^2 a^{m-1} b^2 + \ldots + C_{m+1}^k a^{m+1-k} b^k + \ldots + C_{m+1}^{m+1} b^{m+1}$$

Действительно,

$$\begin{gathered}
(a+b)^{m+1} = (a+b)^m (a+b) = \\
= \left(C_m^0 a^m + C_m^1 a^{m-1} b + C_m^2 a^{m-2} b^2 + \ldots + C_m^k a^{m-k} b^k + \ldots + C_m^m b^m\right)(a+b) = \\
= C_m^0 a^{m+1} + C_m^1 a^m b + C_m^2 a^{m-1} b^2 + \ldots + C_m^k a^{m-k+1} b^k + \ldots + C_m^m a b^m + \\
+ C_m^0 a^m b + C_m^1 a^{m-1} b^2 + \ldots + C_m^{k-1} a^{m-k+1} b^k + \ldots + C_m^{m-1} a b^m + C_m^m b^{m+1} = \\
= C_m^0 a^{m+1} + \left(C_m^1 + C_m^0\right) a^m b + \left(C_m^2 + C_m^1\right) a^{m-1} b^2 + \ldots + \left(C_m^k + C_m^{m-k+1}\right) a^{m-k+1} b^k + \\
+ \ldots + \left(C_m^m + C_m^{m-1}\right) a b^m + C_m^m b^{m+1} = \\
= C_{m+1}^0 a^{m+1} + C_{m+1}^1 a^m b + C_{m+1}^2 a^{m-1} b^2 + \ldots + C_{m+1}^k a^{m-k+1} b^k + \\
+ \ldots + C_{m+1}^m a b^m + C_{m+1}^{m+1} b^{m+1}.
\end{gathered}$$

Т. о., формула будет верна для любого натурального показателя n.

Множества

Множество

Понятие множества - одно из основных понятий в математике, поэтому точного определения этого понятия не существует. Как все основные понятия, оно определяется аксиоматически, но здесь мы не будем этого делать и вместо точного определения дадим синонимы этого понятия, позволяющие понять, что это такое.

Синонимами понятия «множество»» являются: совокупность, набор, а также все аналогичные слова, употребляющиеся в более конкретных ситуациях, такие как коллекция, группа, стая и т.п. Например, множество людей, служащих на одном корабле - экипаж или команда, множество томов одного автора собрание сочинений.

Один объект, входящий в данное множество, будем называть элементом этого множества. Количество элементов в множестве может быть любым. Если в множестве нет ни одного элемента, то такое множество будем называть пустым. Например, множество вещественных решений уравнения

$$x^2 + 6x + 10 = 0$$

пусто. Обозначать пустое множество будем символом $\varnothing$.

Если множества обозначать большими латинскими буквами, а элементы множества малыми, то запись $a \in A$ будет читаться как « есть элемент множества А» или «элемент a принадлежит множеству А», а запись $a \notin A$ как «а не является элементом множества А » или «элемент a не принадлежит множеству А».

Если количество элементов в множестве невелико, то множество можно задать перечислением его элементов в фигурных скобках, например,
$A = \{1, 3, 6, 10\}$. Также можно задать и бесконечные множества, если ясен закон образования их элементов.

Например, $B = \{1, 4, 9, 16, \ldots\}$. Естественно считать, что перед нами множество квадратов натуральных чисел. Поэтому, если не возникает разночтений, в этой ситуации не задают общий член элементов множества.

Множества очень часто задаются некоторым свойством, по которому можно определить, входит взятый объект в данное множество или нет. Это свойство будем называть характеристическим свойством множества. Для записи такого множества в фигурных скобках сначала пишут, как обозначается элемент множества, затем вертикальную черту, после которой записывается характеристическое свойство. Например, $C = \{x \mid x$ - натуральное число, $x = 4n + 1, n = 0, 1, 2, 3, \ldots\}$ - множество натуральных чисел, которые при делении на 4 дают в остатке 1.

Подмножество. Равенство множеств

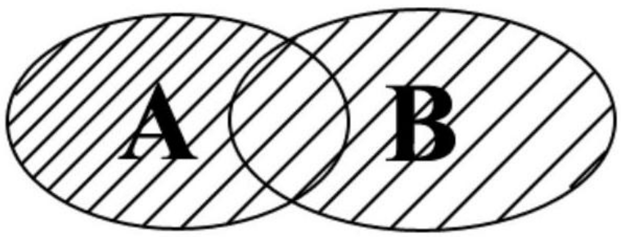
Если даны два множества A и B и известно, что каждый элемент множества B является элементом множества A, то будем говорить, что множество B является подмножеством множества A или, что множество A содержсит в себе множество B. Это обозначается следующей записью: $B \subset A$.

Два множества и B называются равными, если $B \subset A$ и $A \subset B$. Очевидно, что множества равны тогда и только тогда, когда они состоят из одинаковых элементов.

Операции над множествами

Довольно часто в задачах требуется из двух (или более) данных множеств образовать тем или иным способом одно третье множество. Для этого вводится несколько операций над множествами.

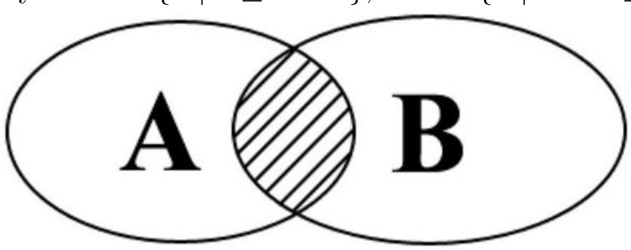
Объединением двух множеств A и B называется множество C, состоящее из всех элементов, которые входят хотя бы в одно из данных множеств.



Обозначается объединение следующим образом: $C = A \cup B$.

Пример 1.

Пусть $A = \{x \mid 2 \leq x < 5\}$, $\quad B = \{x \mid 4 < x \leq 7\}$. Тогда $A \cup B = \{x \mid 2 \leq x \leq 7\}$.



Пересечением двух множеств A и B называется множество C, состоящее из всех элементов, которые входят в каждое из данных множеств.

Обозначается пересечение $C = A \cap B$.

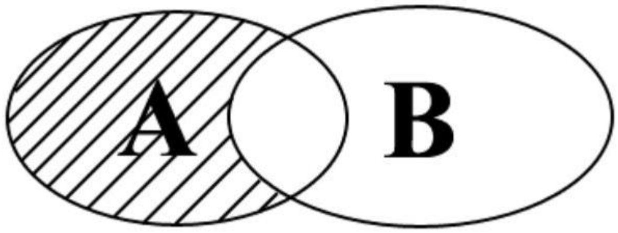
Пример 2.

Рассмотрим множества A и B из предыдущего примера. Тогда $A \cap B = \{x \mid 4 < x < 5\}$.

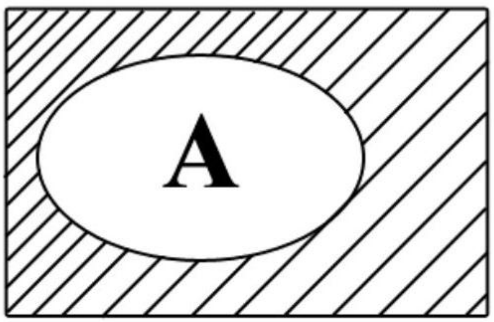
Совершенно очевидно, что понятия объединения и пересечения распространяются на любое количество множеств. Тогда, если имеется некоторое множество множеств A_α, где α образуют некоторую совокупность индексов, то через $\bigcup\limits_{\alpha \in U} A_\alpha$ мы будем обозначать объединение множеств A_α, а через $\bigcap\limits_{\alpha \in U} A_\alpha$ - их пересечение.

Разностью двух множеств A и B называется множество C, состоящее из всех элементов, которые входят в A, но не входят в B.

Обозначается разность $C = A \backslash B$.



В предыдущем примере $A \backslash B = \{x \mid 2 \leq x \leq 4\}$.



Пусть дано некоторое множество, которое содержит в себе все прочие множества, о которых может идти речь в данном круге задач. Такое множество будем называть универсальным. Тогда дополнением множества A (или дополнением множества A до универсального множества) будем называть множество C, состоящее из всех элементов которые входят в универсальное множество, но не входят в множество A.

Например, когда речь идет о числах, естественно за универсальное множество принять множество всех вещественных (или комплексных) чисел. Тогда дополнением множества рациональных чисел является множество иррациональных чисел и т.п.

Дополнение множества A будем обозначать A^d.

Операции над множествами иллюстрируются на так называемых диаграммах Венна, где каждое множество изображается в виде части плоскости.

Свойства операций над множествами

Операции над множествами обладают рядом свойств, которые полезно знать:

1. $A \cup B = B \cup A$;
2. $A \cap B = B \cap A$;
3. $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$;
4. $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$;
5. $A \cup \varnothing = A$;
6. $A \cap \varnothing = \varnothing$;
7. $(A \cup B)^d = A^d \cap B^d$;
8. $(A \cap B)^d = A^d \cup B^d$.

Для доказательства этих свойств воспользуемся определением равенства множеств. Докажем, например, свойства 3 и 7.

Доказательство свойства 3.

Пусть $a \in A \cup (B \cap C)$, тогда

$$\left[\begin{array}{l} a \in A \\ a \in B \cap C \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} a \in A \\ \left\{\begin{array}{l} a \in B \\ a \in C \end{array}\right. \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} \left[\begin{array}{l} a \in A \\ a \in B \end{array}\right. \\ \\ \left[\begin{array}{l} a \in A \\ a \in C \end{array}\right. \end{array}\right. \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{\begin{array}{l} a \in A \cup B \\ a \in A \cup C \end{array}\right. \Rightarrow a \in (A \cup B) \cap (A \cup C).$$

Таким образом, мы доказали, что из соотношения $a \in A \cup (B \cap C)$ следует соотношение $a \in (A \cup B) \cap (A \cup C)$, что означает, что $A \cup (B \cap C) \subset (A \cup B) \cap (A \cup C)$.

Докажем обратное включение. Пусть $a \in (A \cup B) \cap (A \cup C)$. Тогда

$$\left\{\begin{array}{l} a \in A \cup B \\ a \in A \cup C \end{array}\right.$$

откуда следует, что

$$\left\{\begin{array}{l} \left[\begin{array}{l} a \in A \\ a \in B \end{array}\right. \\ \left[\begin{array}{l} a \in A \\ a \in C \end{array}\right. \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} a \in A \\ \left\{\begin{array}{l} a \in B \\ a \in C \end{array}\right. \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} a \in A \\ a \in B \cap C \end{array}\right.$$

Последние соотношения означают, что

$$a \in A \cup (B \cap C)$$

и

$$(A \cup B) \cap (A \cup C) \subset A \cup (B \cap C)$$

Окончательно, $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$.

Доказательство свойства 7.

- Пусть $a \in (A \cup B)^d$, тогда $a \notin A \cup B$, т.е. $\left\{\begin{array}{l} a \notin A \\ a \notin B \end{array}\right.$, следовательно, $\left\{\begin{array}{l} a \in A^d \\ a \in B^d \end{array}\right. \Rightarrow a \in A^d \cap B^d$ и мы доказали, что $(A \cup B)^d \subset A^d \cap B^d$.

  Обратно, пусть $a \in A^d \cap B^d$. Тогда

$$\left\{\begin{array}{l} a \in A^d \\ a \in B^d \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} a \notin A \\ a \notin B \end{array}\right. \Rightarrow a \notin A \cup B \Rightarrow a \in (A \cup B)^d.$$

Отсюда $A^d \cap B^d \subset (A \cup B)^d$ и окончательно, $(A \cup B)^d = A^d \cap B^d$.

Абсолютная величина и её основные свойства.

Определение 1.4.4. Модулем вещественного числа a будем называть число, равное a, если оно положительно, равное числу противоположному a, если a отрицательно и равное нулю, если a равно нулю.

Таким образом, $|a| = \begin{cases} a, & a > 0 \\ -a, & a < 0 \\ 0, & a = 0 \end{cases}$ или $|a| = \begin{cases} a, & a \geq 0 \\ -a, & a < 0. \end{cases}$ Перечислим основные **свойства модуля** вещественного числа.

1. $|a| \geq 0$, причем $|a| = 0$ тогда и только тогда, когда $a = 0$;
2. $|a| = |-a|$;
3. $-|a| \leq a \leq |a|$;
4. $|a| = |b| \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a = b, \\ a = -b; \end{array} \right.$
5. $|x| = C \overset{C \geq 0}{\Leftrightarrow} \left[\begin{array}{l} x = C, \\ x = -C; \end{array} \right.$
6. $|x| < C \Leftrightarrow \begin{cases} x < C, \\ x > -C, \end{cases}$

Последнюю систему при положительном C можно записать в виде двойного неравенства $-C < x < C$.

7. $|x| > C \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x > C, \\ x < -C; \end{array} \right.$
8. $|ab| = |a||b|$;
9. $\left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|}$;
10. $|a + b| \leq |a| + |b|$;
11. $|a - b| \geq ||a| - |b||$.

Отображения множеств

Определение 1.1 *Определение 1.3.1. Пусть даны два множества X и Y. Правило f, по которому для каждого элемента $x \in X$ можно найти единственный элемент $y \in Y$, будем называть отображением множества X в множество Y.*

Задать отображение - означает задать тройку X, Y и правило f.

Тот факт, что задано отображение множества X в множество Y будем обозначать $f : X \to Y$ или $X \to Y$. Если мы хотим указать, какой именно элемент $y \in Y$ соответствует элементу $x \in X$, то будем писать $x \to y$ или $y = f(x)$. Множество X будем называть областью определения отображения. Элемент y, соответствующий элементу $x \in X$, называется образом элемента x и обозначается $f(x)$. Множество образов $\{f(x) \mid x \in X\} = Y_0$ входит в множество Y, но может не совпадать с ним. Множество Y_0 будем называть множеством значений отображения. Если $Y_0 = Y$, то будем говорить, что f отображает X на Y или, что отображение f является сюръекцией.

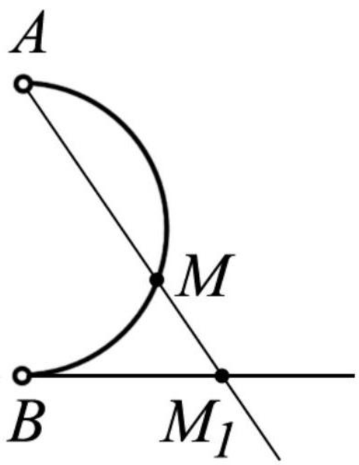
Пример 3.

Пусть $X = Y = \mathbb{R}$ - множество всех вещественных чисел, и каждому $x \in X$ ставится в соответствие его квадрат x^2. Это правило является отображением множества X в множество Y, но не является сюрьекцией, так как есть вещественные числа (отрицательные), которые не являются значениями такого отображения.

Если положить X - множество всех вещественных чисел и Y - множество неотрицательных вещественных чисел, и $x \to x^2$, то такое правило отображает X на Y, т.е. является сюрьекцией.

Пример 4.

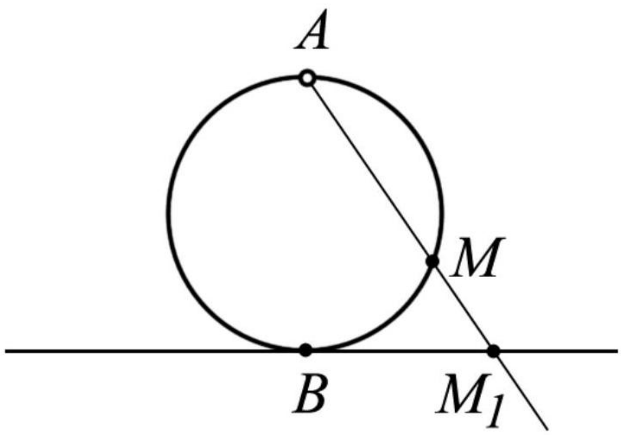
Пусть X - множество точек полуокружности AB (конечные точки не принадлежат множеству), Y множество точек прямой l. Каждой точке полуокружности M сопоставим точку прямой M_1 так, чтобы точки A, M, M_1 лежали на одной прямой.



Это отображение множества X в множество Y. Если взять X - множество точек окружности с выколотой точкой A и Y - множество точек прямой l и каждой точке окружности M сопоставить точку прямой M_1 так, чтобы точки A, M, M_1 лежали на одной прямой, то такое правило будет сюрьекцией.

Пример 5.

$X = \mathbb{N}, Y$ - произвольное множество. Здесь каждому натуральному числу сопоставляется элемент некоторого множества. Такое отображение будем называть последовательностью.



Элемент множества Y, соответствующий натуральному числу n называют общим членом последовательности и обозначают y_n. Таким образом, последовательность - это отображение множества натуральных чисел в произвольное множество $Y : n \to y_n, n \in \mathbb{N}, y_n \in Y$. Последовательности будем записывать $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ или, иногда, в виде упорядоченного набора $y_1, y_2, y_3, \ldots$, которые будем называть элементами последовательности.

Замечание.

Если отображение задает последовательность, то множество значений этой последовательности также обозначается символом $\{y_n\}$, но это множество не надо путать с самой последовательностью. Последовательность всегда бесконечна, тогда как множество ее значений может быть конечным. Например, пусть общий член последовательности задан формулой $y_n = \dfrac{1+(-1)^n}{2}, n \in \mathbb{N}$. Тогда последовательностью будет бесконечный набор чисел $0, 1, 0, 1, 0, \ldots$, а множеством ее значений - множество, состоящее только из двух элементов: $\{0, 1\}$.

Возьмем $y \in Y_0$. Тогда множество $\{x \mid f(x) = y\}$ (оно может содержать не единственный элемент) будем называть прообразом элемента y и обозначать $f^{-1}(y)$. Это определение можно расширить и предполагать, что $y \in Y$. Тогда, если $y \notin Y_0$, то его прообраз - пустое множество.

Если задано отображение X на Y, и прообраз каждого элемента из Y единственен, то будем говорить, что между множествами X и Y установлено взаимно-однозначное соответствие. В этой ситуации пишут $X \leftrightarrow Y$ или по элементам $x \leftrightarrow y$ и отображение f, устанавливающее это соответствие называют биекцией.

Понятия образа и прообраза можно ввести не только для одного элемента, но и для множеств. Так, образом мноэжества $A \subset X$ будем называть множество $\{y \mid y \in Y, y = f(x), x \in A\}$, и прообразом множества $B \subset Y$ будем называть множество $\{x \mid x \in X, f(x) = y, y \in B\}$. Образ множества A будем обозначать $f(A)$, а прообраз множества $B - f^{-1}(B)$.