

УТВЕРЖДЕНО
на заседании Ученого совета
НАО «КазНУ им. аль-Фараби»
Протокол № 11 от 23.05.2025 г.

**Программа вступительного экзамена
для поступающих в докторантуру
на группу образовательных программ
D092 – «Математика және статистика»**

I. Общие положения

1. Программа составлена в соответствии с Приказом Министерства образования и науки Республики Казахстан от 31 октября 2018 года № 600 «Об утверждении Типовых правил приема на обучение в организации образования, реализующие образовательные программы высшего и послевузовского образования» (далее – Типовые правила).

2. Вступительный экзамен в докторантуру состоит из собеседования, написания эссе и экзамена по профилю группы образовательных программ.

Блок	Баллы
1. Собеседование	30
2. Эссе	20
3. Экзамен по профилю группы образовательной программы	50
Всего/проходной	100/75

3. Продолжительность вступительного экзамена - 3 часа 10 минут, в течение которых поступающий пишет эссе, отвечает на электронный экзаменационный билет. Собеседование проводится на базе вуза до вступительного экзамена.

II. Порядок проведения вступительного экзамена

1. Поступающие в докторантуру на группу образовательных программ D092 – «Математика және статистика» пишут проблемное / тематическое эссе. Объем эссе – не менее 250 слов.

Цель эссе – определить уровень аналитических и творческих способностей, выраженных в умении выстраивать собственную аргументацию на основе теоретических знаний, социального и личного опыта.

Виды эссе:

- мотивационное эссе с раскрытием побудительных мотивов к исследовательской деятельности;
- научно-аналитическое эссе с обоснованием актуальности и методологии планируемого исследования;
- проблемное/тематическое эссе, отражающее различные аспекты научного знания в предметной области.

2. Электронный экзаменационный билет состоит из 3 вопросов.

Темы для подготовки к экзамену по профилю группы образовательной программы:

Дисциплина «Математический анализ»

Числовые последовательности. Верхний и нижний пределы. Теорема Больцано-Вейерштрасса и критерий Коши для числовых последовательностей. Предел функций, непрерывность и равномерная непрерывность функций. Теорема Вейерштрасса о равномерной непрерывной на замкнутом отрезке. Производная и дифференциал функции одной переменной. Связь между ними. Инвариантность формы первого дифференциала. Понятие обратной функции и постановка вопроса. Доказать простейший вариант теоремы существования обратной функции. Дифференцирование обратной функции одной переменной, производные обратных тригонометрических функций. Функция многих переменных. Кратный и повторные пределы. Связь между ними. Частные производные. Дифференциал функции многих переменных. Дифференцируемость функций многих переменных. Дифференцирование сложной функции многих переменных. Понятие неявной функции и постановка вопроса. Общая теорема о неявной и обратной функций. Якобиан. Замена переменных в кратном интеграле. Формула Грина для двукратного интеграла. Поверхностные интегралы. Основные теоремы интегрального исчисления.

Дисциплина «Функциональный анализ»

Метрическое, линейное нормированное, банахово и гильбертовопространства. Примеры метрического, нормированного, банахова и гильбертова пространств. Последовательности и свойствасходящихся последовательностей в метрических и линейных нормированных пространствах. Непрерывные отображения в метрическом пространстве. Непрерывность и компактность в метрических пространствах. Принцип сжимающих отображений в метрическом пространстве. Общий вид линейного ограниченного функционала в гильбертовом пространстве. Теорема Рисса. Измеримые множества и их свойства. Измеримые функции и их свойства. Интеграл Лебега. Различие между интегралами Лебега и Римана. Пространства $L_p(\Omega)$ и их свойства. Линейные операторы в банаховых и гильбертовых пространствах. Ограниченные операторы, неограниченные операторы, замкнутые операторы. Норма оператора.

Дисциплина «Теория вероятностей и стохастический анализ»

Общее вероятностное пространство. Классическое и геометрическое определение вероятностей. Условная вероятность. Формула произведения вероятностей. Независимые события, независимые испытания. Формула полной вероятности. Формула Байеса. Случайные величины. Законы распределения случайных величин. Математическое ожидание случайных величин. Дисперсия. Повторные независимые испытания. Формулы Бернулли. Общее определение случайного процесса и конечномерные распределения случайного процесса. Винеровский процесс. Конечномерные распределения винеровского процесса и характеристическое свойство винеровского процесса. Корреляционная функция случайного процесса. Свойства.

Дисциплина «Алгебра и геометрия»

Понятия алгебраической структуры. Гомоморфизмы и изоморфизмы алгебраической структур. Группа автоморфизмов алгебраической структур. Примеры. Полугруппы. Моноиды. Обратимые элементы. Группы. Циклические группы. Изоморфизмы. Теорема Кэли. Гомоморфизмы. Ядро и образ гомоморфизма. Связь с нормальными подгруппами.

Смежные классы. Индексы. Теорема Лагранжа и ее следствия. Кольцо. Делители нуля. Сравнения. Кольцо классов вычетов. Гомоморфизмы колец. Поле. Характеристика поля. Конечные поля. Построение поля Галуа. Отношения. Отношения эквивалентности, свойства классов эквивалентности. Отношение частичного порядка. Линейный порядок. Наименьший, наибольший, минимальный и максимальный элементы. Доказать, что в конечном частично упорядоченном множестве всегда есть минимальный элемент. Принцип Дирихле. Формула включения и исключения. Число элементов в декартовом произведении конечного числа конечных множеств.

Дисциплина «Дифференциальные уравнения и уравнения математической физики»

Теоремы существования и единственности решения задачи Коши для обыкновенных дифференциальных систем уравнений первого порядка. Однородное линейное обыкновенное дифференциальное уравнение n -го порядка с переменными коэффициентами. Фундаментальная система решений. Неоднородное линейное обыкновенное дифференциальное уравнение n -го порядка с постоянными коэффициентами. Системы однородных линейных обыкновенных дифференциальных уравнений, свойства решений. Формула Остроградского-Лиувилля. Постановка краевых задач для линейного обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка. Задача Штурма-Лиувилля. Теоремы существования и единственности решения Штурма-Лиувилля. Существование собственных значений краевых задач для линейного обыкновенного дифференциального уравнения. Определение функции Грина для задачи Штурма-Лиувилля и ее существование. Решение краевых задач для обыкновенного дифференциального уравнения с помощью функции Грина. Неоднородные системы линейных дифференциальных уравнений. Метод вариации произвольных постоянных (Метод Лагранжа). Классификация и приведение к каноническому виду уравнений в частных производных второго порядка в случае многих переменных. Задача Коши для уравнения параболического типа. Фундаментальное решение оператора теплопроводности. Объемный тепловой потенциал, поверхностный тепловой потенциал и их основные свойства. Задача Коши для уравнения гиперболического типа. Понятие характеристики для уравнения гиперболического типа. Метод продолжения. Постановка и основные методы решения краевых задач для уравнения эллиптического типа. Пример Адамара о некорректности задачи Коши для уравнения Лапласа. Метод разделения переменных. Общая схема метода Фурье. Задача на собственные значения и собственные функции для оператора Штурма-Лиувилля. Метод Фурье для решения смешанных задач для уравнений параболического и гиперболического типов. Цилиндрические функции. Уравнение Бесселя. Функции Бесселя. Задачи Дирихле и Неймана для уравнения Лапласа и Пуассона. Функция Грина для задачи Дирихле, её свойства. Решение краевой задачи для уравнения Пуассона с помощью функции Грина. Вариация и ее свойства. Уравнение Эйлера. Основная лемма вариационного исчисления. Задача о брахистохроне. Простейшая задача вариационного исчисления с подвижными границами. Условие трансверсальности. Достаточные условия достижения функционалом экстремума. Условие Лежандра. Вариационные задачи на условный экстремум. Понятие связей. Сведение к задаче на безусловный экстремум. Множители Лагранжа. Теорема Вейерштрасса в банаховом пространстве

III. Список использованных источников

Основная:

1. В.А. Ильин, Э.Г. Позняк. Основы математического анализа. Часть I. М.: «Наука» 1982. 616 С.
2. В.А. Ильин, Э.Г. Позняк. Основы математического анализа. Часть II. М.: «Наука» 1980. 447 С.
3. Темиргалиев Н.Т., Математикалық анализ, т. I-III, 1987,1991 ж.ж.
4. Ибрашев Х.И., Еркеғұлов Ш.Т. Математикалық анализ курсы. Алматы. Мектеп, Т.1,2. 1963-1970.
5. В.А. Зорич, Математический анализ, Часть I, II. 2017г.
6. Кудрявцев Л.Д., Курс математического анализа, в 3 томах, 2006.
7. Наурызбаев Қ.Ж., Нақты анализ, Алматы, “Қазақ университеті”,2004.
8. Колмогоров А.Н., Фомин С.В., Элементы теории функций и функционального анализа,М.:Наука,1989
9. Люстерник Л.А.,Соболев В.И. Краткий курс функционального анализа.- М.:”Высшая школа”, 1982
10. Треногин В.А. Функциональный анализ.- М.:Наука,1967.
11. Шабат Б.В. Введение в комплексный анализ. Часть 1. М.: Наука, 1985.
12. Кангужин Б.Е. Теория функций комплексного переменного. Алматы. Қазақ университеті, 2007.
13. Н.Ш. Кремер. Теория вероятностей и математическая статистика. М.: “ЮНИТИ”, 2000. 544 с.
14. Гнеденко Б.В. Курс теории вероятностей и математическая статистика. – М.: Изд. МГУ, 2006.
15. Н. Ақанбай. Ықтималдықтар теориясы (I – бөлім) – Алматы.: “Қазақ университеті”, 2001. 296 бет.
16. Н. Ақанбай Ықтималдықтар теориясының есептері мен жаттығуларының жинағы – Алматы.: “ Қазақ университеті”, 2004. 377 бет.
17. Н.Ақанбай. Ықтималдықтар теориясы (3-бөім). Алматы.: «Қазақ уни верситеті», 2007, 297 бет.
18. Н.Ақанбай. Ықтималдықтар теориясының есептері мен жаттығуларының жинағы (3бөлім). Алматы.: «Қазақ университеті», 2007, 256 бет.
19. С.А. Бадаев. Сызықтық алгебра және аналитикалық геометрия. Том 2: Сызықтық алгебра. Алматы: «Издательство LEM» ЖШС, 2014. 416 бет.
20. А.И. Кострикин. Введение в алгебру. Часть III. (Основные структуры). М.: Физматлит, 2001. 271 С.
21. Isaiah Lankham, Bruno Nachtergaele, Anne Schilling. Linear Algebra Abstract Mathematics. Copyright с 2007 by the authors. pp. 246. As an Introduction to
22. С.А. Бадаев. Сызықтық алгебра және аналитикалық геометрия. Том 1,2: Алматы: LEM, 2014. 416 бет.
23. П.Т. Досанбай. Математикалық логика. Алматы.: «Дәуір» 2011. 280 бет.
24. W.J. Gilbert, W.K. Nickolson. Modern algebra with applications, 2nd ed. Willey, 2004.
25. Тайманов И.А., Лекции по дифференциальной геометрии, 2002.
26. Сүлейменов Ж. Дифференциалдық теңдеулер курсы, Оқулық. Алматы, Қазақ университеті, 2009.- 440 б.
27. Н.М.Матвеев. Методы интегрироваия обыкновенных дифференциальные уравнений» 4-е изд .Минск: «Высшая школа». 1974. 768 С.
28. Л.Э.Эльсгольц. Дифференциальные уравнения и вариационное исчисление. М.: Наука. 1969. 425 С.

29. Петровский И.Г. Лекции по теории обыкновенных дифференциальных уравнений, М., 1970.
30. Понтрягин Л.С. Обыкновенные дифференциальные уравнения. М., 1974.
31. Краснов М.Л., Киселев А.И., Макаренко Г.И. Обыкновенные дифференциальные уравнения. Задачи и примеры с подробными решениями. М.: УРСС, 2005.- 256 с.
32. Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики.– М.: Наука, 1983.
33. Токибетов Ж.А., Хайруллин Е.М. Математикалық физика тендеулері, оқулық. - Астана, Астана полиграфия, 2010. 376 б.
34. Гельфанд И.М., Фомин С.В. Вариационное исчисление. – М., 1961
35. Айсағалиев С.А. Лекции по оптимальному управлению. – Алматы, 2007.
36. Васильев Ф.П. Лекции по методам решения экстремальных задач. – М., 1974.

Дополнительная:

1. Треногин В.А., Писаревский Б.М., Соболева Т.С. Задачи и упражнения по функциональному анализу. - М.:Наука,1984.
2. Иосида К., Функциональный анализ. - М.: “Мир”, 1967.
3. Канторович Л.В., Акилов Г.П Функциональный анализ. - М.: Наука,1984.
4. Садовничий В.А. Теория операторов. -М. ”Высшая школа”, 2000.
5. Натансон И.П., Теория функций вещественной переменной, М.: Гостехиздат, 1957.
6. Севастьянов Б.А. Теория вероятностей и математическая статистика. М.: «Наука», 1982. 256 с.,
7. Гнеденко Б.В. Курс теории вероятностей и математическая статистика. М.: «ЮНИТИ», 1988. 448 с.,
8. Агапов Г.И. Задачник по теории вероятностей. М.: “Высшая школа”, 1985. 112 с.
9. В.А. Колемаев, О.В. Староверов, В.Б. Турундаевский Теория вероятностей и математическая статистика – М.: “Высшая школа”, 1991. 400 с.
10. Н. Аканбай, З.И. Сүлейменова, С.Қ. Тәпеева Ықтималдықтар теориясы және математикалық статистикадан тест сұрақтары, Алматы, “Қазақ университеті”, 2005 ж., 254 бет.
11. Владимиров В.С., Жаринов В.В. Уравнения математической физики: Учебник для вузов. 2-е изд. - М.: Физматлит, 2003.
12. Хомпыш Х. Математикалық физика тендеулері. Оқу құралы. -Алматы: Қазақ университеті, 2017 ж.
13. Краснов, М.Л. Обыкновенные дифференциальные уравнения М.: УРСС, 2002.- 253 с.
14. Федорюк, М.В. Обыкновенные дифференциальные уравнения :Изд. 3-е, стер.- СПб.: Лань, 2003.- 447 стр.
15. Филиппов, А.Ф. Сборник задач по дифференциальным уравнениям :Изд. 2-е.- М.: Изд-во ЛКИ, 2008.- 235 с.
16. В.А. Ильин, Э.Г. Позняк. Линейная алгебра. М.: «Наука» 1984. 294 С.
17. В.А. Ильин, Э.Г. Позняк. Аналитическая геометрия. М.: «Наука» 1971. 232 С.