Әл-Фараби атындағы Қазақ ұлттық университеті

Механика-математика факультеті

Ньютон-Рафсон әдісі және теңдеулер жүйесі

Темирбеков Нурлан Муханович ф-м.ғ.д., профессор

Жоспар

1. Ньютон-Рафсон әдісі.
2. Ньютон-Рафсон модулі.
3. Теңдеулер жүйесі.
4. Есепті шығару үлгісі.

Мақсаты

Сызықты емес теңдеулер жүйесін Ньютон-Рафсон әдісімен шешу және есептеу алгоритмін құру.

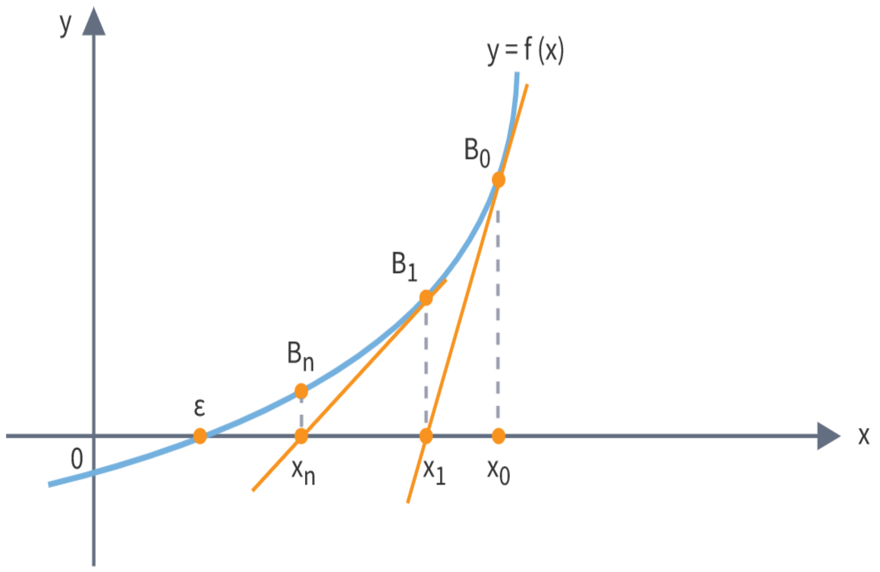
Ньютон-Рафсон әдісі

$f(x)$-тің x-ке қатысты Тейлор қатарына жіктелуі

$$f(x_{i+1}) = f(x_i) + f'(x_i)(x_{i+1} - x_i) + O(x_{i+1} - x_i)^2 \qquad (a)$$

$$0 = f(x_i) + f'(x_i)(x_{i+1} - x_i) + O(x_{i+1} - x_i)^2 \qquad (b)$$

$$x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)}{f'(x_i)} \qquad (1)$$



1-сурет. Ньютон-Рафсон формуласының графикалық интерпретациясы

x_0 бастапқы мәнінен бастап, жинақтылық критерийіне дейін

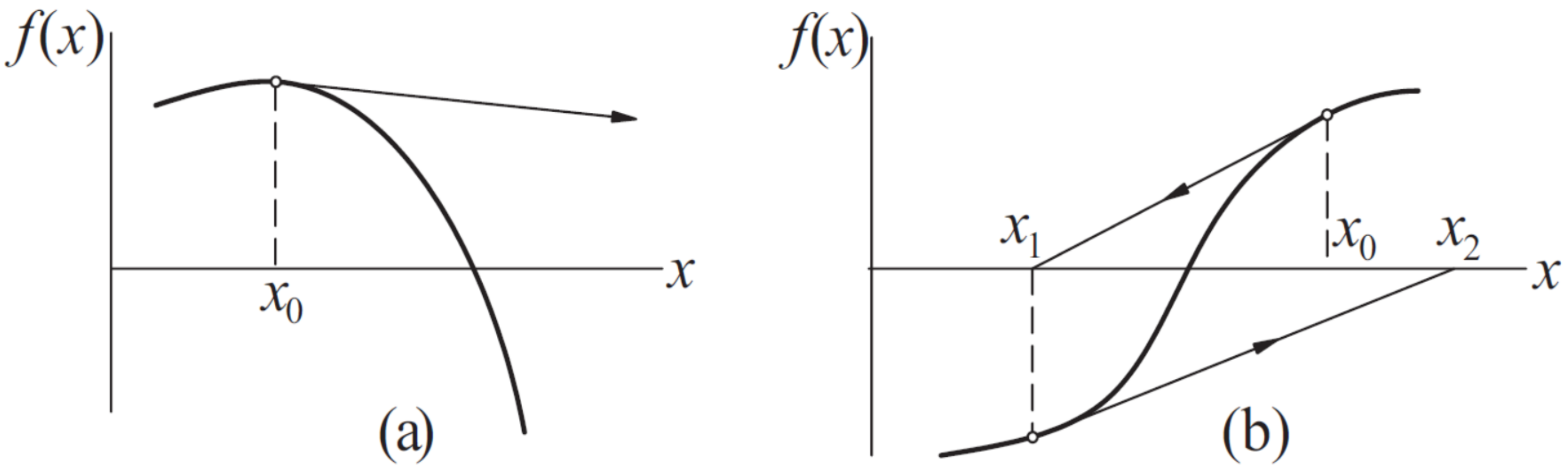
$$|x_{i+1} - x_i| < \varepsilon$$

орындалады.

Ньютон-Рафсон әдісі

Алгоритмі:

- x мәні $f(x) = 0$ түбірінің шамасы болсын.
- $|\Delta x| < \varepsilon$ дейін орындаңыз:
- $\Delta x = f(x)/f'(x)$ есептеңіз.
- $x \leftarrow x + \Delta x$ меншіктейміз.



2-сурет. Ньютон-Рафсон әдісінің жинақталмайтын мысалдары

newtonRaphson модулі

```
## module newtonRaphson
def newtonRaphson(f,df,a,b,tol=1.0e-9):
    import error
    from numpy import sign
    fa = f(a)
    if fa == 0.0: return a
    fb = f(b)
    if fb == 0.0: return b
    if sign(fa) == sign(fb):
     error.err(’Түбір аралықта емес’)
    x = 0.5*(a + b)
for i in range(30):
    fx = f(x)
    if fx == 0.0: return x
  # Түбір жақшасын тексеру
    if sign(fa) != sign(fx): b = x
    else: a = x
    # Ньютон-Рафсон қадамын қолдану
    dfx = df(x)
    # Егер нөлге бөлінсе,
    # x ті шегінен шығарыңыз
    try: dx = -fx/dfx
    except ZeroDivisionError: dx = b - a
    x = x + dx
if (b - x)*(x - a) < 0.0:
      dx = 0.5*(b - a)
      x = a + dx
     # Жинақтылыққа тексеріңіз
    if abs(dx) < tol*max(abs(b),1.0):
        return x
```

Теңдеулер жүйесі

Сызықты емес теңдеулер жүйесі

$$
\begin{aligned}
f_1(x_1, x_2, \dots, x_n) &= 0 \\
f_2(x_1, x_2, \dots, x_n) &= 0 \\
&\vdots \\
f_n(x_1, x_2, \dots, x_n) &= 0
\end{aligned}
$$

Тейлор қатарына жіктеуі

$$f_j(x + \Delta x) = f_j(x) + \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f_i}{\partial x_j} \Delta x_j + O(\Delta x^2) \qquad (2a)$$

немесе

$$f(x + \Delta x) = f(x) + J(x)\Delta x \qquad (2b)$$

$$J_{ij} = \frac{\partial f_i}{\partial x_j}$$ якобиандық матрица

$$\frac{\partial f_i}{\partial x_j} \approx \frac{f_i(x + e_j h) - f_i(x)}{h} \qquad (3)$$ ақырлы айырымдық жуықтау

Ньютон-Рафсон әдіс алгоритмі

1) x жуықтау векторын таңдау.
2) $|\Delta x| < \varepsilon$ дейін орындаңыз.
3) (3) өрнегімен $J(x)$ матрицасын есептеңіз.
4) Δx үшін $J(x)\Delta x = -f(x)$ шешімін табыңыз.
5) $x \leftarrow x + \Delta x$ болсын.

Әдіске жақсы бастапқы нүкте қолданылса,
шешімге жақындау өте жылдам болады.

newtonRaphson2 модулі

```
## module newtonRaphson2
import numpy as np
from gaussPivot import *
import math

def newtonRaphson2(f,x,tol=1.0e-9):

    def jacobian(f,x):
        h = 1.0e-4
        n = len(x)
        jac = np.zeros((n,n))
        f0 = f(x)
        for i in range(n):
            temp = x[i]
            x[i] = temp + h
            f1 = f(x)
            x[i] = temp
            jac[:,i] = (f1 - f0)/h
        return jac,f0

    for i in range(30):
        jac,f0 = jacobian(f,x)
        if math.sqrt(np.dot(f0,f0)/len(x)) < tol: return x
        dx = gaussPivot(jac,-f0)
        x = x + dx
        if math.sqrt(np.dot(dx,dx)) <
                tol*max(max(abs(x)),1.0):
            return x
```

Есепті шығару үлгісі

Екі бүтін санның қатынасы ретінде $\sqrt{2}$ тізбектес жуықтауларын алу үшін Ньютон-Рафсон әдісін қолданыңыз.

Шешуі: $f(x) = x^2 - 2 = 0$

Ньютон-Рафсон формуласы

$$x \leftarrow x - \frac{f(x)}{f'(x)} = x - \frac{x^2 - 2}{2x} = \frac{x^2 + 2}{2x}$$

$x = 1$-ден итерацияны бастау

$$x \leftarrow \frac{(1)^2 + 2}{2 \cdot 1} = \frac{3}{2}$$

$$x \leftarrow \frac{(3/2)^2 + 2}{2 \cdot (3/2)} = \frac{17}{12}$$

$$x \leftarrow \frac{(17/12)^2 + 2}{2 \cdot (17/12)} = \frac{577}{408}$$

Нәтижесі: $x = 577/408 = \mathbf{1.1414216}$ мәні $\sqrt{2} = \mathbf{1.1414214}$

Қорытынды

1. Ньютон-Рафсон формуласы.
2. Ньютон-Рафсон модулі.
3. Теңдерлер жүйесін шешу.
4. Python тілінде теңдеуді шешу мысалы.

Пайдаланылған әдебиеттер тізімі

1. Jaan Kiusalaas. Numericalmethods in engineering with Python. Cambridge University Press. ISBN 978-1-107-03385
2. Вабищевич П.Н. Численные методы: Вычислительный практикум. — М.: Книжный дом «ЛИБРОКОМ», 2010. — 320 с.
3. Киреев В. И., Пантелеев А. В. Численные методы в примерах и задачах: Учебное пособие. — СПб.: Издательство «Лань», 2015. — 448 с.