КОМПЬЮТЕРНОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ТЕХНИЧЕСКИХ ЗАДАЧ

Лектор: Болегенова Салтанат Алихановна
+7 701 386 97 55
e-mail.: Saltanat.Bolegenova@kaznu.kz

КОМБИНИРОВАННЫЕ СХЕМЫ

Цель лекции - В комбинированных схемах для различных членов уравнения выбираются разные аппроксимации: явные, неявные, симметричные, односторонние.

Например, можно использовать схему, в которой для конвективного члена используется явная односторонняя аппроксимация, а для диффузионного – неявная симметричная аппроксимация с весовым коэффициентом $\lambda = \frac{1}{2}$:

$$\frac{f_{i,n+1} - f_{i,n}}{\Delta t} + u\frac{f_{i,n} - f_{i-1,n}}{\Delta x} =$$
$$= a\frac{f_{i+1,n+1} + f_{i-1,n+1} - 2f_{i,n+1}}{2\Delta x^2} + a\frac{f_{i+1,n} + f_{i-1,n} - 2f_{i,n}}{2\Delta x^2}.$$

В целом такая схема является неявной, и, следовательно, абсолютно устойчивой. Это видно из шаблона.

Т.к. для $n = 1$ значение $n-1$ не определено, то избежать этого можно следующим образом. Положим в выражении (**) *c=1, d=1/2* – предельные условия устойчивости. Тогда:

$$f_{i,n+1} = \frac{1}{2}\left(f_{i-1,n} + f_{i-1,n}\right) = f_{i-1,n},$$

т.о., значение на слое $n = 2$ определяется по формуле: $f_{i,2} = f_{i-1,1}$, а для всех остальных n действует выражение (**).

Достоинства схемы «чехарда»:

1) она имеет второй порядок точности по всем переменным,

2) с помощью метода фон Неймана можно получить, что для этой схемы является $c \le 1$.

Сведем конечно-разностное уравнение (1) к дифференциальному уравнению путем разложения в ряд Тейлора:

1) $$f_{i,n+1} = f_{i,n} + \frac{\partial f}{\partial t}\Delta t + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial t^2}\Delta t^2,$$

$$f_{i,n-1} = f_{i,n} - \frac{\partial f}{\partial t}\Delta t + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial t^2}\Delta t^2,$$

$$f_{i,n+1} - f_{i,n-1} = 2\frac{\partial f}{\partial t}\Delta t,$$

$$f_{i,n+1}+f_{i,n-1}=2f_{i,n}+\frac{\partial^2 f}{\partial t^2}\Delta t^2,$$

2) $$f_{i+1,n}=f_{i,n}+\frac{\partial f}{\partial x}\Delta x+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\Delta x^2,$$

$$f_{i-1,n}=f_{i,n}-\frac{\partial f}{\partial x}\Delta x+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\Delta x^2,$$

$$f_{i+1,n}-f_{i-1,n}=2\frac{\partial f}{\partial x}\Delta x,$$

$$f_{i+1,n}+f_{i-1,n}=2f_{i,n}+\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\Delta x^2.$$

Подставим эти выражения в (1):

$$\frac{\partial f}{\partial t}+u\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{a}{\Delta x^2}\left(\underline{2f_{i,n}}+\frac{\partial f}{\partial x^2}\Delta x^2-\underline{2f_{i,n}}-\frac{\partial^2 f}{\partial t^2}\Delta t^2\right),$$

$$\frac{\partial f}{\partial t}+u\frac{\partial f}{\partial x}=a\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}-a\left(\frac{\Delta t}{\Delta x}\right)^2\frac{\partial^2 f}{\partial t^2}.$$

Получили, что конечно-разностная схема ”чехарда“ аппроксимирует не исходное дифференциальное уравнение, а уравнение со второй производной по времени, член $\alpha_{аппр.}=a\left(\frac{\Delta t}{\Delta x}\right)^2\frac{\partial^2 f}{\partial t^2}$ есть ошибка аппроксимации.

Конечно-разностная схема аппроксимирует исходное данное уравнение только в том случае, если $a\left(\frac{\Delta t}{\Delta x}\right)^2\frac{\partial^2 f}{\partial t^2}\to 0$ или, что одно и то же, $\frac{\Delta t}{\Delta x}\to 0$. Т.е. не просто $\Delta t\to 0$, $\Delta x\to 0$, а Δt и Δx стремятся к нулю так, что $\frac{\Delta t}{\Delta x}\to 0$, (т.е. $\Delta t\to 0$ быстрее чем Δx).

Практически сходимость проверяется следующим образом: решение пересчитывается с вдвое меньшим шагом. В данном случае при уменьшении Δx в 2 раза, Δt надо уменьшить не менее чем, в 4 раза.

Пусть $d=\frac{1}{2}$ и $c=0$ (отсутствует конвекция). Тогда уравнение (1) имеет вид:

$$f_{i,n+1}=f_{i,n-1}+2d\left(f_{i+1,n}+f_{i-1,n}-f_{i,n+1}-f_{i,n+1}\right).$$

При $d=\frac{1}{2}$:

$$f_{i,n+1}=\underline{f_{i,n-1}}+f_{i+1,n}+f_{i-1,n}-f_{i,n+1}-\underline{f_{i,n-1}},$$

$$f_{i,n+1} = 2d\left(f_{i+1,n} + f_{i-1,n}\right).$$

Теперь обратимся к уравнению с разностями вперед по времени и центральными разностями по пространственным переменам:

$$f_{i,n+1} = f_{i,n} + d\left(f_{i+1,n} + f_{i-1,n} - 2f_{i,n}\right).$$

При $d = \frac{1}{2}$:

$$f_{i,n+1} = \underline{f_{i,n}} + \frac{1}{2}\left(f_{i+1,n} + f_{i-1,n}\right) - \underline{f_{i,n}}\,,$$

$$f_{i,n+1} = \frac{1}{2}\left(f_{i+1,n} + f_{i-1,n}\right).$$

Т.о. при $d = \frac{1}{2}$ эти две схемы совпадают. Однако при $d \neq \frac{1}{2}$ эти две схемы, полученные по ним результаты и свойства устойчивости оказывается различными.

Для стационарного уравнения ($при \ \frac{\partial f}{\partial t} = 0$) выражение для схемной вязкости имеет вид:

$$a_c = \frac{1}{2} u \Delta x\ .$$

Рассмотрим теперь применение схемы “явный уголок” к данному уравнению для плоского двумерного нестационарного течения, учитывающему не только конвекцию, но и диффузию. Это уравнение имеет вид:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + u\frac{\partial f}{\partial x} + \vartheta\frac{\partial f}{\partial y} = a\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right).$$

Пусть $u \succ 0, \quad при \quad \vartheta \succ 0$. Тогда схема “явной уголок” имеет вид:

$$\frac{f_{i,j}^{n+1} - f_{i,j}^{n}}{\Delta t} + u\frac{f_{i,j}^{n} - f_{i-1,j}^{n}}{\Delta x} + \vartheta\frac{f_{i,j}^{n} - f_{i,j+1}^{n}}{\Delta y} =$$

$$= a\left(\frac{f_{i+1,j}^{n} + f_{i-1,j}^{n} - 2f_{i,j}^{n}}{\Delta x^2} + \frac{f_{i,j+1}^{n} + f_{i,j-1}^{n} - 2f_{i,j}^{n}}{\Delta y^2}\right).$$

Разложение в ряд Тейлора дает:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + u\frac{\partial f}{\partial x} + \vartheta\frac{\partial f}{\partial y} = (a + a_{cx})\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + (a + a_{cy})\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\,,$$

где $a_{cx} = \frac{1}{2} u \Delta x (1 - C_x)$, $C_x = \frac{u \Delta t}{\Delta x}$,

$$a_{cy} = \frac{1}{2}\vartheta\,\Delta y(1 - C_y)\,,\; C_y = \frac{\vartheta\Delta t}{\Delta y}\,.$$

Из этих формул следует, что влияние схемной искусственной вязкости минимально, если C_x , C_y близки к единице, однако на практике невозможно добиться, чтобы C_x и C_y одновременно были =1 во всех областях течения. Поэтому схемная вязкость обязательно будет входить в расчеты.

Точное решение невозможно до тех пор, пока не выполнено условие $a_c \prec\prec a$. На практике это условие часто не очень жесткое. Например, для уравнений пограничного слоя:

$\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} \prec\prec 1,\; \vartheta \prec\prec 1 \Rightarrow a_c \prec\prec 1$, тогда уравнение (2) имеет вид:

$\dfrac{\partial f}{\partial t} + u\dfrac{\partial f}{\partial x} + \vartheta\dfrac{\partial f}{\partial y} = a\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}$, оно практически не зависит a_{cx} , a_{cy} .

Достоинства схемы «явный уголок»:

1) Хотя эта схема первого порядка точности, она для уравнений в консервативной форме значительно точнее, чем схема второго порядка для уравнений в консервативной форме.
2) В отличие от схемы «чехарда» эта схема при расчетах требует на один массив меньше, т.е. более экономична при испытании памяти ЭВМ.

Контрольные вопросы:

1. Как находят ошибку аппроксимации?
2. Какая КРС называется аппроксимирующей?
3. Какая КРС называется сходящейся?
4. Из-за чего возникает неустойчивость?
5. Напишите число Куранта.
6. Напишите диффузионное число.
7. Напишите условие устойчивости КРС.