№6-дәріс. Жоғарғы ретті туындылар мен дифференциалдар. Жоғарғы ретті туындылар және дифференциалдар.

$y' = f'(x)$ берілген $y = f(x)$ функциясының бірінші немесе бірінші ретті туындысы, ал функцияның өзі нөлінші ретті туынды деп аталады.

Анықтама. Функцияның k–ші ретті туындысы деп оның $(k\text{-}1)$-ші туындысының туындысын айтады $f^{(k)}(x) = \left(f^{k-1}(x)\right)'$, $k = 1,2,3,\ldots$, егер олар бар болса, онда $f(x)$функциясы k -рет дифференциалданатын функция деп аталады.

Мысал. $y = a^x$ функциясы берілген. Бірінші туындысы $f'(x) = a^x \cdot \ln a$, екінші туындысы $f''(x) = (f'(x))' = (a^x \cdot \ln x)' = a^x \cdot (\ln a)^2$, үшінші туындысы $f'''(x) = (f''(x))' = (a^x \cdot (\ln a)^2)' = a^x \cdot (\ln a)^3$. Демек, $f^{(k)}(x) = a^x \cdot (\ln a)^k$, $k = 0,1,2,\cdots$. Егер $y = f(x)$ және $y = g(x)$ функциялары k–рет дифференциалданатын болса, онда $(\mathrm{k} = 1,2,3,\cdots)$, мына ережелер орынды: $(f+g)^{(k)} = f^{(k)} + g^{(k)}$, $(f+C)^{(k)} = f^{(k)}$.

2. Лейбниц формуласы:

$$(f \cdot g)^{(k)} = f^{(k)}g(x) + kf^{(k-1)}(x)g'(x) + \frac{k(k-1)}{2} f^{(k-2)}(x) \cdot g''(x) +$$

$$+ \ldots = \sum_{m=0}^{k} \frac{k!}{m! \cdot (k-m)!} f^{(k-m)}(x) \cdot g^{(m)}(x); \qquad (Cf)^{(k)} = Cf^{(k)}.$$

Айталық $f(x)$функциясы k–рет дифференциалданатын болсын.

Анықтама. Функцияның k–ші дифференциалы деп оның $(k-1)$–ші ретті дифференциалының дифференциалын айтады: $d^k f = d(d^{k-1} f)$.

Дифференциалды есептеу формулаларын келтірейік:

$df = f'(x)dx,$

$d^2 f = d(df) = (f'(x)dx)'dx = f''(x)(dx)^2,$

$d^3 f = d(d^2 f) = (f''(x)(dx)^2)'dx = f'''(x)(dx)^3,$

$\ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots$

$d^k f = f^{(k)}(x)(dx)^k$. k–шы ретті дифференциалдар үшін мына ережелер орынды:

1) $d^k(f+g) = d^k f + d^k g$, $d^k(f+C) = d^k f$.

2) $d^k(f \cdot g) = \sum\limits_{m=0}^{k} \frac{k!}{m! \cdot (k-m)!} d^{k-m} f \cdot d^m g$, $d^k(C \cdot f) = Cd^k f$.

Ескерту: Жоғарғы ретті $(k > 1)$ дифференциал формасы инвариантты емес.

Дифференциалдық есептеулердің негізгі теоремалары

Анықтама. Егер x_0 нүктесінің бір маңайында $f(x) \ge f(x_0)$ $(f(x) \le f(x_0))$ теңсіздігі орындалса, онда x_0 нүктесін $f(x)$ функциясының жергілікті минимум (максимум) нүктесі деп атайды. Жергілікті минимум және жергілікті максимум нүктелері жергілікті экстремум нүктелері деп аталады. Ал осы нүктелердегі функцияның мәні функцияның экстремумы деп аталады. $[a,b]$ кесіндісінде анықталған функцияның тек қана бір ең үлкен және ең кіші мәндері болады, ал максимумдар және минимумдер бірнеше болуы мүмкін. Функцияның кейбір максимумдары оның минимумдарынан кіші болуы да мүмкін.

Ферма теоремасы. Егер $y=f(x)$ функциясы (a,b) интервалында дифференциалданатын болса және $x_0 \in (a,b)$ нүктесінде ең үлкен немесе ең кіші мәнін қабылдайтын болса, онда функцияның туындысы бұл нүктеде нөлге тең, яғни $f'(x_0)=0$.
Геометриялық мағынасы: функцияның максимум және минимум нүктелерінде жүргізілген жанама Ox өсіне параллель болады.
Ролль теоремасы. Егер $y=f(x)$ функциясы: $[a,b]$ кесіндісінде үзіліссіз болса, (a,b) интервалында дифференциалданатын болса және $f(a)=f(b)$ болса, онда ең болмағанда бір $c\in(a,b)$ нүктесі табылып, $f'(c)=0$ болады.
Геометриялық мағынасы: егер теорема шарттары толығымен орындалса, онда $[a,b]$ кесіндісінде жататын ең болмағанда бір c нүктесі табылып, сол нүктеде жүргізілген жанама Ox өсіне параллель болады.
Коши теоремасы. Егер $y=f(x)$ және $y=g(x)$ функциялары $[a,b]$ кесіндісінде үзіліссіз болса, (a,b) интервалында дифференциалданатын болса және $g'(x)\neq 0 \;\; \forall\; x\in(a,b)$, онда ең болмағанда бір $c\in(a,b)$ нүктесі табылып $\dfrac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\dfrac{f'(c)}{g'(c)}$ теңдігі орындалады.
Лагранж теоремасы. Егер $y=f(x)$ функциясы $[a,b]$ кесіндісінде үзіліссіз болса, (a,b) интервалында дифференциалданатын болса онда (a,b) интервалында жататын c нүктесі табылып, $\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(c)\Leftrightarrow f(b)-f(a)=f'(c)(b-a)$ теңдігі орындалады.
Геометриялық мағынасы: мына қатынас $\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$ $[a,b]$ кесіндісінде $y=f(x)$ функциясының графигінің шеткі нүктелерін қосатын хорданың Ox өсінің оң бағытымен жасайтын бұрыштың тангесіне тең, ал $f'(c)$ c нүктесіне жүргізілген жанаманың Ox өсінің оң бағытымен жасайтын бұрышының тангенісіне тең. Лагранж теоремасы бойынша $c\in(a,b)$ нүктесінде олар өзара тең болады, яғни қиюшы мен жанама параллель болады.

Лопиталь ережесі. Бұл ереже $\left(\dfrac{0}{0}\right)$ немесе $\left(\dfrac{\infty}{\infty}\right)$ анықталмағандықтарын есептеуге мүмкіндік береді.
Теорема. Айталық, $x=a$ нүктесінің маңайында $f(x)$ және $g(x)$ функциялары анықталған және дифференциалданатын болсын (нүктенің өзінде бұл шарттар орындалмауы да мүмкін) және $\lim\limits_{x\to a} f(x)=\lim\limits_{x\to a} g(x)=0$, $g(x)\neq 0$, $g'(x)\neq 0$. Егер $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ шегі бар болса, онда $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}$ шегі бар болады және мына теңдік орындалады: $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$. Осы сияқты тұжырымдар $x\to+\infty$, $x\to-\infty$, $x\to\infty$, $x\to a-$, $x\to a+$ жағдайларда да орынды.
1-мысал. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin ax}{\sin bx}=\left(\dfrac{0}{0}\right)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(\sin ax)'}{(\sin bx)'}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{a\cos ax}{b\cos bx}=\dfrac{a}{b}$;
2-мысал. Лопиталь ережесін бірнеше рет қолдануға да болады:

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-e^{-x}-2x}{x-\sin x}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{(e^x-e^{-x}-2x)'}{(x-\sin x)'}=\lim_{x\to 0}\frac{e^x+e^{-x}-2}{1-\cos x}=\left(\frac{0}{0}\right)==\lim_{x\to 0}\frac{(e^x+e^{-x}-2)'}{(1-\cos x)'}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{e^x-e^{-x}}{\sin x}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{(e^x-e^{-x})'}{(\sin x)'}=\lim_{x\to 0}\frac{e^x+e^{-x}}{\cos x}=\frac{1+1}{1}=2$$

Лопиталь ережесін анықталмағандықтардың мына түрлеріне де қолдануға болады $(0-\infty)$, $(\infty-\infty)$, (1^{∞}), (0^{0}), (∞^{0}). Ол үшін оларды $\left(\frac{0}{0}\right)$ немесе $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$ түрлеріне келтіру керек.

1. Егер $y=f(x)\cdot g(x)$ көбейтіндісінде $f(x)-$ ш. а., ал $g(x)-$ ш.ү. шамалар болса, онда оларды төменгідей түрлендіріп, $y=\dfrac{f(x)}{\dfrac{1}{g(x)}}$ немесе $y=\dfrac{g(x)}{\dfrac{1}{f(x)}}$ содан соң Лопиталь ережесін қолданады.

3-мысал. $\lim\limits_{x\to 0+} x\cdot \ln x=(0\cdot\infty)=\lim\limits_{x\to 0+}\dfrac{\ln x}{\dfrac{1}{x}}=\left(\dfrac{\infty}{\infty}\right)=\lim\limits_{x\to 0+}\dfrac{(\ln x)'}{\left(\dfrac{1}{x}\right)'}==\lim\limits_{x\to 0+}\dfrac{\dfrac{1}{x}}{-\dfrac{1}{x^2}}=\lim\limits_{x\to 0+}(-x)=0\cdot$

2. Екі ш.ү. функциялар айырмасы $y=f(x)-g(x)$, яғни $(\infty-\infty)$ анықталмағандығы былай түрлендіріледі $y=\dfrac{1}{\dfrac{1}{f(x)}}-\dfrac{1}{\dfrac{1}{g(x)}}=\dfrac{\dfrac{1}{g(x)}-\dfrac{1}{f(x)}}{\dfrac{1}{f(x)}\cdot\dfrac{1}{g(x)}}=\left(\dfrac{0}{0}\right)$, бұл өрнекке Лопиталь ережесі қолданылады.

4-мысал.

$$\lim_{x\to 0}\left(ctgx-\frac{1}{x}\right)=(\infty-\infty)=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\cos x}{\sin x}-\frac{1}{x}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{x\cos x-\sin x}{x\sin x}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{(x\cos x-\sin x)'}{(x\sin x)'}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-x\sin x-\cos x}{\sin x+x\cos x}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{(-x\sin x)'}{(\sin x+x\cos x)'}=\lim_{x\to 0}\frac{-\sin x-x\cos x}{\cos x+\cos x-x\sin x}=\frac{0}{2}=0.$$

Әдебиеттер: 1 нег.[238-254], 11 қос. [375-377], [385-390].

Бақылау сұрақтар:

1. Жоғары ретті туындының анықтамасын беріңіз.
2. Жоғары ретті дифференциалдың анықтамасын беріңіз.
3. Ролл теоремасы және оның геометриялық мағынасы.
4. Лагранж теоремасы және оның геометриялық мағынасы.
5. Лопиталь ережесі қандай анықталмағандықтарды есептеуге мүмкіндік береді?