Мысал 5. $F'(\alpha)$ табыңыз: $F(\alpha)=\int\limits_{\cos\alpha}^{\sin\alpha} sh\alpha x^2 dx$

Шешуі. Шектері параметрден тәуелді болғанда меншікті интегралды дифференциалдау туралы теореманы қолдансақ,

$$F'(\alpha)=\cos\alpha\cdot sh\left(\alpha\sin^2\alpha\right)+\sin\alpha\cdot sh\left(\alpha\cos^2\alpha\right)+\int\limits_{\cos\alpha}^{\sin\alpha} x^2 ch\alpha x^2 dx.$$

Мысал 6. $F'(\alpha)$ табыңыз: $F(\alpha)=\int\limits_{c+\alpha}^{b+\alpha}\frac{\sin\alpha x}{x}dx$

Шешуі. Интеграл астындағы $f(x,\alpha)=\frac{\sin\alpha x}{x}$ функциясын қосымша $f(0,\alpha)=\alpha$ деп анықтасақ, ол $\Re\times\Re$ жиынында үзіліссіз болады. $f'_\alpha(x,\alpha)=\cos\alpha x\in C(\Re\times\Re)$ болғандықтан шектері параметрден тәуелді болғанда меншікті интегралды дифференциалдау туралы теореманы қолдансақ,

$$F'(\alpha)=\frac{\sin\alpha(b+\alpha)}{b+\alpha}-\frac{\sin\alpha(c+\alpha)}{c+\alpha}+\int\limits_{c+\alpha}^{b+\alpha}\cos\alpha x dx=\frac{\sin\alpha(b+\alpha)}{b+\alpha}-\frac{\sin\alpha(c+\alpha)}{c+\alpha}+$$

$$+\frac{\sin\alpha x}{\alpha}\Bigg|_{x=c+\alpha}^{x=b+\alpha}=\left(\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{b+\alpha}\right)\sin\alpha(b+\alpha)-\left(\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{c+\alpha}\right)\sin\alpha(c+\alpha);$$

2. Параметрден тәуелді меншіксіз интегралдар

Анықтама. $f(x,y)$ функциясы $\{a\le x < \infty,\quad c\le y\le d\}$ жиынында анықталсын. Осы функцияның $\forall y\in[c;d]$ мәнінде $\int\limits_a^{+\infty} f(x,y)dx$ бар болсын.
Олай болса

$$I(y)=\int\limits_a^{+\infty} f(x,y)dx=\lim_{A\to+\infty}\int\limits_a^{A} f(x,y)dx$$

өрнегін *параметр* y *-тен тәуелді 1-текті меншіксіз интеграл* деп атайды.

Анықтама. $f(x,y)$ функциясы $\{a \le x \square\, b, \quad c \le y \le d\}$ жиынында анықталсын және $f(x,y)$ функциясы $x \to b-0$ шектелмеген болсын. Онда

$$I^*(y) = \int_a^b f(x,y)dx = \lim_{\lambda \to +0} \int_a^{b-\lambda} f(x,y)dx$$

өрнегін *параметр* y *-тен тәуелді 2-текті меншіксіз интеграл* деп атайды.

Мысал 7. $\displaystyle\int_0^1 \frac{\cos\frac{1}{1-x}}{\sqrt[n]{1-x^2}}dx$ интегралдың жинақталу облысын табыңыз:

Шешуі. $t = \dfrac{1}{1-x}, \quad x \ne 1$ алмастыруын жасайық:

$$F(n) = \int_0^1 \frac{\cos\frac{1}{1-x}}{\sqrt[n]{1-x^2}}dx = \left| \begin{array}{l} t = \dfrac{1}{1-x} \\ x = 1 - \dfrac{1}{t} \\ dx = \dfrac{1}{t^2}dt \end{array} \right| = \int_1^{+\infty} \frac{\cos t}{\sqrt[n]{\dfrac{2}{t} - \dfrac{1}{t^2}}} \cdot \frac{dt}{t^2} = \int_1^{+\infty} \frac{\cos t}{t^{2-\frac{1}{n}} \cdot \sqrt[n]{2 - \dfrac{1}{t}}}dt$$

Теңдіктің соңында 1-текті, ерекше нүктесі $t = +\infty$ болатын меншіксіз интеграл алдық. Бұл интегралдың жинақтылығын Абель белгісімен зерттейміз.

1) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\cos t}{t^{2-\frac{1}{n}}}dt$ меншіксіз интегралы Дирихле белгісі бойынша жинақты,

себебі: 1) $|F(t)| = |\cos t| \le 2$ алғашқы функция шектелген, $\forall t \ge 1$;

2) $\dfrac{1}{t^{2-\frac{1}{n}}}$ монотонды кемімелі,

егер $2 - \dfrac{1}{n} \square\, 0 \Rightarrow n \square\, 0$ немесе $n \square\, \dfrac{1}{2}$, $\forall t \ge 1$;

3) $\displaystyle\lim_{t \to +\infty} \frac{1}{t^{2-\frac{1}{n}}} = 0$, егер $n \square\, 0$ немесе $n \square\, \dfrac{1}{2}$

2) $g(t)=\dfrac{1}{\sqrt[n]{2-\dfrac{1}{t}}}$ функциясы $[1;+\infty)$ аралығында монотонды;

3) $g(t)$ шектелген, яғни $\exists K=1 \square 0: |g(t)|\le 1 \qquad \forall t\in[1;+\infty)$.
Ендеше

$$F(n)=\int_0^1 \frac{\cos\dfrac{1}{1-x}}{\sqrt[n]{1-x^2}}dx$$

интегралы да $n \square 0$ немесе $n \square \dfrac{1}{2}$ болса жинақталады. Басқа жағдайларда жинақсыз екенін көрсетейік:

$n\ne 0$, себебі: $\sqrt[n]{\ }$ анықталмайды;

$n=\dfrac{1}{2}$ болса:

$$F(n)=\int_1^{+\infty}\frac{\cos t}{\sqrt[n]{2-\dfrac{1}{t}}}dt=\int_1^{+\infty}\frac{\cos t}{\left(2-\dfrac{1}{t}\right)^2}dt \underset{t\to+\infty}{\sim} \int_1^{+\infty}\frac{\cos t}{4}\,dt$$

Ал, анықтама бойынша

$$\frac{1}{4}\int_1^{+\infty}\cos t\,dt=\frac{1}{4}\lim_{A\to+\infty}\int_1^{A}\cos t\,dt=\frac{1}{4}\lim_{A\to+\infty}(\sin A-\sin 1).$$

Бұл шек табылмайды. Интеграл жинақсыз.

$0<n<\dfrac{1}{2}$: Интегралды қосынды түрінде жазайық.

$$F(n)=\int_1^{+\infty}\frac{\cos t}{t^{2-\frac{1}{n}}\cdot\sqrt[n]{2-\dfrac{1}{t}}}dt=\int_1^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos t}{t^{2-\frac{1}{n}}\cdot\sqrt[n]{2-\dfrac{1}{t}}}dt+\int_{\frac{\pi}{2}}^{+\infty}\frac{\cos t}{t^{2-\frac{1}{n}}\cdot\sqrt[n]{2-\dfrac{1}{t}}}dt$$

Мұнда бірінші қосылғыш меншікті интеграл болады. Екінші қосылғышты қатар түрінде жазып, 12-мысал сияқты зерттейік.

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{+\infty}\frac{\cos t}{t^{2-\frac{1}{n}}\cdot\sqrt[n]{2-\frac{1}{t}}}dt=\sum_{k=1}^{+\infty}\int_{\frac{\pi}{2}k}^{\frac{\pi}{2}(k+1)}\frac{\cos t}{t^{2-\frac{1}{n}}\cdot\sqrt[n]{2-\frac{1}{t}}}dt\le\int_{\frac{\pi}{2}k}^{\frac{\pi}{2}(k+1)}\frac{\cos t}{\left(\frac{\pi}{2}k\right)^{2-\frac{1}{n}}\cdot\sqrt[n]{2-\frac{2}{\pi k}}}dt=$$

$$=2\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{(-1)^k}{\left(\frac{\pi}{2}k\right)^{2-\frac{1}{n}}\cdot\sqrt[n]{2-\frac{2}{\pi k}}}$$

Бұл таңбасы ауыспалы қатар $n>1$ болғанда жинақталады, ал, $0<n<\frac{1}{2}$ болса жинақсыз. Сонымен, $F(n)$ интегралының жинақталу облысы: $n<0$ немесе $n>\frac{1}{2}$.

3. Эйлер интегралдары

Анықтама. $$\Gamma(p)=\int_0^{+\infty}x^{p-1}e^{-x}dx$$

функциясын *гамма-функция* деп, ал, оның мәнін эйлер интегралы деп атайды, мұндағы $0<p<+\infty$.

Анықтама. $$B(p,q)=\int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}dx$$

функциясын *бета-функция* деп, ал, оның мәнін эйлер интегралы деп атайды, мұндағы $0<p<+\infty$ және $0<q<+\infty$.

Гамма-функцияның, бета-функцияның негізгі қасиеттері

1. $\Gamma(p)$ функциясы $0<p<+\infty$ аралығында үзіліссіз;

2. $\Gamma(p+1)=p\Gamma(p)$ - келтіру формуласы (*)

3. (*) формуласын n рет қолдансақ,

$$\Gamma(p+n)=(p+n-1)(p+n-2)\ldots(p+1)p\Gamma(p) \qquad (**)$$

4. (**) формуласында $p=1$ деп алып,

$$\Gamma(1)=\int_0^{+\infty} e^{-x}dx=\lim_{A\to+\infty}\int_0^{A} e^{-x}dx=-\lim_{A\to+\infty} e^{-x}\Big|_0^A=-\lim_{A\to+\infty}\left(e^{-A}-1\right)=1$$

$$\Gamma(n+1)=n!$$

екенін ескерсек,

Егер $n=0$ болса, онда $0!=\Gamma(1)=1$.

5. (*) формуласынан $\Gamma(p)=\frac{\Gamma(p+1)}{p}\underset{p\to0}{\to}+\infty$, егер $p\to0$. Яғни, $\Gamma(0)=+\infty$.

6. $\Gamma(p)\Gamma(1-p)=\frac{\pi}{\sin(\pi\cdot p)}, \qquad (0<p<1)$ - толықтыру формуласы.

Соңғы формулада $p=\frac{1}{2}$ деп алсақ, $\left[\Gamma(\frac{1}{2})\right]^2=\frac{\pi}{\sin(\pi\cdot\frac{1}{2})}=\pi$, яғни, $\Gamma(\frac{1}{2})=\sqrt{\pi}$.

7. (*) формуласынан жартылай бүтін аргумент үшін

$$\Gamma(n+\frac{1}{2})=\Gamma\left[1+\left(n-\frac{1}{2}\right)\right]=\left(n-\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(n-\frac{1}{2}\right)=\left(n-\frac{1}{2}\right)\left(n-\frac{3}{2}\right)\Gamma\left(n-\frac{3}{2}\right)=$$

$$=\ldots=\left(n-\frac{1}{2}\right)\left(n-\frac{3}{2}\right)\ldots\frac{5}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{(2n-1)(2n-3)\ldots5\cdot3\cdot1}{2^n}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{(2n-1)!!}{2^n}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)$$

немесе $\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right)=\frac{(2n)!}{n!\cdot2^{2n}}\sqrt{\pi}$

8. $B(p+1,q)=\frac{p}{p+q}B(p,q)$

9. $B(p,q)=B(q,p)$

10. $B(p,q)=\dfrac{\Gamma(p)\cdot\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}$ - бета, гамма функциялардың арасындағы байланыс.

Мысал 8. Эйлер интегралдарын жинақтылыққа зерттеңіз:

а) $\Gamma(p)=\int\limits_0^{+\infty}x^{p-1}e^{-x}dx$ б) $B(p,q)=\int\limits_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}dx$

Шешуі. а) $(p-1)$-ң таңбасы анық болмағандықтан интегралды екі қосылғышқа жіктейміз:

$$\Gamma(p)=\int\limits_0^{+\infty}x^{p-1}e^{-x}dx=\int\limits_0^1 x^{p-1}e^{-x}dx+\int\limits_1^{+\infty}x^{p-1}e^{-x}dx$$

$\int\limits_0^1 x^{p-1}e^{-x}dx$ - 2-текті, ерекше нүктесі $x=0$ болатын меншіксіз интеграл. Интеграл астындағы функция ерекше нүктенің маңайында

$$\int\limits_0^1 x^{p-1}e^{-x}dx \underset{x\to 0}{\sim} \int\limits_0^1 \frac{1}{x^{1-p}}dx$$

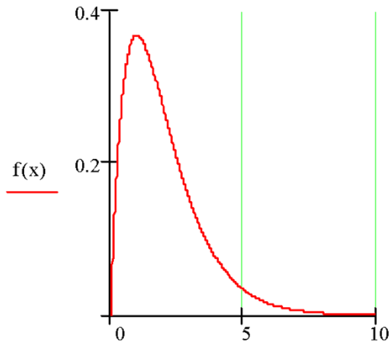
болғандықтан, бұл интеграл $1-p<1,\qquad p>0$ болса жинақталады.

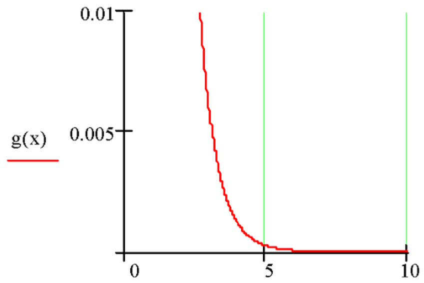
$\int\limits_1^{+\infty}x^{p-1}e^{-x}dx$ - 1-текті, ерекше нүктесі $x=+\infty$ болатын меншіксіз интеграл.

Интеграл астындағы функцияны Тейлор формуласын қолданып бағалайық:

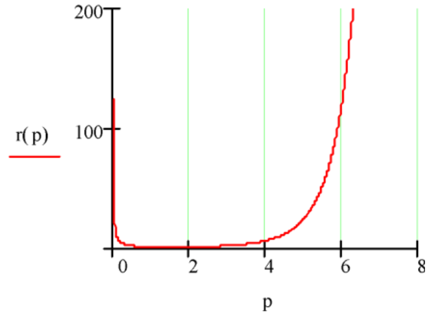
$$x^{p-1}e^{-x}=\frac{x^{p-1}}{e^x}=\frac{x^{p-1}}{1+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+...+\frac{x^n}{n!}+o\left(x^n\right)}<\frac{c}{x^2}$$

бағалауы $\forall p$ үшін орындалады, $c=const$. Ендеше, $\Gamma(p)$ функциясы $p>0$ болса жинақталады. Төменде $p=2$ және $p=-1$ болғанда: $f(x)=x\ e^{-x}$, $g(x)=x^{-2}e^{-x}$ функцияларының графиктері келтірілген:





Ал, мынау $\Gamma(p)$ функциясының графигі:



б) $$B(p,q)=\int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}dx$$

- ерекше нүктелері $x=0,\quad x=1$ болатын 2-текті меншіксіз интеграл. Оны қосынды түрінде жазайық:

$$B(p,q)=\int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}dx=\int_0^{\frac{1}{2}} x^{p-1}(1-x)^{q-1}dx+\int_{\frac{1}{2}}^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}dx$$

Бірінші қосылғыштың ерекше нүктесі $x=0$, интеграл астындағы функция

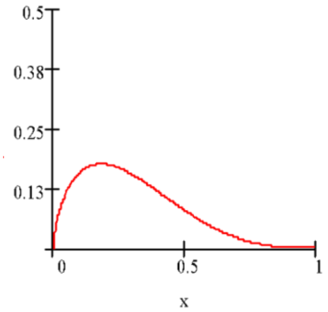
$$\int_0^{\frac{1}{2}} x^{p-1}(1-x)^{q-1}dx \underset{x\to 0}{\sim} \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{x^{1-p}}dx$$

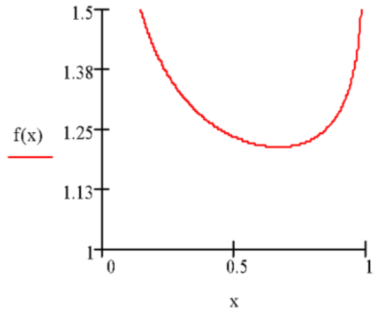
болғандықтан, бұл интеграл $\forall q$, $1-p<1,\quad p>0$ болса жинақталады. Ал, екінші қосылғыштың ерекше нүктесі $x=1$. Мұнда

$$\int_{\frac{1}{2}}^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}dx \underset{x\to 1}{\sim} \int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{1}{(1-x)^{1-q}}dx$$

болғандықтан, бұл интеграл $\forall p$, $1-q < 1$, $q > 0$ болса жинақталады. Сонымен, $B(p,q)$ функциясы $p > 0$, $q > 0$ болса жинақталады.

Төменде $f(x)=x^{p-1}(1-x)^{q-1}$ функциясының $p=\frac{1}{2}$, $q=2$ және $p=-\frac{1}{5}$, $q=-\frac{1}{10}$ болғанда графиктері келтірілген:





Ескерту 1. $\Gamma(p)$ функциясын p аргументінің теріс мәндері үшін де жалпылауға болады. $\Gamma(p)=\dfrac{\Gamma(p+1)}{p}$ теңдігінен $\Gamma(p+1)$ функциясының $-1 < p < 0$ болғанда мағынасы бар.

Егер (*) формуласында $p=-n$ деп алсақ,

$$\Gamma(-n)=\frac{\Gamma(-n+1)}{-n}=\frac{\Gamma(-n+2)}{n(n-1)}=\frac{\Gamma(-n+3)}{-n(n-1)(n-2)}=\ldots=(-1)\ \frac{\Gamma(0)}{n!}=(-1)^n\cdot\infty,$$

яғни $\Gamma(-n)=(-1)^n\cdot\infty$, $n=1,2,3,\ldots$

Егер $-n < p < -(n-1)$ болса, (**) формуласынан

$$\Gamma(p)=\frac{\Gamma(p+n)}{p(p+1)(p+2)\ldots(p+n-1)}$$

теңдігі шығады. $p+n=\alpha$ деп алсақ, соңғы теңдікті былай жазуға болады:

$$\Gamma(\alpha-n)=\frac{(-1)^n\Gamma(\alpha)}{(1-\alpha)(2-\alpha)\ldots(n-\alpha)}.$$

Ескерту 2. Толықтыру формуласында $p=\omega+\frac{1}{2}$ деп алмастырсақ,

$$\Gamma(\omega+\frac{1}{2})\cdot\Gamma\left[1-\left(\omega+\frac{1}{2}\right)\right]=\frac{\pi}{\sin\left(\frac{\pi}{2}+\omega\pi\right)}$$

немесе

$$\Gamma(\frac{1}{2}+\omega)\cdot\Gamma\left(\frac{1}{2}-\omega\right)=\frac{\pi}{\cos\omega\pi}$$

формуласын аламыз.

Мысал 9. Есептеңіз: $\Gamma(-\frac{1}{2})$.

Шешуі. $\Gamma(p)=\frac{\Gamma(p+1)}{p}$ формуласын қолданып, төмендегі теңдікті аламыз:

$$\Gamma(-\frac{1}{2})=\frac{\Gamma(-\frac{1}{2}+1)}{-\frac{1}{2}}=\frac{\Gamma(\frac{1}{2})}{-\frac{1}{2}}=-2\sqrt{\pi}.$$

Мысал 10. $I=\int_0^{+\infty}e^{-x^2}dx$ Эйлер-Пуассон интегралының мәнін есептеңіз.

Шешуі. Бұл 1-текті меншіксіз интегралдың жинақтылығы 5-мысалда көрсетілген. Енді осы интегралдың мәнін есептейік. Ол үшін

$$\int_0^{+\infty}e^{-x^n}dx$$

интегралын Эйлер интегралы арқылы өрнектейік. Мұндағы $n>0$.

$x^n=t$ алмастыруын жасайық. $dx=\frac{1}{n}t^{\frac{1}{n}-1}dt$ болғандықтан

$$\int_0^{+\infty}e^{-x^n}dx=\frac{1}{n}\int_0^{+\infty}t^{\frac{1}{n}-1}e^{-t}dt=\frac{1}{n}\Gamma(\frac{1}{n})$$

Бұл теңдіктен, $n=2$ болғанда:

$$I=\int_0^{+\infty}e^{-x^2}dx=\frac{1}{2}\Gamma(\frac{1}{2})=\frac{\sqrt{\pi}}{2}$$ аламыз.

2-тәсіл. Енді $x=\lambda t$ алмастыруын жасаймыз. Мұнда $\lambda>0$; ендеше $dx=\lambda dt$ және

$$I = \lambda \int_0^{+\infty} e^{-\lambda^2 t^2}\, dt.$$

Соңғы теңдіктің екі жағын да $e^{-\lambda^2} d\lambda$ -ге көбейтіп, теорема 6.4 қолданып, λ бойынша 0-ден $+\infty$-ке дейін интегралдасақ:

$$I \cdot \int_0^{+\infty} e^{-\lambda^2} d\lambda = I^2 = \int_0^{+\infty} e^{-\lambda^2} \cdot \lambda d\lambda \int_0^{+\infty} e^{-\lambda^2 t^2} dt$$

аламыз. Интегралдау тәртібін өзгертсек:

$$I^2 = \int_0^{+\infty} dt \int_0^{+\infty} e^{-(1+t^2)\lambda^2} \cdot \lambda d\lambda = \int_0^{+\infty} \left(-\frac{1}{2(1+t^2)} e^{-(1+t^2)\lambda^2} \right) \Bigg|_{\lambda=0}^{\lambda=+\infty} dt = \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} \frac{dt}{1+t^2} = \frac{1}{2} arctgt \Big|_0^{+\infty} = \frac{\pi}{4}$$

Яғни, $I = \dfrac{\sqrt{\pi}}{2}$.

Интеграл астындағы функцияның жұп екенін ескерсек, $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$.