Лекция 4. Условия независимости криволинейного интеграла второго рода на плоскости от пути интегрирования. Формула Ньютона-Лейбница для криволинейного интеграла. Вычисление криволинейного интеграла от полного дифференциала. Восстановление функции $F(x, y)$ по ее полному дифференциалу

Условия независимости криволинейного интеграла второго рода на плоскости от пути интегрирования

Пусть в некоторой области D в плоскости O заданы непрерывные функции $P(x, y)$ и $Q(x, y)$. Рассмотрим криволинейный интеграл второго рода общего вида

$$I = \int\limits_{AB} P(x, y)dx + Q(x, y)dy \tag{4.1}$$

где AB – произвольная кусочно гладкая кривая, целиком лежащая в D и соединяющая точки A и B этой области. Выясним условия, при которых значение такого интеграла зависит лишь от точек A и B и не меняется при изменении кривой, связывающей точки A и B (в таком случае обычно говорят, что интеграл не зависит от пути интегрирования).

Теорема 4.1. *Для того чтобы значение криволинейного интеграла* (4.1) *в области D не зависело от пути интегрирования, необходимо и достаточно, чтобы для любого кусочно гладкого контура L в D выполнялось равенство*

$$\oint\limits_{L} P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0. \tag{4.2}$$

□ *Необходимость.* Предположим, что значение криволинейного интеграла (4.1) не зависит от пути интегрирования. Произвольный контур L, целиком лежащий в D, двумя лобыми точками A и B разделим на две кривые AM_1B и AM_2B (рис. 1). Тогда, исходя из предположения, можно записать (аргументы у подынтегральных функций здесь и далее для краткости опущены)

$$\int\limits_{AM_1B} Pdx + Qdy = \int\limits_{AM_2B} Pdx + Qdy.$$

Отсюда, учитывая свойства криволинейного интеграла второго рода (см.

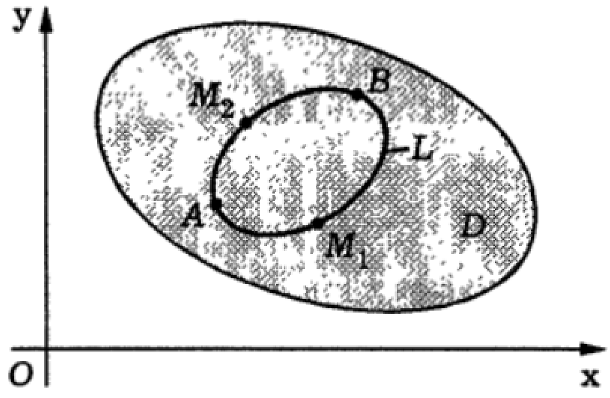

Рис. 1

Лекция 2), получаем

$$\oint\limits_L Pdx + Qdy = \int\limits_{AM_1B} Pdx + Qdy + \int\limits_{BM_2A} Pdx + Qdy =$$

$$= \int\limits_{AM_1B} Pdx + Qdy - \int\limits_{AM_2B} Pdx + Qdy = 0.$$

Достаточность. Пусть равенство (4.2) выполнено для любого контура L, целиком лежащего в области D. Выберем произвольные точки A и B в D и соединим их двумя различными кривыми AM_1B и AM_2B, целиком лежащими в D. Из этих кривых можно составить контур L (см. рис. 1). В силу предположения и свойства 4° криволинейного интеграла второго рода (см. Лекция 2) имеем

$$\oint\limits_L Pdx + Qdy = \int\limits_{AM_1B} Pdx + Qdy + \int\limits_{BM_2A} Pdx + Qdy = 0.$$

Так как при изменении направления обхода кривой криволинейный интеграл второго рода меняет знак (см. Лекция 2), из последнего равенства следует, что

$$\int\limits_{AM_1B} Pdx + Qdy = \int\limits_{AM_2B} Pdx + Qdy.$$

Поскольку точки A и B, а также две связывающие их кривые были выбраны произвольно, заключаем, что криволинейный интеграл в области D не зависит от пути интегрирования. ■

Пусть в области D криволинейный интеграл второго рода от функций $P(x,y)$ и $Q(x,y)$ не зависит от пути интегрирования. Тогда его значение определяется лишь начальной точкой A и конечной точкой B пути интегрирования. Учитывая это, такой интеграл записывают в виде

$$\int\limits_A^B P(x,y)dx + Q(x,y)dy,$$

рассматривая точки A и B как нижний и верхний пределы интегрирования.

Зафиксируем точку $A \in D$. Тогда криволинейный интеграл от точки A до произвольной точки $M(x;y)$ определяет в области D функцию

$$F(x,y) = \int\limits_A^{(x;y)} P(x,y)dx + Q(x,y)dy. \tag{4.3}$$

С помощью этой функции значение криволинейного интеграла можно вычислить для любой пары точек $M_1\left(x_1;y_1\right)$ и $M_2\left(x_2;y_2\right)$ в D, а именно

$$\int\limits_{(x_1;y_1)}^{(x_2;y_2)} P(x,y)dx + Q(x,y)dy = F\left(x_2,y_2\right) - F\left(x_1,y_1\right). \tag{4.4}$$

Действительно, путь интегрирования от точки M_1 до точки M_2 можно выбрать так, что он будет проходить через точку А. Тогда в силу свойства аддитивности интеграл можно представить как сумму двух интегралов, первый - от точки M_1 до точки A, а второй - от точки A до точки M_2. Значение первого интеграла с учетом направления будет равно $-F\left(x_1,y_1\right)$, значение второго - $F\left(x_2,y_2\right)$.

Формулу (4.4) по аналогии с определенным интегралом часто называют **формулой Ньютона - Лейбница для криволинейного интеграла**.

Теорема 4.2. *Если функции $P(x,y)$ и $Q(x,y)$ непрерывны в области D, а криволинейный интеграл второго рода от этих функций в области D не зависит от пути, то функция $F(x,y)$, определяемая равенством (4.3), имеет в D непрерывные частные производные, причем*

$$\frac{\partial F(x,y)}{\partial x} = P(x,y), \quad \frac{\partial F(x,y)}{\partial y} = Q(x,y), \quad (x;y) \in D.$$

□ Пусть $M(x;y)$ - произвольная точка области D. Выберем $\delta > 0$ настолько малое, что δ-окрестность точки M целиком попадает в область D. Для произвольного приращения Δx, удовлетворяющего неравенству $|\Delta x| < \delta$, согласно формуле Ньютона - Лейбница, имеем

$$F(x+\Delta x, y) - F(x,y) = \int\limits_{(x;y)}^{(x+\Delta x;y)} P(x,y)dx + Q(x,y)dy,$$

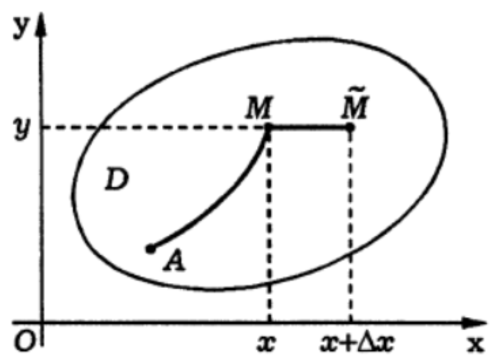

Рис. 2

причем в качестве пути интегрирования в последнем интеграле можно взять горизонтальный отрезок, соединяющий точки $M(x;y)$ и $\widetilde{M}(x+\Delta x;y)$ (рис. 2). В этом случае $dy \equiv 0$, переменное y имеет постоянное значение, и мы получаем

$$\int\limits_{(x;y)}^{(x+\Delta x;y)} P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \int\limits_{x}^{x+\Delta x} P(\xi,y)d\xi$$

где последний интеграл есть определенный интеграл по отрезку $[x, x+\Delta x]$. Итак, функция $\varphi(\Delta x) = F(x+\Delta x, y) - F(x,y)$ переменного Δx представлена как определенный интеграл с переменным верхним пределом, причем подынтегральная функция является непрерывной в точке $\xi = x$. Поэтому функция $\varphi(\Delta x)$ дифференцируема при $\Delta x = 0$ и $\varphi'(0) = P(x,y)$. Но последнее равенство и означает, что в точке $M(x;y)$ функция $F(x,y)$ имеет частную производную по переменному x, равную $P(x,y)$.

Аналогичным образом, используя приращение Δy по переменному y, можно показать, что в точке M функция $F(x,y)$ имеет также и частную производную по переменному y, равную $Q(x,y)$. ■

Теорема 4.3. *Пусть функции $P(x, y)$ и $Q(x, y)$ непрерывны вместе со своими частными производными в некоторой односвязной области D в плоскости xOy. Тогда следующие четыре условия эквивалентны:*
(1) выражение $P(x, y)dx + Q(x, y)dy$ является в области D полным дифференциалом некоторой функции $F(x, y)$;
(2) всюду в области D верно равенство

$$\frac{\partial P(x, y)}{\partial y} = \frac{\partial Q(x, y)}{\partial x} \tag{4.5}$$

(3) для лобого кусочно гладкого контура L, целиком лежащего в области D, верно равенство

$$\oint\limits_L P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0.$$

(4) криволинейный интеграл второго рода от функций $P(x, y)$ и $Q(x, y)$ в области D не зависит от пути интегрирования.

$\square$ Докажем эту теорему "вкруговую".

$\triangle$ Покажем, что (1) $\Rightarrow$ (2). Пусть

$$P(x, y)dx + Q(x, y)dy = dF(x, y). \tag{4.6}$$

Тогда имеем

$$\frac{\partial F(x, y)}{\partial x} = P(x, y) \quad \text{и} \quad \frac{\partial F(x, y)}{\partial y} = Q(x, y).$$

Следовательно,

$$\frac{\partial P(x, y)}{\partial y} = \frac{\partial^2 F(x, y)}{\partial y \partial x} \quad \text{и} \quad \frac{\partial Q(x, y)}{\partial x} = \frac{\partial^2 F(x, y)}{\partial x \partial y}.$$

В силу непрерывности частных производных $\dfrac{\partial P}{\partial y}$ и $\dfrac{\partial Q}{\partial x}$ правые части последних равенств равны между собой, так как непрерывные смешанные производные не зависят от порядка дифференцирования. Поэтому равны и левые части этих равенств, т.е. выполнено условие (2). $\blacktriangle$

$\triangle$ Покажем, что (2) $\Rightarrow$ (3). Пусть L – произвольный кусочно гладкий контур, целиком лежащий в области D. Согласно формуле Грина для односвязной области,

$$\oint\limits_L P(x, y)dx + Q(x, y)dy = \iint\limits_D \left(\frac{\partial Q(x, y)}{\partial x} - \frac{\partial P(x, y)}{\partial y} \right) dxdy = 0,$$

так как в силу второго условия теоремы подынтегральная функция в двойном интеграле тождественно равна нулю. Итак, доказано, что выполнено условие (3). ▲

△ (3) $\Longleftrightarrow$ (4) в силу теоремы 4.1. ▲

△ Покажем, что (4) $\Rightarrow$ (1). Пусть выполнено условие (4). Согласно теореме 4.2, функция $F(x, y)$, определяемая равенством (4.3), имеет непрерывные частные производные, равные $P(x, y)$ и $Q(x, y)$. Но тогда эта функция дифференцируема, а ее дифференциал имеет вид

$$dF(x, y) = P(x, y)dx + Q(x, y)dy.$$

Это доказывает, что условие (1) выполнено. ▲

Теорема доказана. ■

Теорема 4.3 дает не только несколько критериев независимости криволинейного интеграла от пути, но и метод, позволяющий восстановить функцию $F(x, y)$ по ее дифференциалу $P(x, y)dx + Q(x, y)dy$. Выражение $P(x, y)dx + Q(x, y)dy$ называют дифференциальной формой. В теореме 4.3 сформулированы условия, при которых дифференциальная форма является дифференциалом некоторой функции двух переменных.

Вычисление криволинейного интеграла от полного дифференциала

В односвязной плоской области D криволинейный интеграл второго рода

$$I = \int\limits_{AB} P(x, y)dx + Q(x, y)dy$$

не зависит от пути интегрирования, если подынтегральное выражение является дифференциалом некоторой функции $F(x, y)$. Если функции $P(x, y)$ и $Q(x, y)$ имеют в D непрерывные частные производные, то, согласно теореме 4.3, для независимости криволинейного интеграла от пути интегрирования необходимо и достаточно, чтобы выполнялось равенство

$$\frac{\partial P(x, y)}{\partial y} = \frac{\partial Q(x, y)}{\partial x}, \quad (x; y) \in D.$$

Напомним, что для криволинейных интегралов, не зависящих от пути, используют специальное обозначение

$$I = \int\limits_{A(x_A;y_A)}^{B(x_B;y_B)} P(x, y)dx + Q(x, y)dy.$$

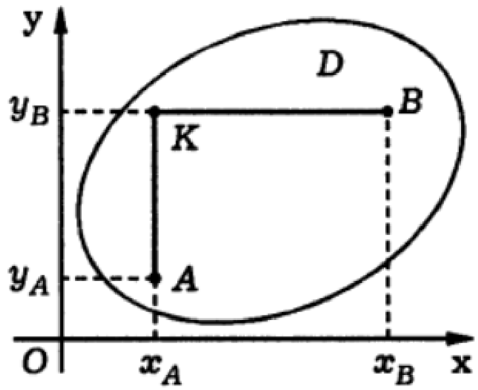

Рис. 3

Основная идея в вычислении таких интегралов состоит в выборе наиболее простого пути интегрирования. Как правило, в этом случае в качестве пути интегрирования выбирают ломаную AKB, состоящую из двух отрезков прямых, параллельных координатным осям (рис. 3). Если такой путь интегрирования целиком попадает в область D, то в соответствии со свойством 4° криволинейного интеграла второго рода (см. Лекция 2) можно написать

$$\int\limits_{AB} P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \int\limits_{AK} Q\left(x_A, y\right)dy + \int\limits_{KB} P\left(x, y_B\right)dx = \\ = \int\limits_{y_A}^{y_B} Q\left(x_A, y\right)dy + \int\limits_{x_A}^{x_B} P\left(x, y_B\right)dx,$$

поскольку при интегрировании по отрезку AK имеем $x = x_A = \text{const}$, $dx \equiv 0$ и $y_A \le y \le y_B$, а при интегрировании по отрезку KB имеем $y = y_B = \text{const}$, $dy \equiv 0$ и $x_A \le x \le x_B$. Таким образом, получаем формулу

$$\int\limits_{(x_A;y_A)}^{(x_B;y_B)} P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \int\limits_{y_A}^{y_B} Q\left(x_A, y\right)dy + \int\limits_{x_A}^{x_B} P\left(x, y_B\right)dx, \tag{4.7}$$

которую удобно использовать для вычисления криволинейного интеграла второго рода от полного дифференциала в плоской односвязной области D.

Криволинейный интеграл, не зависящий от пути, можно вычислять и с помощью формулы Ньютона-Лейбница для криволинейного интеграла. Это удобно в случае, когда легко найти функцию $F(x,y)$, дифференциалом которой является подынтегральное выражение. Отметим, что на практике часто решают обратную задачу: с помощью криволинейного интеграла определяют функцию $F(x, y)$.

Пример 4.1. Вычислим криволинейный интеграл второго рода

$$I = \int\limits_{(1;1)}^{(3;3)} ydx + xdy.$$

△ В этом случае легко сразу указать функцию $F(x, y) = xy$, для которой подынтегральное выражение является полным дифференциалом. Действительно,

$$dF(x, y) = \frac{\partial F}{\partial x}dx + \frac{\partial F}{\partial y}dy = ydx + xdy.$$

Используя формулу Ньютона-Лейбница, получаем

$$I = xy\Big|_{(1;1)}^{(3;3)} = 9 - 1 = 8. \quad \blacktriangle$$

Пример 4.2. Вычислим криволинейный интеграл второго рода

$$I = \int\limits_{(-2;-1)}^{(3;0)} \left(5x^4 + 4xy^3\right) dx + \left(6x^2y^2 - 5y^4\right) dy.$$

△ В данном случае $P(x, y) = 5x^4 + 4xy^3$ и $Q(x, y) = 6x^2y^2 - 5y^4$. Нетрудно убедиться, что условие $\dfrac{\partial P}{\partial y} = \dfrac{\partial Q}{\partial x}$ выполнено на всей плоскости O, т.е. подынтегральное выражение является полным дифференциалом некоторой функции $F(x, y)$. Однако, в отличие от примера 4.1, найти эту функцию "с ходу" не удается. Поэтому прибегаем к непосредственному вычислению интеграла, выбирая путь интегрирования, проходящий сначала вдоль прямой $x = -2$, а затем вдоль прямой $y = 0$. Используя формулу (4.7), находим

$$I = \int\limits_{-1}^{0} \left(6(-2)^2y^2 - 5y^4\right) dy + \int\limits_{-2}^{3} 5x^4dx =$$

$$= \left(8y^3 - y^5\right)\Bigg|_{-1}^{0} + x^5\Bigg|_{-2}^{3} = 8 - 1 + 243 + 32 = 282. \quad \blacktriangle$$

Восстановление функции $F(x,y)$ по ее полному дифференциалу

Рассмотрим более подробно задачу восстановления функции $F(x,y)$ по ее полному дифференциалу $dF(x,y)=P(x,y)dx+ +Q(x,y)dy$. Ясно, что решение такой задачи может быть найдено с точностью до постоянного слагаемого. Применяя формулу Ньютона - Лейбница для криволинейного интеграла в случае фиксированной точки ($x_0;y_0$) и переменной точки $(x;y)$, заключаем, что

$$F(x,y)=F\left(x_0,y_0\right)+\int\limits_{(x_0;y_0)}^{(x;y)} P(x,y)dx+Q(x,y)dy$$

Поскольку искомую функцию можно изменить добавлением произвольной постоянной, то

$$F(x,y)=C+\int\limits_{(x_0;y_0)}^{(x;y)} P(x,y)dx+Q(x,y)dy, \quad C=\text{const}. \tag{4.8}$$

Для вычисления криволинейного интеграла в правой части (4.8), как и выше, можно выбрать наиболее удобный путь интегрирования. Например, можно вэять двузвенную ломаную из отрезков прямых, параллельных координатным осям. Тогда (4.8) преобразуется либо в равенство

$$F(x,y)=C+\int\limits_{x_0}^{x} P\left(x,y_0\right)dx+\int\limits_{y_0}^{y} Q(x,y)dy, \tag{4.9}$$

если движение из начальной точки идет по горизонтальному отрезку, либо в равенство

$$F(x,y)=C+\int\limits_{y_0}^{y} Q\left(x_0,y\right)dy+\int\limits_{x_0}^{x} P(x,y)dx, \tag{4.10}$$

если начальное движение идет по вертикальному отрезку. В качестве фиксированной точки $(x_0;y_0)$ можно выбрать любую точку области D.

Пример 4.3. Найдем при помощи криволинейного интеграла второго рода функцию $F(x,y)$, если

$$dF(x,y)=\left(3x^2-2xy+y^2\right)dx-\left(x^2-2xy+3y^2\right)dy.$$

$\triangle$ Сначала необходимо убедиться в том, что функция $F(x, y)$ существует. Непосредственной проверкой условия (4.5) убеждаемся, что выражение $\left(3x^2 - 2xy + y^2\right) dx - \left(x^2 - 2xy + 3y^2\right) dy$ на всей плоскости является полным дифференциалом.

Полагая, что $x_0 = y_0 = 0$ в равенстве (4.9), получаем

$$F(x, y) = C + \int_0^x 3x^2 dx - \int_0^y \left(x^2 - 2xy + 3y^2\right) dy =$$

$$= C + x^3 - x^2 y + xy^2 - y^3.$$

Если же использовать формулу (4.10) при том же предположении $x_0 = y_0 = 0$, получим тот же результат:

$$F(x, y) = C - \int_0^y 3y^2 dy + \int_0^x \left(3x^2 - 2xy + y^2\right) dx =$$

$$= C - y^3 + x^3 - x^2 y + xy^2. \quad \blacktriangle$$

Вопросы для закрепления

1. Что означает независимость криволинейного интеграла второго рода от пути интегрирования?
2. Какое условие необходимо для независимости криволинейного интеграла второго рода от пути интегрирования?
3. Как записывается формула Ньютона-Лейбница для криволинейного интеграла?
4. В чем заключается метод восстановления функции $F(x, y)$ по ее полному дифференциалу?
5. Каковы эквивалентные условия для того, чтобы выражение $P(x, y)dx + Q(x, y)dy$ было полным дифференциалом?
6. Что следует из условия $\dfrac{\partial P}{\partial y} = \dfrac{\partial Q}{\partial x}$ в односвязной области?
7. Какую роль играет односвязность области при независимости криволинейного интеграла второго рода от пути?

8. Какой метод можно использовать для вычисления криволинейного интеграла от полного дифференциала в односвязной области?
9. Как определяется функция $F(x, y)$ через интегрирование по пути для восстановления по полному дифференциалу?
10. Как можно проверить, является ли выражение полным дифференциалом в данной области?