Лекция 4. Фундаментальные последовательности. Критерий Коши. Подпоследовательности, частичные пределы. Верхний и нижний пределы последовательности, их свойства. Теорема Больцано-Вейерштрасса. Критерии сходимости последовательности

Подпоследовательности

Пусть задана последовательность $\{x_n\}$. Если мы выберем из нее некоторые члены (бесконечно много в порядке возрастания номеров), то получим подпоследовательность последовательности $\{x_n\}$. Именно, зададим строго возрастающую последовательность номеров $n_k (k = 1, 2, \ldots)$. Тогда последовательность $\{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ называется подпоследовательностью последовательности $\{x_n\}$. Подпоследовательность x_{n_k} является функцией натурального аргумента k, т.е. каждому натуральному k ставится в соответствие элемент x_{n_k} последовательности $\{x_n\}$. Например, если $x_n = \dfrac{1 + (-1)^n}{2}$, т.е. исходная последовательность $0, 1, 0, 1, \ldots$, то выбирая $n_k = 2k$, т.е. выбирая все элементы последовательности с четными номерами, получим подпоследовательность $x_{2k} = 1 (k = 1, 2, \ldots)$.

Ранее было показано, что каждая сходящаяся последовательность ограничена. Обратное утверждение, вообще говоря, неверно, из ограниченности последовательности не следует ее сходимость. Так, рассмотренная только что последовательность $x_n = \dfrac{1 + (-1)^n}{2}$, очевидно, ограничена ($|x_n| \leq 1, n = 1, 2, \ldots$), но она не является сходящейся. Вместе с тем из этой последовательности мы выделили подпоследовательность $x_{2k} = 1 (k = 1, 2, \ldots)$ - стационарную и, следовательно, сходящуюся. Оказывается, что это можно сделать для любой ограниченной последовательности.

Лемма Больцано-Вейерштрасса *Из любой ограниченной последовательности можно выделить сходящуюся подпоследовательность.*

$\square$ Доказательство этой леммы основано на последовательном делении отрезка пополам и применении леммы Кантора о вложенных отрезках.

Итак, пусть $\{x_n\}$ - ограниченная последовательность. Тогда существуют числа a и b, такие, что $a \leq x_n \leq b$ $(n = 1, 2, \ldots)$. Разделим отрезок $[a, b]$ пополам точкой c, т.е. положим $c = \dfrac{a + b}{2}$. Тогда хотя бы один из полученных отрезков $[a, c]$ и $[c, b]$ будет содержать бесконечно много элементов последовательности. Выберем тот из отрезков $[a, c]$ или $[c, b]$, который содержит бесконечно много элементов последовательности $\{x_n\}$, и обозначим его $[a_1, b_1]$. Теперь разделим пополам отрезок $[a_1, b_1]$ и выберем из двух полученных отрезков такой $[a_2, b_2]$, который содержит бесконечно много элементов последовательности $\{x_n\}$. Продолжая этот процесс, получим последовательность отрезков $I_k = [a_k, b_k]$, вложенных друг в друга $(I_{k+1} \subset I_k)$, длины которых $b_k - a_k = \dfrac{b - a}{2^k} \to 0 (k \to \infty)$ и в каждом I_k содержится бесконечно много элементов последовательности $\{x_n\}$. В силу леммы Кантора о вложенных отрезках, существует единственная точка α, принадлежащая всем отрезкам

$I_k (k = 1, 2, \ldots)$.

Теперь построим подпоследовательность последовательности $\{x_n\}$, сходящуюся к α. Выберем в качестве x_{n_1} любой элемент последовательности $\{x_n\}$, содержащийся в I_1. Он существует, так как в I_1 содержится бесконечно много элементов $\{x_n\}$. Далее, так как в $I_2 = [a_2, b_2]$ содержится бесконечно много элементов последовательности $\{x_n\}$, то в I_2 найдется элемент последовательности $\{x_n\}$, номер которого n_2 больше, чем n_1. Это будет второй элемент нашей подпоследовательности x_{n_2}. Если уже выбраны номера $n_1 < n_2 < \cdots < n_k$, такие, что $x_{n_i} \in I_i = [a_i, b_i]$, то, поскольку в отрезке $I_{k+1} = [a_{k+1}, b_{k+1}]$ содержится бесконечно много элементов последовательности $\{x_n\}$, в I_{k+1} найдется такой элемент $x_{n_{k+1}} \in I_{k+1}$, что $n_{k+1} > n_k$.

По индукции мы построили подпоследовательность $\{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$. Покажем, что $\lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k} = \alpha$. Для $k = 1, 2, \ldots$ имеем $a_k \leq x_{n_k} \leq b_k$ и $a_k \leq \alpha \leq b_k$. Отсюда получаем $0 \leq |x_{n_k} - \alpha| \leq b_k - a_k$. Но, поскольку $b_k - a_k \to 0 (k \to \infty)$, то по теореме о трех пределах получаем, что $|x_{n_k} - \alpha| \to 0 (k \to \infty)$, а значит, $x_{n_k} \to \alpha$ $(k \to \infty)$. ■

Фундаментальные последовательности. Критерий Коши

Если для исследования сходимости последовательности применять определение предела, то мы заранее должны знать, является ли данная последовательность сходящейся и значение ее предела. Используя определение предела, мы можем лишь доказывать выдвинутую гипотезу. Однако в ряде случаев по самому виду последовательности трудно определить, является ли она сходящейся или расходящейся. Например, $x_n = 1 + \dfrac{1}{2} + \cdots + \dfrac{1}{n}$, $y_n = 1 + \dfrac{1}{2^2} + \cdots + \dfrac{1}{n^2}$. В связи с этим возникает необходимость найти внутреннее свойство последовательности, равносильное сходимости и не зависящее от числа a – предела последовательности. Мы докажем, что таким свойством является фундаментальность.

Определение 4.1 *Последовательность $\{x_n\}$ называется фундаментальной (сходящейся в себе), если для любого $\varepsilon > 0$ найдется такой номер N, зависящий, вообще говоря, от ε, что для всех номеров $n \geq N, m \geq N$ справедливо неравенство $|x_n - x_m| < \varepsilon$.*

Существенное отличие определения фундаментальности от определения предела состоит в том, что в определении предела мы должны знать значение предела, а в определении фундаментальности это не требуется. Смысл определения предела состоит в том, что все элементы последовательности с достаточно большими номерами мало отличаются от значения предела, т.е. $|x_n - a| < \varepsilon$ при $n \geq N = N(\varepsilon)$. В определении фундаментальности требуется чтобы все элементы последовательности с достаточно большими номерами мало отличались друг от друга $(|x_n - x_m| < \varepsilon, n, m \geq N = N(\varepsilon))$.

Равносильность сходимости последовательности и ее фундаментальности устанавливает следующая теорема.

Теорема 1 *(критерий Коши). Для того чтобъ последовательность бъла сходящейся, необходимо и достаточно, чтобы она была фундаментальной.*

□ Доказательство. *Необходимость* доказывается совсем просто. В самом деле, нужно показать, что из сходимости следует фундаментальность. Пусть последовательность $\{x_n\}$ сходится и $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$. Зададим $\varepsilon > 0$ и найдем номер N, такой, что для любого $n \geq N$ справедливо неравенство $|x_n - a| < \dfrac{\varepsilon}{2}$. Если $n, m \geq N$, то получим

$$|x_n - x_m| \leq |x_n - a| + |x_m - a| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

а это и означает, что $\{x_n\}$ – фундаментальна.

Достаточность. Нужно показать, что из фундаментальности последовательности следует ее сходимость. Сначала мы покажем, что из фундаментальности следует ограниченность. Затем, используя лемму Больцано-Вейерштрасса, из ограниченной последовательности выделим сходящуюся подпоследовательность и, наконец, снова используя фундаментальность, покажем, что и вся последовательность сходится к тому же пределу, что и выделенная подпоследовательность.

Итак, пусть $\{x_n\}$ – фундаментальная последовательность. Докажем ее ограниченность. Зададим $\varepsilon = 1$ и, пользуясь фундаментальностью, найдем номер N_1, такой, что для любых $n, m \geq N_1$ справедливо неравенство $|x_n - x_m| < 1$. Зафиксируем $m = N_1$. Тогда получим, что для всех $n \geq N_1$ имеет место неравенство $|x_n - x_{N_1}| < 1$, т.е. $x_{N_1} - 1 < x_n < x_{N_1} + 1$. Отсюда следует, что $|x_n| \leq |x_{N_1}| + 1$ для всех $n \geq N_1$. Во множестве $E = \{|x_{N_1}| + 1, |x_1|, \ldots, |x_{N_1-1}|\}$, состоящего из конечного числа элементов, выберем наибольший $A = \max\{|x_{N_1}| + 1, |x_1|, \ldots, |x_{N_1-1}|\}$. Тогда получим, что $|x_n| \leq A$ для всех $n = 1, 2, \ldots$, а это и означает, что $\{x_n\}$ – ограниченная последовательность.

Применяя теперь к ограниченной последовательности $\{x_n\}$ лемму Больцано-Вейерштрасса, выделим из нее сходящуюся подпоследовательность $\{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ и обозначим через a предел этой подпоследовательности. Покажем, что вся последовательность $\{x_n\}$ также сходится к числу a, т.е. что $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$.

Зададим $\varepsilon > 0$ и, пользуясь фундаментальностью последовательности $\{x_n\}$, найдем такой номер N, что для всех номеров $n, m \geq N$ справедливо неравенство $|x_n - x_m| < \dfrac{\varepsilon}{2}$. Далее, пользуясь тем, что $\lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k} = a$, для заданного ε найдем номер k, такой, что $n_k \geq N$ (это возможно, поскольку $n_k \to \infty$ при $k \to \infty$) и $|x_{n_k} - a| < \dfrac{\varepsilon}{2}$. Положим $m = n_k$. Тогда получим, что для любого $n \geq N$ справедливо неравенство $|x_n - x_{n_k}| < \dfrac{\varepsilon}{2}$. Отсюда следует, что для $n \geq N$

$$|x_n - a| \leq |x_n - x_{n_k}| + |x_{n_k} - a| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Итак, для заданного $\varepsilon > 0$ мы нашли номер N, начиная с которого справедливо неравенство $|x_n - a| < \varepsilon$. Поскольку выбранное $\varepsilon > 0$ произвольно, то по определению предела последовательности получаем, что $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$. ■

Определение фундаментальности последовательности можно сформулировать в такой эквивалентной форме.

Определение 4.2 *Последовательность $\{x_n\}$ называется фундаментальной, если для любого $\varepsilon > 0$ найдется такой номер N, зависящий, вообще говоря, от ε, что для любого $n \geq N$ и для любого $p \in \mathbb{N}$ справедливо неравенство $|x_{n+p} - x_n| < \varepsilon$.*

Пользуясь этим определением, скажем, что последовательность $\{x_n\}$ не является фундаментальной, если найдется такое $\varepsilon_0 > 0$, что для любого N существуют такой номер $n \geq N$ и такое натуральное число p, что $|x_{n+p} - x_n| \geq \varepsilon_0$.

Пример 1

Рассмотрим последовательность $x_n = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}$. Для натуральных n и p имеем $x_{n+p} - x_n = \frac{1}{n+1} + \cdots + \frac{1}{n+p} \geq \frac{1}{n+p} + \cdots + \frac{1}{n+p} = \frac{p}{n+p}$. Если n зафиксировано, то для $p = n$ получаем $|x_{n+p} - x_n| \geq \frac{1}{2}$. Выберем $\varepsilon_0 = \frac{1}{2} > 0$. Тогда для любого номера N положим $n = N, p = n$ и будем иметь $|x_{n+p} - x_n| \geq \varepsilon_0$. Это означает, что данная последовательность не является фундаментальной и, следовательно, в силу критерия Коши, она расходится.

Пример 2

Покажем, что последовательность $x_n = \frac{\sin 1}{1^2} + \frac{\sin 2}{2^2} + \cdots + \frac{\sin n}{n^2}$ фундаментальна, а значит, сходящаяся. Для натуральных n и p имеем

$$|x_{n+p} - x_n| \leq \frac{1}{(n+1)^2} + \cdots + \frac{1}{(n+p)^2} \leq$$
$$\leq \frac{1}{n(n+1)} + \cdots + \frac{1}{(n+p-1)(n+p)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} + \cdots + \frac{1}{n+p-1} - \frac{1}{n+p} =$$
$$= \frac{1}{n} - \frac{1}{n+p} \leq \frac{1}{n} < \varepsilon$$

если только $n \geq N \equiv \left[\frac{1}{\varepsilon}\right] + 1$. Этим самым доказано, что данная последовательность фундаментальна.

Частичные пределы. Верхний и нижний пределы

Предложение 1 *Пусть $\{x_n\}$ - сходящаяся последовательность и $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$. Тогда любая подпоследовательность $\{x_{n_k}\}$ сходится и $\lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k} = a$.*

□ Доказательство. Зададим $\varepsilon > 0$ и найдем такой номер N, что для всех $n \geq N$ справедливо неравенство $|x_n - a| < \varepsilon$. Поскольку $\lim\limits_{k\to\infty} n_k = +\infty$, то для найденного N найдется такое K, что при всех $k \geq K$ справедливо неравенство $n_k \geq N$. Но тогда и $|x_{n_k} - a| < \varepsilon$. Таким образом, для заданного $\varepsilon > 0$ мы нашли номер K, такой, что при всех $k \geq K$ справедливо неравенство $|x_{n_k} - a| < \varepsilon$. Это и означает, что $\lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k} = a$. ■

Подобным образом легко можно доказать следующее

Предложение 2 *Если* $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty$, *то для любой подпоследовательности* $\{x_{n_k}\}$ $\lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k} = +\infty$. *Если же* $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = -\infty$, *то для любой подпоследователвности* $\{x_{n_k}\}$ $\lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k} = -\infty$.

Итак, если последовательность сходится к некоторому пределу, то и любая ее подпоследовательность сходится к тому же пределу. Обратное утверждение очевидно, т. к. сама последовательность является одной из своих подпоследовательностей (полагаем $n_k = k$).

Ранее мы уже приводили примеры расходящихся последовательностей, у которых существуют сходящиеся подпоследовательности. Напомним также лемму Больцано-Вейерштрасса, согласно которой из любой ограниченной последовательности $\{x_n\}$ можно выделить сходящуюся подпоследовательность $\{x_{n_k}\}$. Число $c = \lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k}$ называют частичным пределом последовательности $\{x_n\}$.

Определение 1 *Число c называется частичным пределом последовательности* $\{x_n\}$, *если существует подпоследовательность* $\{x_{n_k}\}$ *последовательности* $\{x_n\}$, *сходящаяся к* c.

Из доказанного выше предложения 1 следует, что у каждой сходящейся последовательности существует единственный конечный частичный предел (т. к. каждая подпоследовательность сходится к пределу последовательности). Если же последовательность расходится, то у нее может быть несколько различных частичных пределов. Например, последовательность $x_n = (-1)^n$ имеет два различных частичных предела $1 = \lim\limits_{k\to\infty} x_{2k}$ и $-1 = \lim\limits_{k\to\infty} x_{2k+1}$.

Расширим понятие частичного предела.

Определение 4.3 *Будем говорить, что последовательность* $\{x_n\}$ *имеет частичным пределом* $+\infty$, *если существует подпоследовательность* $\{x_{n_k}\}$, *такая, что* $\lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k} = +\infty$. *Если же существует подпоследовательность* $\{x_{n_k}\}$, *такая, что* $\lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k} = -\infty$, *то говорят, что* $-\infty$ *является частичным пределом последовательности* $\{x_n\}$.

Например, для последовательности $x_n = (-1)^n n$ частичными пределами являются $+\infty$ и $-\infty$, поскольку

$$\lim_{k\to\infty} x_{2k} = \lim_{k\to\infty} (-1)^{2k} 2k = \lim_{k\to\infty} 2k = +\infty$$
$$\lim_{k\to\infty} x_{2k+1} = \lim_{k\to\infty} (-1)^{2k+1}(2k+1) = \lim_{k\to\infty} (-2k-1) = -\infty$$

Дадим еще одно определение частичного предела последовательности.

Определение 2 *Число a ($+\infty$ или $-\infty$) называются частичными пределами последовательности* $\{x_n\}$, *если в любой окрестности a($+\infty$ или $-\infty$) найдутся элементы последовательности* $\{x_n\}$ *со сколь угодно большими номерами.*

В кванторах это определение можно записать так:
для конечного a : $\quad \forall \varepsilon > 0 \quad \forall N \quad \exists n \geq N : \quad |x_n - a| < \varepsilon;$

для $a = +\infty$: $\quad \forall M \quad \forall N \quad \exists n \geq N : \quad x_n > M$;
для $a = -\infty$: $\quad \forall M \quad \forall N \quad \exists n \geq N : \quad x_n < -M$.

Полезно сравнить это определение с определением предела (конечного и бесконечного), а также с определением неограниченных сверху и снизу последовательностей.

□ ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЭКВИВАЛЕНТНОСТИ ОПРЕДЕЛЕНИЙ 1 и 2. Пусть конечное число a является частичным пределом последовательности $\{x_n\}$ в смысле определения 1. Тогда найдется подпоследовательность $\{x_{n_k}\}$, стремящаяся к a. Зададим $\varepsilon > 0$ и найдем такое K, что при любом $k \geq K$ справедливо неравенство $|x_{n_k} - a| < \varepsilon$. Пусть произвольное $N \in \mathbb{N}$. Так как $\lim\limits_{k\to\infty} n_k = +\infty$, то найдется $k \geq K$, такое, что $n_k \geq N$. Но поскольку $k \geq K$, то $|x_{n_k} - a| < \varepsilon$. Итак, для заданных $\varepsilon > 0$ и $N \in \mathbb{N}$ найдется номер $n \geq N$ ($n = n_k, k \geq K$), такой, что $|x_n - a| < \varepsilon$, т.е. число a является частичным пределом в смысле определения 2.

Обратно, пусть a – частичный предел в смысле определения 2. Зададим $\varepsilon = 1, N = 1$ и найдем такое n_1, что $|x_{n_1} - a| < 1$. Далее, зададим $\varepsilon = \dfrac{1}{2}, N = n_1 + 1$ и найдем $n_2 \geq N$, такое, что $|x_{n_2} - a| < \dfrac{1}{2}$. Ясно, что $n_2 > n_1$. Если выбраны элементы $x_{n_1}, \ldots, x_{n_{k-1}}$, то задавая $\varepsilon = \dfrac{1}{k}, N = n_{k-1}+1$, найдем $n_k \geq N$, такое, что $|x_{n_k} - a| < \dfrac{1}{k}$. Ясно, что $n_k > n_{k-1}$. По индукции построили подпоследовательность $\{x_{n_k}\}$, такую, что $|x_{n_k} - a| < \dfrac{1}{k}$. Отсюда следует, что $\lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k} = a$.

Покажем, что определения 1 и 2 эквивалентны для случая $a = +\infty$. Пусть существует такая подпоследовательность $\{x_{n_k}\}$ последовательности $\{x_n\}$, что $\lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k} = +\infty$, т.е. пусть $+\infty$ является частичным пределом в смысле определения 1 . Зададим M и найдем такое K, что при всех $k \geq K$ справедливо неравенство $x_{n_k} > M$. Зададим $N \in \mathbb{N}$. Так как $\lim\limits_{k\to\infty} n_k = +\infty$, то найдется $k \geq K$, такое, что $n_k \geq N$. Но тогда получим, что $x_{n_k} > M$. Окончательно, для заданных M и N мы нашли такое $n \geq N$, что $x_n > M$, а это и означает, что $+\infty$ является частичным пределом в смысле определения 2.

Обратно, пусть $+\infty$ является частичным пределом в смысле определения 2. Для $M = 1$ и $N = 1$ найдем $n_1 \geq 1$, такое, что $x_{n_1} > 1$. Для $M = 2$ и $N = n_1 + 1$ найдем $n_2 \geq N$, такое, что $x_{n_2} > 2$. Продолжая этот процесс, найдем подпоследовательность x_{n_k}, такую, что $x_{n_k} > k$. Отсюда следует, что $\lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k} = +\infty$, т.е. $+\infty$ является частичным пределом последовательности $\{x_n\}$ в смысле определения 1. ■

Эквивалентность определений 1 и 2 для случая $a = -\infty$ рекомендуется доказать самостоятельно.

Лемма 1 *Если последовательность $\{x_n\}$ неограничена сверху, то $+\infty$ является ее частичным пределом.*

□ Доказательство. По условию, для любого M найдется такой номер n, что $x_n > M$. Зададим $M = 1$ и найдем такое n_1, что $x_{n_1} > 1$. Зададим $M = \max\left(x_1, \ldots, x_{n_1}\right)+2$ и найдем номер n_2, такой, что $x_{n_2} > M$. Ясно, что $n_2 > n_1$. Если выбраны $x_{n_1}, \ldots, x_{n_{k-1}}$, то положим $M = \max\left(x_1, \ldots, x_{n_{k-1}}\right)+k$ и найдем $n_k > n_{k-1}$, такое, что $x_{n_k} > M$. По индукции построим подпоследовательность $\{x_{n_k}\}$, причем в силу самого построения $x_{n_k} > k$, $k = 1, 2\ldots$. Отсюда следует, что $\lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k} = +\infty$, т.е. $+\infty$ – частичный предел последовательности $\{x_n\}$. ■

Аналогично доказывается, что для неограниченной снизу последовательности $-\infty$ является ее частичным пределом.

Пусть теперь $\{x_n\}$ – произвольная последовательность. Если она ограничена, то, в силу леммы Больцано-Вейерштрасса, существует сходящаяся подпоследовательность. Это означает, что $\{x_n\}$ имеет конечный частичный предел. Если же $\{x_n\}$ неограничена, то она неограничена либо сверху, либо снизу. В первом случае ее частичным пределом будет $+\infty$, а во втором $-\infty$. Таким образом, мы доказали следующее

Утверждение *Каждая последовательность имеет хотя бы один частичный предел (быть может, равный $+\infty$ или $-\infty$).*

Для того чтобы определить понятие **верхнего и нижнего предела** последовательности, нам понадобится следующее расширение множества действительных чисел:

$$\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$$

Будем считать, что для любого $x \in \mathbb{R}$ справедливо неравенство $-\infty < x < +\infty$. Если множество $E \subset \overline{\mathbb{R}}$ содержит $+\infty$, то элемент $+\infty$ считается наибольшим в E. Если же $-\infty \in E$, то $-\infty$ считается наименьшим элементом в E.

Мы показали, что у каждой последовательности $\{x_n\}$ существует частичный предел, принадлежащий $\overline{\mathbb{R}}$. Другими словами, множество $E \subset \overline{\mathbb{R}}$ частичных пределов произвольной последовательности $\{x_n\}$ непусто.

Определение Верхним пределом последовательности $\{x_n\}$ называется верхняя грань множества всех ее частичных пределов и обозначается $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, x_n$ $\Big($ или $\lim\limits_{n\to\infty} \sup x_n\Big)$. Нижним пределом последовательности $\{x_n\}$ называется нижняя грань множества всех ее частичных пределов и обозначается $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, x_n$ $\Big($или $\lim\limits_{n\to\infty} \inf x_n\Big)$.

Замечание Следует отличать понятия верхнего и нижнего пределов последовательности от понятий верхней и нижней граней множества значений последовательности. Так, например, у последовательности $x_n = \dfrac{(-1)^n}{n}$ множество ее значений $E_1 = \left\{\dfrac{(-1)^n}{n}, n = 1, 2, \ldots\right\}$ имеет наибольший элемент $x_2 = \dfrac{1}{2}$ и наименьший элемент $x_1 = -1$. Поэтому $\sup E_1 = \dfrac{1}{2}$ и $\inf E_1 = -1$. Вместе с тем множество частичных пределов E_2 этой последовательности состоит из одного элемента $E_2 = \{0\}$ (т. к. $\{x_n\}$ сходится). Поэтому $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, x_n = \underline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, x_n = 0$.

Выше отмечалось, что для любой последовательности множество ее частичных пределов в $\overline{\mathbb{R}}$ непусто. Следовательно, у любой последовательности существует верхний и нижний пределы.

Пример 3

Пусть $x_n = \sin\dfrac{\pi n}{4}$. Это – такая последовательность:

$$\frac{\sqrt{2}}{2}, 1, \frac{\sqrt{2}}{2}, 0, -\frac{\sqrt{2}}{2}, -1, -\frac{\sqrt{2}}{2}, 0, \frac{\sqrt{2}}{2}, \ldots$$

Множество E ее частичных пределов есть $E = \left\{\dfrac{\sqrt{2}}{2}, -\dfrac{\sqrt{2}}{2}, 0, 1, -1\right\}$. Никакое другое число не является частичным пределом данной последовательности. В самом деле, если $a \notin E$, то существует такая ε-окрестность точки a, в которой нет ни одного элемента последовательности, а значит, число a не может быть частичным пределом. Итак, $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} x_n = 1$, $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}} x_n = -1$.

Пример 4

Пусть $x_n = -n$. Тогда $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = -\infty$ и, следовательно, любая подпоследовательность последовательности $\{x_n\}$ также стремится к $-\infty$. Значит, $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} x_n = \underline{\lim\limits_{n\to\infty}} x_n = -\infty$.

Пример 5

Пусть $x_n = n^{(-1)^n}$. Одна из подпоследовательностей $x_{2k} = 2k$ стремится к $+\infty$, а другая $x_{2k+1} = \dfrac{1}{2k+1}$ стремится к нулю. Если же мы возьмем какую-нибудь подпоследовательность, содержащую бесконечно много четных и бесконечно много нечетных элементов, то такая подпоследовательность не будет иметь предела. Значит, у данной последовательности существует лишь два частичных предела: $+\infty$ и 0. Поэтому $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} x_n = +\infty$, $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}} x_n = 0$. По-другому, если $a \notin \{0, +\infty\}$, то существует такая окрестность точки a, в которой содержится не более чем конечное множество элементов последовательности $\{x_n\}$. Это означает, что если $a \notin \{0, +\infty\}$, то a не является частичным пределом последовательности $\{x_n\}$.

Теорема 2 *Для любой последовательности $\{x_n\}$ ее верхний предел является частичным пределом.*

□ Доказательство. Если $\{x_n\}$ неограничена сверху, то, согласно лемме 1 , существует подпоследовательность $\{x_{n_k}\}$, стремящаяся к $+\infty$. Это означает, что $+\infty$ является частичным пределом и, очевидно, наибольшим. Поэтому $+\infty$ в этом случае, будучи верхним пределом, является и частичным пределом.

Предположим теперь, что $\{x_n\}$ ограничена сверху. Возможны следующие два случая.
1). У $\{x_n\}$ существует ограниченная снизу подпоследовательность.
2). У $\{x_n\}$ не существует ограниченной снизу подпоследовательности.

Во втором случае у $\{x_n\}$ нет конечного частичного предела. В самом деле, если бы он был, то была бы сходящаяся подпоследовательность $\{x_{n_k}\}$. Но из сходимости $\{x_{n_k}\}$ следует ее ограниченность, что противоречит условию второго случая. Таким образом, во втором случае единственным частичным пределом последовательности $\{x_n\}$ является $-\infty$, т.е. $\underline{\lim}_{n\to\infty} x_n = -\infty$. Но так как $-\infty$ - единственный частичный предел, то и $\overline{\lim}_{n\to\infty} x_n = -\infty$.

Осталось рассмотреть первый случай. В этом случае существует ограниченная снизу, а значит, ограниченная подпоследовательность. По лемме Больцано-Вейерштрасса, из нее можно извлечь сходящуюся подпоследовательность, и поэтому исходная последовательность имеет конечный частичный предел. Обозначим $\bar{x} = \overline{\lim}_{n\to\infty} x_n$. Так как $\{x_n\}$ ограничена сверху, то $\bar{x} < +\infty$, а поскольку у $\{x_n\}$ существует хотя бы один конечный частичный предел, то $\bar{x} > -\infty$.

Зададим $\varepsilon > 0$. Так как $\bar{x} = \overline{\lim}_{n\to\infty} x_n$, то существует такой $x > \bar{x} - \varepsilon$, что x является частичным пределом последовательности $\{x_n\}$, причем $x \leq \bar{x}$. Зададим $\varepsilon_1 = x - (\bar{x} - \varepsilon) > 0$ и произвольное натуральное N. Так как x - частичный предел, то существует такое $n \geq N$, что $|x_n - x| < \varepsilon_1$. Но тогда справедливо неравенство $|x_n - \bar{x}| < \varepsilon$. Итак, для произвольного $\varepsilon > 0$ и для любого $N \in \mathbb{N}$ найдется $n \geq N$, такое, что $|x_n - \bar{x}| < \varepsilon$. По определению 2 частичного предела, это и означает, что $\bar{x}$ является частичным пределом последовательности $\{x_n\}$. ■

Аналогично можно доказать следующее утверждение.

Теорема 3 *Для любой последовательности $\{x_n\}$ ее нижний предел является частичным пределом.*

Теорема 4 *Последовательность $\{x_n\}$ имеет конечный или бесконечный предел a тогда и только тогда, когда*

$$\underline{\lim}_{n\to\infty} x_n = \overline{\lim}_{n\to\infty} x_n = a. \tag{4.1}$$

□ Доказательство. *Необходимость.* Пусть $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$. Тогда из предложений 1 и 2 следует, что любая подпоследовательность $\{x_{n_k}\}$ сходится к a, а значит, множество частичных пределов состоит из единственной точки a. Таким образом, наибольший и наименьший частичные пределы также равны a, и поэтому имеет место равенство (4.1).

Достаточность. Пусть выполнено равенство (4.1). Рассмотрим случай $-\infty < a < +\infty$. Для доказательства утверждения докажем следующие два свойства верхнего $\bar{x}$ и нижнего $\underline{x}$ пределов последовательности $\{x_n\}$.

1. Для любого $\varepsilon > 0$ существует такое N, что при всех $n \geq N$ справедливо неравенство $x_n < \bar{x} + \varepsilon$.

2. Для любого $\varepsilon > 0$ существует такое N, что при всех $n \geq N$ справедливо неравенство $x_n > \underline{x} - \varepsilon$.

Докажем 1. Предположим противное, т.е. пусть найдется такое $\varepsilon_0 > 0$, что для любого N существует $n \geq N$, такое, что $x_n \geq \bar{x} + \varepsilon_0$. Зададим
$N = 1$ и найдем такое $n_1 \geq N$, что $x_{n_1} \geq \bar{x} + \varepsilon_0$. Зададим $N = n_1 + 1$ и найдем такое $n_2 \geq N$,

что $x_{n_2} \geq \bar{x}+\varepsilon_0$. По индукции построим подпоследовательность $\{x_{n_k}\}$ последовательности $\{x_n\}$, такую, что $x_{n_k} \geq \bar{x}+\varepsilon_0$ ($k=1,2,\ldots$). Эта подпоследовательность имеет хотя бы один частичный предел α, причем $\alpha \geq \bar{x}+\varepsilon_0$. Тогда α является также и частичным пределом последовательности $\{x_n\}$, а это противоречит тому, что $\bar{x} = \overline{\lim}_{n\to\infty} x_n-$ наибольший из всех частичных пределов последовательности $\{x_n\}$.

Свойство 2 нижнего предела доказывается аналогично, и мы опускаем его доказательство.

В нашем случае $\bar{x} = \underline{x} = a$. Зададим $\varepsilon > 0$ и найдем такое N_1, что для всех $n \geq N_1$ справедливо неравенство $x_n < a+\varepsilon$. Далее, найдем такое N_2, что для всех $n \geq N_2$ справедливо неравенство $x_n > a-\varepsilon$. Положим $N = \max(N_1, N_2)$. Тогда для всех $n \geq N$ будет выполнено неравенство $a-\varepsilon < x_n < a+\varepsilon$, т.е. $|x_n - a| < \varepsilon$. Это и означает, что $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$.

Теперь рассмотрим случай $a = +\infty$. В этом случае множество всех частичных пределов состоит из единственного элемента $+\infty$. Докажем, что $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty$, т.е. что для любого M найдется такое N, что при всех $n \geq N$ справедливо неравенство $x_n > M$.

Предположим противное. Пусть существует такое M, что для всех N найдется такое $n \geq N$, что $x_n \leq M$. Зададим $N = 1$ и найдем такое $n_1 \geq N$, что $x_{n_1} \leq M$. Зададим $N = n_1 + 1$ и найдем такое $n_2 \geq N$, что $x_{n_2} \leq M$. Продолжая этот процесс, получим подпоследовательность $\{x_{n_k}\}$ последовательности $\{x_n\}$, такую, что $x_{n_k} \leq M (k=1,2,\ldots)$. Эта подпоследовательность имеет хотя бы один частичный предел $\alpha \leq M$, т.е. существует $\left\{x_{n_{k_s}}\right\}$, сходящаяся к α. Но $\left\{x_{n_{k_s}}\right\}$ является также подпоследовательностью последовательности $\{x_n\}$. Это означает, что число $\alpha \leq M$ является частичным пределом последовательности $\{x_n\}$, что противоречит тому, что $\underline{\lim}_{n\to\infty} x_n = +\infty$.

Случай $a = -\infty$ рассматривается аналогично. ■

Итак, теорема 4 дает необходимое и достаточное условие существования предела последовательности (быть может, равного $+\infty$ или $-\infty$). Отсюда получаем, что если $\underline{\lim}_{n\to\infty} x_n < \overline{\lim}_{n\to\infty} x_n$, то последовательность не имеет предела (даже равного $+\infty$ или $-\infty$). Это утверждение может быть применено на практике для доказательства расходимости последовательности. Именно, если из заданной последовательности $\{x_n\}$ оказывается возможным выделить две подпоследовательности $\{x_{n_k}\}$ и $\{x_{m_k}\}$, сходящиеся к различным пределам, то исходная последовательность $\{x_n\}$ не является сходящейся. Например, пусть $x_n = (-1)^n$. Выделим две подпоследовательности: $x_{2k} = 1$ и $x_{2k+1} = -1$. Они сходятся к различным пределам, и поэтому исходная последовательность x_n расходится. Для другого рассмотренного выше примера последовательности $y_n = n^{(-1)^n}$ имеем $y_{2k} = 2k \to +\infty$ и $y_{2k+1} = \dfrac{1}{2k+1} \to 0$. Значит, последовательность $\{y_n\}$ расходится. Наконец, если $z_n = \dfrac{n}{n+1}\cos\dfrac{\pi n}{4}$, то $z_{8k} = \dfrac{8k}{8k+1} \to 1$ и $z_{8k+4} = -\dfrac{8k+4}{8k+5} \to -1$. Следовательно, последовательность $\{z_n\}$ расходящаяся.