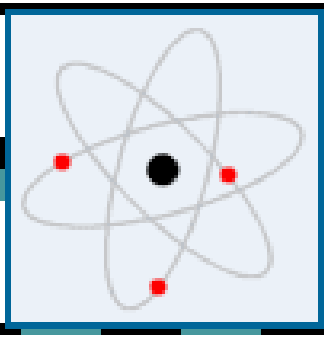
# ЛЕКЦИЯ 2

1. Закон сохранения субстанции
2. Уравнения Навье-Стокса
   - Уравнение неразрывности
   - Уравнения движения
     - Тензор вязких напряжений
     - Поступательное движение
     - Вращательное движение
     - Поступательно вращательное движение
3. Закон сохранения импульса для несжимаемой жидкости с постоянными свойствами



# ОСНОВНЫЕ УРАВНЕНИЯ МЕХАНИКИ ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ

## ЗАКОН СОХРАНЕНИЯ СУБСТАНЦИИ

**УРАВНЕНИЯ НАВЬЕ-СТОКСА:**

**закон сохранения массы и импульса**

**+**

**Для сжимаемых течений уравнение состояния:** $pV = \frac{m}{M} RT$

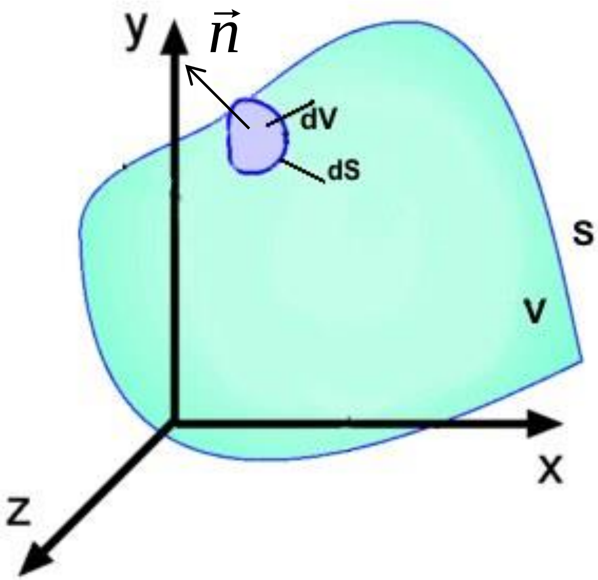
**+**

**Для неизотермических течений зависимость вязкости от температуры:** $\mu = \mu(T)$

**УРАВНЕНИЕ ЭНЕРГИИ:**

**закон сохранения энергии**

# ЗАКОН СОХРАНЕНИЯ СУБСТАНЦИИ




$N$ – субстанция (масса, импульс, энергия)

$\rho_N$ - плотность субстанции

$\int_V \rho_N dV$ - количество субстанции $N$ в объеме $V$

$\frac{\partial}{\partial t}\int_V \rho_N dV$ - изменение количества субстанции за единицу времени

## ИЗМЕНЕНИЕ СУБСТАНЦИИ

1. Поток (втекание, вытекание) субстанции через поверхность $S$.

$$d\vec{S} = dS \cdot \vec{n}$$

$\vec{n}$ - единичный вектор

$P_N$ - плотность потока субстанции в ед. времени через поверхность $S$

$-\oint_S P_N d\vec{S}$ - количество субстанции, вытекающей из объема *V*, через поверхность *S*

**2.** $q_N$ **- плотность субстанции, появляющейся в ед. времени, в ед.объема**

**химические реакции, фазовые переходы и др.**

**Закон сохранения некоторой субстанции в интегральной форме:**

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial t}\int_V \rho_N dV = -\oint_S P_N d\vec{S} + \int_V q_N dV} \qquad (3)$$

**изменение** **вытекание** **появление**

Получим уравнение (3) в дифференциальной форме.

Теорема Остроградского – Гаусса: $\oint_S P_N d\vec{S} = \int_V div\vec{P}_N dV$

$$(3) \Rightarrow \frac{\partial}{\partial t}\int_V \rho_N dV = -\int_V div\vec{P}_N dV + \int_V q_N dV \Rightarrow \int_V \left(\underline{\frac{\partial \rho_N}{\partial t} + div\vec{P}_N - q_N}\right)dV = 0 \qquad (4)$$

$$\boxed{\frac{\partial \rho_N}{\partial t} + div\vec{P}_N - q_N = 0} \qquad (5)$$

**- Закон сохранения субстанции в дифференциальной форме**

**Размерность: [N/m³c]**

# УРАВНЕНИЯ НАВЬЕ-СТОКСА

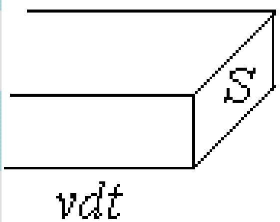
- уравнение неразрывности (закон сохранения массы)
- уравнения движения (закон сохранения импульса)

**Все величины в природе – тензоры.**
- **Скаляр – тензор нулевого ранга.**
  - **Вектор – тензор первого ранга.**
    - **Тензор второго ранга - определяется.**

**! Операция *div* понижает ранг тензора**

$$\frac{\partial \rho_N}{\partial t} + div\vec{P}_N - q_N = 0 \qquad (5)$$

## УРАВНЕНИЕ НЕРАЗРЫВНОСТИ




**Субстанция *N* – масса:** $m$

скаляр

**Плотность:** $\rho_N = \rho$

**Количество вещества, возникающего в ед. объема в ед. времени:** $q_N$

**Вектор плотности потока вещества:** $\vec{P}_N = \frac{\rho\,\vec{\upsilon}\,\upsilon dt\, S}{\upsilon dt S} = \rho\vec{\upsilon}$

$$(5) \Rightarrow \boxed{\frac{\partial \rho}{\partial t} + div(\rho\vec{\upsilon}) = q_N}$$ **- Закон сохранения вещества** **(6)**

**ОДНОРОДНАЯ СРЕДА:** $q_N = 0$

(6) $\Rightarrow$ $$\boxed{\frac{\partial \rho}{\partial t} + div \rho \vec{\upsilon} = 0}$$ - Уравнение неразрывности

$$div \vec{\upsilon} = \frac{\partial \upsilon_x}{\partial x} + \frac{\partial \upsilon_y}{\partial y} + \frac{\partial \upsilon_z}{\partial z} = \sum_{k=1}^{3} \frac{\partial \upsilon_k}{\partial x_k} = \frac{\partial \upsilon_k}{\partial x_k}$$

Тогда имеем: $$\boxed{\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho \upsilon_k}{\partial x_k} = 0}$$

**НЕСЖИМАЕМАЯ ЖИДКОСТЬ:** $\rho = const$

$$\rho div \vec{\upsilon} = 0 \Rightarrow \boxed{div \vec{\upsilon} = 0} \text{ или } \frac{\partial \upsilon_k}{\partial x_k} = 0$$

**Для декартовой системы координат:** $$\frac{\partial \upsilon_x}{\partial x} + \frac{\partial \upsilon_y}{\partial y} + \frac{\partial \upsilon_z}{\partial z} = 0 \Rightarrow \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial \upsilon}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0$$

**СТАЦИОНАРНОЕ ТЕЧЕНИЕ:** $$\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \Rightarrow \boxed{div(\rho \vec{\upsilon}) = q_N}$$

# УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ

$$\frac{\partial \rho_N}{\partial t} + div\vec{P}_N - q_N = 0 \qquad (5)$$

**Субстанция *N* – импульс:** $m\vec{\upsilon}$

**Плотность импульса:** $\rho_N = \dfrac{m\vec{\upsilon}}{V} = \rho\vec{\upsilon} \Rightarrow \quad \rho_N = \rho\vec{\upsilon}$

***вектор***

**Количество импульса, появляющегося в единице объема:** $q_N$

$\vec{P}_N$ - тензор 2-го ранга

**Тензор 2-го ранга** - это совокупность 9 величин, составленных как всевозможные произведения компонент 2-х действительных векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$

$$\begin{pmatrix} a_1b_1 & a_1b_2 & a_1b_3 \\ a_2b_1 & a_2b_2 & a_2b_3 \\ a_3b_1 & a_3b_2 & a_3b_3 \end{pmatrix} = a_ib_k = T_{ik}$$

## Символ Кронекера (тензорная единица) $\delta_{ik}$ : $\delta_{ik} = \begin{cases} 0 & i \neq k \\ 1 & i = k \end{cases} \Rightarrow \delta_{ik} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

**Определим физический смысл величин, входящих в уравнение (5).**

Второй закон Ньютона: $\sum \vec{F}_i = m\vec{a} = \frac{\partial}{\partial t}(m\vec{\upsilon})$

Для единицы объема: $\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{m}{V}\vec{\upsilon}\right) = \frac{\partial}{\partial t}(\rho\vec{\upsilon}) = \sum \vec{F}_{\rho i}$ - это сумма всех сил, относящихся к ед. объема.

$div\vec{P}_N$ и $q_N$ $\Rightarrow$ имеют смысл силы

**В динамике сплошных сред имеют дело не с самими силами, а с плотностью их распределения в пространстве**

**НА ЧАСТИЦЫ ЖИДКОСТИ, ДЕЙСТВУЮТ**

$q_N$ - объемные силы

$div\vec{P}_N$ - поверхностные силы

**сила давления *p***

**сила трения *τ***

$P_N = P_{ik}$ **- плотность потока импульса в единицу времени, тензор 2-го ранга.**

**потока импульса = конвективный перенос + действие поверхностных сил:**

$$\boxed{P_{ik} = \rho \upsilon_i \upsilon_k - \sigma_{ik}}$$

$\rho \upsilon_i \upsilon_k$ **— плотность потока импульса, обусловленная конвективным переносом жидкости.**

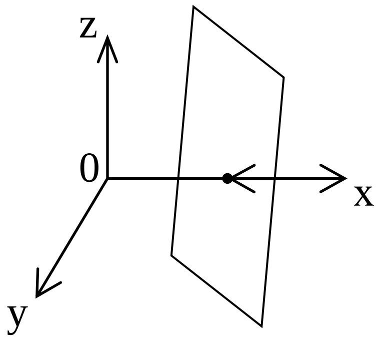
$\sigma_{ik}$ **- плотность потока импульса, обусловленная поверхностными силами.**

$$\sigma_{ik} = \begin{pmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_{zz} \end{pmatrix}$$

- **тензор напряжений в вязкой среде**

**поверхностные силы, направленные перпендикулярно поверхности**

**поверхностные силы, направленные по касательной к поверхности**




▶ $\sigma_{xx}$ **-составляющая перпендикулярная к площадке, которая перпендикулярна оси *x*, т.е. она направлена вдоль оси *x* и является нормальной силой, т.е. силой давления.**

**Аналогично** для $\sigma_{yy}$ и $\sigma_{zz}$.

▶ $\sigma_{xy}$ **- составляющая, направленная вдоль оси *y* к площадке, перпендикулярной оси *x*. т.е. она касательна к поверхности и является силой трения.**

**Аналогично** для $\sigma_{yz}$ и $\sigma_{xz}$.

**трения нет** $\Rightarrow$ **касательные силы = 0** $\Rightarrow$ $\boxed{\sigma_{xy} = \sigma_{xz} = \sigma_{yz} = 0}$ $\Leftrightarrow$ $\boxed{\sigma_{xy} = \sigma_{yx}}$

**давление жидкости** $\rightarrow$ **отрицательное значение любого из нормальных напряжений** $\boxed{\sigma_{xx} = \sigma_{yy} = \sigma_{zz} = -p}$

$$\boxed{p = -\frac{1}{3}(\sigma_{xx} + \sigma_{yy} + \sigma_{zz})}$$

## Теперь найдем касательные напряжения:

- **тензор напряжений в вязкой среде** $\sigma_{ik}$
  - **давление**
  - **тензор вязких напряжений – плотность потока импульса, обусловленного силами трения**

$$\boxed{\sigma_{ik} = -p\delta_{ik} + \sigma'_{ik}}$$

**Здесь $\delta_{ik}$ - тензорная единица**

$\sigma'_{ik}$ **- обусловлен силами трения и его действия проявляются только тогда, когда есть относительное движение слоев жидкости, т.е. слои жидкости должны обладать различными скоростями.**

$$\tau = \mu \frac{\partial u}{\partial y} \Rightarrow$$

**силы вязкости, прежде всего, зависят не от скорости , а от градиента скорости.**

Далее найдем эту зависимость.