

ЛЕКЦИЯ-6

§4.3. Фредгольмнің анықтауыштар әдісі

Осы ғасырдың басында Фредгольм өз атымен аталатын

$$\varphi(x) = \lambda \int_a^b K(x,s)\varphi(s)ds + f(x) \quad (52)$$

теңдеуінің ядросы $K(x,s) \in C[a,b]$, бос мүшесі $f(x) \in C[a,b]$ және параметрі λ -ның әртүрлі болатын жағдайларын терең зерттеп, осы (52) теңдеу үшін негізгі теоремаларды дәлелдеген. Сол маңызды зерттеулердің нәтижесінің негізінде Фредгольмнің анықтауыштар әдісі деп аталып кеткен әдісті қарастырайық.

$[a,b]$ сегментін ұзындықтары $\delta = \frac{b-a}{n}$ болатындай тең n бөліктерге бөліп, (52) теңдеуіндегі интегралды интегралдық қосындылармен ауыстырады. Нәтижеде берілген теңдеуге жуық

$$\varphi(x) = \lambda \sum_{j=1}^n K(x,s_j)\varphi(s_j)\delta + f(x)$$

теңдеуін аламыз, мұнда s_j -бөлік интервалдар орталарының абциссалары.

Бұл теңдеуге $x = x_1, x_2, \dots, x_n$ мәндерін қойып және әрбір бөлік интервалдарда $\varphi(x)$ пен $f(x)$ сәйкес түрде $\varphi(x_i), f(x_i)$ тұрақты мәндеріне тең болсын, ал $K(x,s)$ ядросы индекстері i мен j болған квадраттарда $K(x_i, s_j)$ тұрақты болсын десек, нәтижеде $\varphi(s_j)$ белгісіздері үшін

$$\varphi(s_i) = \lambda \sum_{j=1}^n K(x_i, s_j)\varphi(s_j)\delta + f(x_i), \quad i=1,2,\dots,n \quad (53)$$

алгебралық теңдеулер жүйесін аламыз.

Сонымен осы теңдеулер жүйесін шешіп, белгісіз $\varphi(x)$ функциясын бөлек-бөлек тұрақты мәнді $\varphi_n(x)$ -функциялары мен жуықтаймыз. Мұндағы n қаншалықты үлкен болса, жуықтау тізбегі $\varphi_n(x)$ $\varphi(x)$ -ті соншалықты дәл аппроксимациялайды, яғни $\varphi_n(x) - \varphi(x)$ айырымдары өте аз шама болады. Егер $n \rightarrow \infty$ болса, (53) теңдеулерінің жүйесі (52) теңдеуін береді, ал $\varphi_n(x)$ тізбегінің шегі $\varphi(x)$ функциясына тең болатыны анық. Фредгольм осы қағиданы пайдаланып, (52) интегралдық теңдеуінің шешімін тапқан, яғни (53) теңдеулері жүйесін шешіп, содан соң оның шегін тапқан.

Ыңғайлы болуы үшін $\varphi_i = \varphi(s_i)$, $K_{ij} = K(x_i, s_j)$, $f_i = f(x_i)$ деп белгілейік. (53) жүйенің анықтауышы

$$D_n(\lambda) = \begin{vmatrix} 1 - \lambda \delta K_{11} & -\lambda \delta K_{12} & \dots & -\lambda \delta K_{1n} \\ -\lambda \delta K_{21} & 1 - \lambda \delta K_{22} & \dots & -\lambda \delta K_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ -\lambda \delta K_{n1} & -\lambda \delta K_{n2} & \dots & 1 - \lambda \delta K_{nn} \end{vmatrix}$$

λ параметріне байланысты көпмүшелік. Тейлор формуласын пайдаланып, $D_n(\lambda)$ анықтауышын жіктейміз.

$$\begin{aligned} D_n(\lambda) = & 1 - \frac{\lambda}{1!} \sum_{p_1=1}^n K_{p_1 p_1} \delta + \frac{\lambda^2}{2!} \sum_{p_1=1}^n \sum_{p_2=1}^n \begin{vmatrix} K_{p_1 p_1} & K_{p_1 p_2} \\ K_{p_2 p_1} & K_{p_2 p_2} \end{vmatrix} \delta^2 + \dots + \\ & + (-1)^n \frac{\lambda^n}{n!} \sum_{p_1, p_2, \dots, p_n=1}^n \begin{vmatrix} K_{p_1 p_1} & K_{p_1 p_2} & \dots & K_{p_1 p_n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ K_{p_n p_1} & K_{p_n p_2} & \dots & K_{p_n p_n} \end{vmatrix} \delta^n, \end{aligned} \quad (54)$$

мұндағы

$$\int_a^b K(t, t) dt \Rightarrow \sum_{p_1=1}^n K_{p_1 p_1} \delta = \sum_{i=1}^n K(x_i, x_i) \delta$$

Риманның интегралдық қосындысы екені анық. Сондықтан,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{p_i=1}^n K_{p_i p_i} \delta = \int_a^b K(t, t) dt.$$

Дәл осылай

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{p_1=1}^n \sum_{p_2=1}^n \begin{vmatrix} K_{p_1 p_1} & K_{p_1 p_2} \\ K_{p_2 p_1} & K_{p_2 p_2} \end{vmatrix} \delta^2 = \int_a^b \int_a^b \begin{vmatrix} K(t_1, t_1) & K(t_1, t_2) \\ K(t_2, t_1) & K(t_2, t_2) \end{vmatrix} dt_1 dt_2$$

және жалпы жағдайда

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{p_1, p_2, \dots, p_n=1}^n \begin{vmatrix} K_{p_1 p_1} & \dots & K_{p_1 p_n} \\ \dots & \dots & \dots \\ K_{p_n p_1} & \dots & K_{p_n p_n} \end{vmatrix} \delta^n = \int_a^b \dots \int_a^b \begin{vmatrix} K(t_1, t_1) & \dots & K(t_1, t_n) \\ \dots & \dots & \dots \\ K(t_n, t_1) & \dots & K(t_n, t_n) \end{vmatrix} dt_1 \dots dt_n.$$

Демек, (54) қатары $n \rightarrow \infty$ жағдайда

$$D(\lambda) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\lambda^n}{n!} d_n \quad (55)$$

λ бойынша дәрежелік қатар болады, мұндағы,

$$d_n = \int_a^b \dots \int_a^b \begin{vmatrix} K(t_1, t_1) & \dots & K(t_1, t_n) \\ \dots & \dots & \dots \\ K(t_n, t_1) & \dots & K(t_n, t_n) \end{vmatrix} dt_1 \dots dt_n$$

(55) қатарының жинақтылығын Адамар теңсіздігін пайдаланып дәлелдейміз.

Лемма (Адамар). Егер

$$A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

анықтаушының элементтері шектелген, яғни $|a_{ij}| \leq M$ болса, онда

$$|A| \leq M^n \sqrt{n^n}.$$

Бұл теңсіздік Адамар теңсіздігі деп аталады.

Егер $K(x, s)$ ядросы $|K(x, s)| \leq M$ теңсіздігін қанағаттандырса, онда Адамар теңсіздігін пайдалансақ, (55) қатары үшін

$$1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|\lambda|^n}{n!} M^n \sqrt{n^n} (b-a)^n$$

можаранттық қатар болады. Бұл можаранттық қатар λ -нің кез келген мәні үшін жинақты. Жаңа z_i белгісізін $\varphi_i = f_i + z_i$ ($i=1, 2, \dots, n$) өрнегімен енгізейік. Сонда (53) жүйесінен

$$z_i - \delta \lambda \sum_{j=1}^n K_{ij} z_j = \lambda \delta \sum_{j=1}^n K_{ij} f_j \quad (i=1, 2, \dots, n) \quad (56)$$

теңдеулер жүйесін аламыз. Мұны Крамер әдісі бойынша шешіп,

$$z_i = \frac{\lambda \delta}{D_n(\lambda)} \sum_{j=1}^n D_{ij}(\lambda) f_j \quad (i=1, 2, \dots, n)$$

екенін анықтаймыз, мұндағы, $D_{ij}(\lambda)$ параметр λ бойынша $n-1$ дәрежелі көпмүшелік. Демек, (53) жүйесі шешімін

$$\varphi_i(x) = f_i(x) + \frac{\lambda}{D_n(\lambda)} \delta \sum_{j=1}^n D_{ij}(\lambda) f_j(x) \quad (i=1, 2, \dots, n)$$

түрінде өрнектеуге болады. Осы теңдікте $n \rightarrow \infty$ жағдайда жоғарыдағы (52) интегралдық теңдеуінің шешімін

$$\varphi(x) = f(x) + \frac{1}{D(\lambda)} \int_a^b D(x, s; \lambda) f(s) ds$$

анықтаймыз, мұндағы, белгісіз $D(x, s; \lambda)$ функциясы дәрежелік қатар болғандықтан,

$$D(x, s; \lambda) = d_0(x, s) + (-1)\lambda d_1(x, s) + \dots + \frac{(-1)^n \lambda^n}{n!} d_n(x, s) + \dots \quad (57)$$

түрінде іздейміз. $D(x, s; \lambda)$ өрнегіндегі $d_n(x, s)$ коэффициенттерін анықтау үшін (56) жүйенің шешімін

$$z_i = \lambda \delta \sum_{j=1}^n R_{ij}(\lambda) f_j \quad (i=1, 2, \dots, n)$$

түрінде жазамыз, мұндағы,

$$R_{ij}(\lambda) = \frac{1}{D_n(\lambda)} D_{ij}(\lambda) \quad (i, j = 1, 2, \dots, n). \quad (58)$$

(56) мен алдыңғы теңдіктерге $f_1 = f_2 = \dots = f_n = 0$, ал $f_j = 1$ деп алсақ,

$$z_i - \lambda \delta \sum_{j=1}^n K_{ij} z_j = \lambda \delta \sum_{j=1}^n K_{ij} \quad (i=1, 2, \dots, n),$$

$$z_i = \lambda \delta R_{ij} \quad (i=1, 2, \dots, n).$$

Осы соңғы теңдіктерден z_i айнымалысын шығарып тастасақ, онда, R_{ij} үшін

$$R_{ij}(\lambda) = K_{ij} + \lambda \delta \sum_{m=1}^n K_{im} R_{mj}(\lambda) \quad (i=1, 2, \dots, n)$$

теңдігі шығады. Енді бұл теңдікте $n \rightarrow \infty$ жағдайда шекке көшсек, онда

$$R(x, s; \lambda) = K(x, s) + \lambda \int_a^b K(x, t) R(t, s; \lambda) dt$$

теңдеуін аламыз. Мұндағы, $R(x, s; \lambda)$ болса $K(x, s)$ ядросының резольвента-
тасы. Ал бұл өрнекті $R(s, x; \lambda)$ үшін интегралдық теңдеу деп атайды.

Егер (58) теңдікте $n \rightarrow \infty$ болса,

$$R(x, s; \lambda) = \frac{1}{D(\lambda)} D(x, s; \lambda)$$

екенін анықтаймыз, мұндағы, $D(x, s; \lambda)$ мен $D(\lambda)$ Фредгольм анықтауыштары деп аталады. Соңғы теңдіктерден

$$D(x, s; \lambda) = K(x, s)D(\lambda) + \lambda \int_a^b K(x, t)D(t, s; \lambda)dt.$$

Енді $D(\lambda)$ мен $D(x, s; \lambda)$ -лардың (55) пен (57) түріндегі жіктелген мәндерін соңғы теңдікке қойып, λ -нің бірдей дәрежелерінің коэффициенттерін салыстырсақ,

$$\begin{aligned} d_0(x, s) &= K(x, s), d_1(x, s) = K(x, s)d_1 - \int_a^b K(x, t)d_0(t, s)dt, \dots, \\ d_n(x, s) &= K(x, s)d_n - n \int_a^b K(x, t)d_{n-1}(t, s)dt, \dots, n = 2, 3, \dots \end{aligned} \quad (59)$$

рекуренттік өрнектерді аламыз.

Бұл (59) өрнектер бойынша (57) қатарының белгісіз $d_n(x, s)$ коэффициенттерін есептеуге болады. $d_n(x, s)$ коэффициенттерін есептеп табу үшін (59) формуласын пайдаланып, мына формулаларды аламыз:

$$\begin{aligned} d_1(x, s) &= K(x, s)d_1 - \int_a^b K(x, t)d_0(t, s)dt = K(x, s) \int_a^b K(t_1, t_1)dt_1 - \\ &- \int_a^b K(x, t_1)K(t_1, s)dt_1 = \int_a^b \begin{vmatrix} K(x, s) & K(x, t_1) \\ K(t_1, s) & K(t_1, t_1) \end{vmatrix} dt_1, \\ d_2(x, s) &= K(x, s)d_2 - 2 \int_a^b K(x, t_1)d_1(t_1, s)dt_1 = \int_a^b \int_a^b \begin{vmatrix} K(x, s) & K(x, t_1) & K(x, t_2) \\ K(t_1, s) & K(t_1, t_1) & K(t_1, t_2) \\ K(t_2, s) & K(t_2, t_1) & K(t_2, t_2) \end{vmatrix} dt_1 dt_2, \dots, \\ d_n(x, s) &= \int_a^b \int_a^b \dots \int_a^b \begin{vmatrix} K(x, s) & K(x, t_1) & \dots & K(x, t_n) \\ K(t_1, s) & K(t_1, t_1) & \dots & K(t_1, t_n) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ K(t_n, s) & K(t_n, t_1) & \dots & K(t_n, t_n) \end{vmatrix} dt_1 dt_2 \dots dt_n. \end{aligned}$$

Осы өрнектердегі анықтауыштарға Адамар теңсіздігін пайдаланып,

$$|d_n(x, s)| \leq M^{n+1} (n+1)^{\frac{n+1}{2}} (b-a)^n$$

екенін көреміз. Бұл теңсіздікті пайдаланып, (57) қатарының кез келген λ үшін жинақтылығын, яғни $D(x, s; \lambda)$ -нің λ -ға қатысты бүтін функция екенін

көрсету қиын емес. Енді d_n мен $d_n(x, s)$ өрнектерінен шығатын кейбір салдарларды көрсетейік.

1⁰. Аталған теңдіктерден

$$d_{n+1} = \int_a^b d_n(s, s) ds \quad (n=0, 1, 2, \dots) \quad (60)$$

екенін оңай көреміз.

2⁰. (59) бен (60) рекуренттік өрнектер (55) пен (57) қатарларының коэффициенттері d_n мен $d_n(x, s)$ -терді біртіндеп анықтау мүмкіндігін береді.

3⁰. Егер (57) теңдігінде $x = s$ деп алып, одан кейін оның екі жағын да s бойынша a -дан b -ға дейін интегралдасақ,

$$\int_a^b D(s, s; \lambda) ds = d_1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\lambda^n}{n!} d_{n+1}$$

өрнегін аламыз, бұдан (55) теңдігін пайдалансақ,

$$D'(\lambda) = - \int_a^b D(s, s; \lambda) ds.$$

Сонымен Фредгольм резольвентасы

$$R(x, s; \lambda) = \frac{1}{D(\lambda)} D(x, s; \lambda)$$

$f(x)$ функциясына тәуелді емес, бүтін аналитикалық функциялардың қатынасына тең, яғни λ бойынша мероморфты функция болады.

1 теорема. $D(\lambda)$ функциясының кез келген λ_0 түбірі резольвентаның полюсі болады.

λ_0 саны $D(\lambda)$ көпмүшелігінің k еселі түбірі, яғни

$$D(\lambda) = (\lambda - \lambda_0)^k D_0(\lambda), \quad D_0(\lambda_0) \neq 0.$$

Ал $D'(\lambda)$ үшін λ_0 саны $k-1$ еселі түбір. Енді λ_0 саны $D(x, s; \lambda)$ үшін l еселі түбір делік, яғни $D(x, s; \lambda) = (\lambda - \lambda_0)^l D(x, s; \lambda)$, $D(x, s; \lambda_0) \neq 0$ болсын.

Жоғарыдағы (60) формуланы пайдаланып,

$$D'(\lambda) = -(\lambda - \lambda_0)^l \int_a^b D_0(s, s; \lambda) ds$$

екенін көреміз. Бұл теңдеуден $l \leq k-1$ екенін байқаймыз. Сондықтан λ_0 саны резольвентаның полюсі болады.

Ядроның резольвентасы бар болатындай λ саны регуляр сан, ал резольвентасы жоқ болатындай λ сандары меншікті мәндері (сандары) деп аталады. Меншікті сандар резольвентаның полюстерімен сай келеді немесе $D(\lambda)$ көпмүшелігінің түбірлері ($D(\lambda)$ бүтін функция болғандықтан түбірлері санақты жиыннан көп емес). Сонымен мына тұжырым орынды.

2 теорема. Егер $K(x, s)$ Фредгольмнің интегралдық теңдеуінің үзіліссіз ядросы болса, онда ол ядроның меншікті мәндері шексіздікте шоғырланатын санаулы жиыннан аспайды.

Мысалдар.

1. Фредгольмнің анықтауыштарын пайдаланып, $K(x, s) = \cos x - \cos s$, $(0 \leq x, s \leq 2\pi)$ ядросының резольвентасын анықтау керек.

Шешуі. $D(\lambda)$ -ны табайық. Ол үшін $D(\lambda) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\lambda^n}{n!} d_n$ екенін ескерейік, мұндағы,

$$d_1 = \int_0^{2\pi} (\cos t - \cos s) ds = 0, \quad d_2 = \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \begin{vmatrix} 0 & \cos t_1 - \cos t_2 \\ \cos t_2 - \cos t_1 & 0 \end{vmatrix} dt_1 dt_2 = 4\pi^2,$$

$$d_3 = 0, d_4 = 0, \dots$$

Сондықтан $D(\lambda) = 1 + \frac{1}{2!} (4\pi^2) \lambda^2 = 1 + 2\pi^2 \lambda^2$ олай болса,

$$D(x, s; \lambda) = K(x, s) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} d_n(x, s) \lambda^n,$$

ал

$$d_1(x, s) = \int_0^{2\pi} \begin{vmatrix} \cos x - \cos s & \cos x - \cos t_1 \\ \cos t_1 - \cos s & \cos t_1 - \cos t_1 \end{vmatrix} dt_1 = \pi(1 + 2\cos x \cos s),$$

$$d_2(x, s) = 0, d_3(x, s) = 0, \dots$$

Демек,

$$D(x, s; \lambda) = \cos x - \cos s - \lambda \pi(1 + \cos x \cos s),$$

$$R(x, s; \lambda) = \frac{1}{1 + 2\lambda^2 \pi^2} [\cos x - \cos s - \lambda \pi(1 + \cos x \cos s)].$$

2. Рекуренттік қатыстарды пайдаланып, $K(x, t) = 1 + xt$, $(0 \leq x, t \leq 1)$ ядросының резольвентасын есептейік.

Шешуі.

$$d_1 = \int_0^1 d_0(s, s) ds = \int_0^1 (1 + s^2) ds = \frac{4}{3},$$

$$d_1(x, t) = \frac{4}{3}(1 + xt) + \int_0^1 (1 + xt)(1 + st) ds = \frac{1}{3} - \frac{x+t}{2} + xt,$$

$$d_2 = \int_0^1 d_1(s, s) ds = \int_0^1 \left[\left(\frac{1}{3} \right) + s + s^2 \right] ds = \frac{1}{6},$$

$$d_2(x, t) = \frac{1}{6}(1 + xt) + \left(1 - \frac{s+t}{2} + st \right) + \dots = 0,$$

$$d_3 = 0, d_3(x, t) = 0, \dots$$

Сондықтан

$$D(\lambda) = 1 - \left(\frac{4}{3} \right) \lambda + \frac{\lambda^2}{12}, D(x, t, \lambda) = 1 + xt - \lambda \left(\frac{1}{3} \right) - \left(\frac{x+t}{2} + xt \right),$$

$$R(x, t, \lambda) = \frac{1 + xt - \lambda \left[\left(\frac{1}{3} \right) - \left(\frac{x+t}{2} \right) + xt \right]}{1 - \left(\frac{4}{3} \right) \lambda + \left(\frac{\lambda^2}{12} \right)}.$$

3. Фредгольмнің анықтауыштарын пайдаланып,

$$\varphi(x) = \lambda \int_0^1 (2x - t) \varphi(t) dt + \frac{x}{6}$$

интегралдық теңдеуінің шешімін табайық.

Шешуі. Алдымен $D(\lambda)$ мен $D(x, s; \lambda)$ көпмүшеліктерін анықтаймыз:

$$d_1 = \int_0^1 (2s - s) ds = 0,5, d_1(x, s) = 0,5(2x - s) - \int_0^1 (2x - s)(2s - t) dt =$$

$$= 1,5 - x - s + 2xs;$$

$$d_2(x, s) = \frac{1}{3}(2x - s) - 2 \int_0^1 (2x - t) \left(\frac{3}{2} - s - t + 2ts \right) dt = 0;$$

$$d_3 = 0, d_3(x, s) = 0, \dots$$

Демек,

$$D(\lambda) = 1 - 0,5\lambda + \left(\frac{\lambda}{6} \right)^2, D(x, s; \lambda) = 2x - s - \lambda \left[\frac{3}{2} - x - s + 2xs \right].$$

Егер $\lambda^2 - 3\lambda + 6 = 0$ болса, онда $\lambda = \frac{3 \pm \sqrt{-15}}{2}$. Сонымен берілген теңдеудің шешімі

$$\varphi(x)=\frac{x}{6}+\lambda\int\limits_0^1\left[(2x-t)+\frac{\lambda\left[\frac{3}{2}-x-t+2xt\right]}{1-0,5\lambda+\frac{1}{6}\lambda^2}\cdot\frac{t}{6}\right]dt=\frac{1}{6}\left[x+\frac{(6x+2)\lambda-\lambda^2x}{\lambda^2-3\lambda+6}\right],$$

$$\lambda\neq\frac{3\pm\sqrt{-15}}{2}.$$