Лекция 10. Логарифмическое дифференцирование. Дифференцирование параметрически заданных и неявных функций. Основные теоремы дифференциального исчисления. Правила Лопиталя. Производные высоких порядков. Формула Лейбница. Многочлен Тейлора. Разложение основных элементарных функций по формуле Маклорена

Логарифмическое дифференцирование

Пример. Найти производную показательно-степенной функции $z = u(x)^{v(x)}$, где u, v - функции, дифференцируемые в точке x, причем $u(x) > 0$.

□ Так как $z = e^{v(x)\ln u(x)}$, то функция z дифференцируема как суперпозиция дифференцируемых функций. Дифференцируя тождество $\ln z = v(x)\ln u(x)$, получаем $\dfrac{z'}{z} = v'\ln u + v\dfrac{u'}{u}$, откуда $z' = z\left(v'\ln u + \ + \dfrac{vu'}{u}\right)$ или

$$(u^v)' = u^v \ln u \cdot v' + vu^{v-1}u'. \tag{10.1}$$

Согласно полученной формуле (10.1) производная функции u^v равна сумме двух слагаемых таких, что первое равно производной показательной функции $u^{v(x)}$ (основание u рассматривается как постоянная), а второе равно производной степенной функции $(u(x))^v$ (показатель v рассматривается как постоянная).

Пример. Найти $f'(x), g'(x)$, если: а) $f(x) = x^x$; б) $g(x) = x^{x^x}$. □ а) По формуле (10.1) получаем $f'(x) = x^x \ln x + xx^{x-1}$, т.е.

$$f'(x) = (x^x)' = x^x(\ln x + 1).$$

б) Так как $g(x) = x^{f(x)}$, то, снова применяя формулу (10.1), находим

$$g'(x) = g(x)\ln x f'(x) + f(x)x^{f(x)-1}$$

или

$$\left(x^{x^x}\right)' = x^{x^2+x-1}(x\ln x(\ln x + 1) + 1).$$

■

Дифференцирование параметрически заданных и неявных функций

Функции, заданные параметрически

Пусть функции $x(t)$ и $y(t)$ определены на отрезке $[t_0 - \delta, t_0 + \delta]$, причем функция $x(t)$ непрерывна и строго монотонна (например, строго возрастает). Тогда на отрезке $[\alpha, \beta]$, где

$\alpha = x(t_0 - \delta), \beta = x(t_0 + \delta)$, определена функция $t = t(x)$, обратная к функции $x = x(t)$, непрерывная и строго возрастающан.

Предположим дополнительно, что существуют $x'(t_0)$ и $y'(t_0)$, причем $x'(t_0) \neq 0$ (для сокращения записи вместо $x'(t_0)$ и $y'(t_0)$ будем писать соответственно x'_t, y'_t).

Тогда сложная функция $y = y(t) = y(t(x))$ дифференцируема по x в точке $x_0 = x(t_0)$, причем

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y'_t}{x'_t}.$$

$\square$ Действительно, по правилу дифференцирования сложной функции $y = y(t(x))$ получаем

$$\frac{dy}{dx} = y'_x = y'_t t'_x, \tag{10.2}$$

где $t'_x = \dfrac{1}{x'_t}$ согласно правилу дифференцирования обратной функции. Итак, справедлива формула (10.2). $\blacksquare$

Пример. Найти $\dfrac{dy}{dx}$, если

$$x = \ln\left(1 + e^{2t}\right), \quad y = \operatorname{arctg} e^t.$$

Δ Так как $x'_t = \dfrac{2e^{2t}}{1+e^{2t}}, \quad y'_t = \dfrac{e^t}{1+e^{2t}}$, то по формуле (10.2) находим

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y'_t}{x'_t} = \frac{e^t}{1+e^{2t}} \frac{1+e^{2t}}{2e^{2t}}, \quad \text{т. е.} \quad \frac{dy}{dx} = \frac{e^{-t}}{2}.$$

Функции, заданные неявно

Если дифференцируемая функция $y = f(x)$ задана неявно уравнением $F(x, y) = 0$ (§ 9), то, дифференцируя тождество $F(x, f(x)) \equiv 0$ как сложную функцию, можно найти $\dfrac{dy}{dx} = f'(x)$. Подробно вопрос о существовании неявной функции и о ее дифференцируемости будет рассмотрен в многомерном анализе.

Пример. Написать уравнение касательной к эллипсу

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \tag{10.3}$$

в некоторой его точке $M_0(x_0, y_0)$, где $|x_0| < a$.

$\triangle$ Точка M_0 однозначно определяет на интервале $(-a, a)$ одну из двух неявных дифференцируемых функций, которые задаются уравнением (10.3). Обозначим эту функцию $f(x)$. Ее можно записать в явном виде, разрешив уравнение (10.3) относительно y.

Дифференцируя тождество (10.3) , в котором $y = f(x)$, получаем

$$\frac{2x}{a^2} + \frac{2yy'}{b^2} = 0. \tag{10.4}$$

Подставляя в уравнение (10.4) вместо x и y соответственно x_0 и y_0, находим угловой коэффициент касательной к эллипсу в точке M_0 :

$$k = y'(x_0) = -\frac{b^2}{a^2}\frac{x_0}{y_0}.$$

Следовательно, уравнение касательной имеет вид

$$y - y_0 = k(x - x_0), \quad \text{или} \quad y - y_0 = -\frac{b^2}{a^2}\frac{x_0}{y_0}(x - x_0).$$

Это уравнение можно записать так: $\frac{yy_0}{b^2} + \frac{xx_0}{a^2} = \frac{y_0^2}{b^2} + \frac{x_0^2}{a^2}$, или в виде $\frac{yy_0}{b^2} + \frac{xx_0}{a^2} = 1$, так как $\frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2} = 1$. ■

Основные теоремы дифференциального исчисления

Теорема (Ферма). Пусть f определена в окрестности $U(a)$ точки a и $\forall x \in U(a) f(x) \leq f(a)$. Если f диффрениируема в точке a, то $f'(a) = 0$.

□ Доказательство.

$$f'(a) = \lim_{x \to a+} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \geq 0$$
$$f'(a) = \lim_{x \to a-} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \leq 0$$

Следовательно, $f'(a) = 0$.
Геометрический смысл: касательная в точке $(\ a; f(a)\ )$ параллельна OX. ■

Теорема (Ролль). Пусть f непрерывна на отрезке $[a; b]$ и диффрениируема на интервале $(a; b)$. Если $f(a) = f(b)$, то существует $\in (a; b) : f'(c) = 0$.

Физический смысл: если при одномерном движении точка вернулась в то положение, где была в начальный момент, то обязательно существует разворот.

□ Доказательство. По теореме Вейерштрасса существуют $x_m, x_M \in [a; b]$:

$$f(x_m) = \min_{[a;b]} f; \quad f(x_M) = \max_{[a;b]} f.$$

Если бы одна из этих точек лежала бы внутри $(a; b)$, то по теореме Ферма в этой точке производная равнялась бы нулю. Если x_m или x_M совпадают с a или b, то

$$\min_{[a;b]} f = \max_{[a;b]} f \Longrightarrow f = \text{ const}$$

и c - точка интервала. ■

Теорема (Лагранж, теорема о среднем). Пусть f непрерывна на отрезке $[a; b]$ и диффрениируема на интервале $(a; b)$. Тогда существует $\in (a; b)$:

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(c).$$

Физический смысл:

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=v_{cp}$$

□ Доказательство.

$$F(x)=f(x)-\left(\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)+f(a)\right)' \quad F(a)=F(b)=0$$

Следовательно, по теореме Ролля существует $c\in(a;b):F'(c)=0$.

$$F'(c)=f'(c)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=0.$$

■

Следствие. $f=\text{const}\ (a;b)\Longleftrightarrow f'\equiv 0$ на $(a;b)$.

□ Доказательство. Пусть $x_1,x_2\in(a;b),x_1<x_2;[x_1;x_2]\subset(a;b)$

$$f\left(x_2\right)-f\left(x_1\right)=f'(c)\left(x_2-x_1\right).$$

■

Следствие. Пусть f дифференцируема на $(a;b)$, f не убывает $\Longleftrightarrow f'\geq 0$.

Пример: $y=x^3;y'(0)=0$.

□ Доказательство.

$$f'\left(x_0\right)=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f\left(x_0\right)}{x-x_0}\geq 0$$

$\Longrightarrow$

$$f\left(x_2\right)-f\left(x_1\right)=f'(c)\left(x_2-x_1\right)\geq 0.$$

■

Замечание. Если f дифференцируема на интервале $(a;b)$ и $f'>0$, то f строго возрастает.

Теорема (Коши). Пусть f и g непрерывна на $[a;b]$ и диффереиируема на $(a;b)$. Тогда существует c $\in(a;b)$:

$$(f(b)-f(a))g'(c)=(g(b)-g(a))f'(c).$$

Если $g'=0$ на $(a;b)$, то $g(b)\neq g(a)u$

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\frac{f'(c)}{g'(c)}$$

Геометрический смысл:

$$\begin{vmatrix} f(b)-f(a) & f'(c) \\ g(b)-g(a) & g'(c) \end{vmatrix}=0$$

□ Доказательство.

$$F(x)=\begin{vmatrix} f(b)-f(a) & f(x)-f(a) \\ g(b)-g(a) & g(x)-g(a) \end{vmatrix}=0. \quad F(b)=\begin{vmatrix} f(b)-f(a) & f(b)-f(a) \\ g(b)-g(a) & g(b)-g(a) \end{vmatrix}=0.$$

$$F'(x)=\begin{vmatrix} f(b)-f(a) & f'(x) \\ g(b)-g(a) & g'(x) \end{vmatrix}. \quad F(a)=\begin{vmatrix} f(b)-f(a) & 0 \\ g(b)-g(a) & 0 \end{vmatrix}=0.$$

По теореме Ролля существует $c\in(a;b):F'(c)=0$. ■

Правило Лопиталя

Теорема. Пусть $f и g$ диффрениируемь на ($a;b$) и $g'\neq 0$ на ($a;b$). Предположим, что существует

$$\lim_{x\to b-}\frac{f'(x)}{g'(x)}=A$$

1. $\lim\limits_{x\to b-}f(x)=\lim\limits_{x\to b-}g(x)=0$.
2. $\lim\limits_{x\to b-}g(x)=\infty$.

□ Доказательство. 1) Определим $f(b)=g(b)=0\Longrightarrow f$ и g непрерывны в точке b. Следовательно, для всяких $x\in(a;b) f$ и g непрерывны на $[a;b]$.
Применим к $[x;b]$ и f с g теорему Коши

$$\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{f(b)-f(x)}{g(b)-g(x)}=\frac{f'(c)}{g'(c)},\ \text{где } c\in(x,b)$$

Для всяких $\varepsilon>0$ существует $\delta>0:\forall c\in(b-\delta;b)$

$$\left|\frac{f'(c)}{g'(c)}-A\right|<\varepsilon.$$

Пусть $x\in(b-\delta;b)\Longrightarrow c$ из теоремы Коши $\in(b-\delta;b)$

$$\left|\frac{f(x)}{g(x)}-A\right|=\left|\frac{f'(c)}{g'(c)}-A\right|<\varepsilon$$

2. Рассмотрим $y \in (a, b)$. По теореме Коши

$$\frac{f(x)-f(y)}{g(x)-g(y)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}\bigg| \cdot \frac{g(x)-g(y)}{g(x)}$$
$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}\left(1-\frac{g(y)}{g(x)}\right)+\frac{f(y)}{g(x)}$$

Для всяких $\varepsilon > 0$ существует $y \in (a; b) : \forall c \in (y; b)$

$$\left|\frac{f'(c)}{g'(c)} - A\right| < \varepsilon.$$

Фиксируем такой y. Так как $\lim\limits_{x\to b-} g(x) = \infty$, то существует $\delta > 0 : y < b-\delta$ и $\forall x \in (b-\delta; b)$

$$\left|\frac{f(y)}{g(x)}\right| < \varepsilon, \quad \left|\frac{g(y)}{g(x)}\right| < \varepsilon.$$

Для наших x :
$$\left|\frac{f(x)}{g(x)} - A\right| \leq \left|\frac{f'(c)}{g'(c)} - A\right| + \left|\frac{f'(c)}{g'(c)}\right|\left|\frac{g(y)}{g(x)}\right| + \left|\frac{f(y)}{g(x)}\right| < \varepsilon(|A|+\varepsilon+2) < \varepsilon(|A|+3). \quad (0<\varepsilon<1).$$
■

Замечание. 1) Аналогичное утверждение верно для $b = +\infty$

$$\frac{f(x)-f(y)}{g(x)-g(y)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$$
$$\lim_{x\to+\infty} f = \lim_{x\to+\infty} g = 0$$

Повторяем доказательство, меняя местами x и y.
2) Аналогично для точки a и предела справа.
3) Аналогичное утверждение верно для $A = \pm\infty$.

Производные высоких порядков

Определение. Если f дифференцируема в окрестности $U(a)$ точки a, то определена функция $x \longrightarrow f'(x)$ на этой окрестности. Если эта функция дифференцируема в точке a, то ее производная называется второй производной функции f в точке a, и обозначается $f''(a)$ или
$$\frac{d^2 f}{dx^2}(a).$$

Пусть определена производная n-го порядка. Если функция f n-раз дифференцируема в окрестности $U(a)$, то определена функция $x \longrightarrow f^{(n)}(x)$ на этой окрестности.

Если эта функция дифференцируема в точке a, то ее производная называется производной $(n+1)$-го порядка функции f в точке a и обозначается

$$f^{(n+1)}(a) \text{ или } \frac{d^{(n+1)}}{dx^{n+1}}f(a).$$

Пример. Найдем производную

$$((x-a)^m)^{(n)}, m = 1, 2, \dots$$
$$((x-a)^m)' = m(x-a)^{m-1}$$
$$((x-a)^m)'' = m(m-1)(x-a)^{m-2}$$
$$((x-a)^m)^{(n)} = \begin{cases} 0, \quad n > m \\ m(m-1)(m-2)\dots(m-(n-1))(x-a)^{m-n}, \quad n \le m \end{cases}$$

Формула Лейбница

Теорема (Формула Лейбница). Пусть функции $u(x)uv(x)$ имеют в точке x производные n-го порядка. Тогда их произведение тоже имеет производную n-го порядка, причем

$$(u \cdot v)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} C_n^k u^{(k)} v^{(n-k)}.$$

Замечания 1. Здесь C_n^k - биномиальные коэффициенты. 2. Под производной нулевого порядка будем понимать саму функцию, т.е. $u^{(0)}(x) = u(x)uv^{(0)}(x) = v(x)$.

□ Воспользуемся методом математической индукции.

При $n = 1$ биномиальные коэффициенты $C_1^0 = C_1^1 = 1$ и формула Лейбница дает равенство $(uv)' = uv' + u'v$, которое совпадает с правилом дифференцирования произведения.

Допустим, что формула верна для $n = m$, т.е.

$$(uv)^{(m)} = C_m^0 uv^{(m)} + C_m^1 u'v^{(m-1)} + \ldots + C_m^m u^{(m)} v$$

Докажем, что формула будет верна для $n = m + 1$.

$$\begin{aligned}
&(uv)^{(m+1)} = \left((uv)^{(m)}\right)' = \left(C_m^0 uv^{(m)} + C_m^1 u'v^{(m-1)} + \ldots + C_m^m u^{(m)} v\right)' = \\
&= C_m^0 u'v^{(m)} + C_m^0 uv^{(m+1)} + C_m^1 u''v^{(m-1)} + C_m^1 u'v^{(m)} + \ldots + C_m^m u^{(m+1)} v + C_m^m u^{(m)} v' = \\
&= C_m^0 uv^{(m+1)} + \left(C_m^0 + C_m^1\right) u'v^{(m)} + \ldots + \left(C_m^{m-1} + C_m^m\right) u^{(m)} v' + C_m^m u^{(m+1)} v = \\
&= C_{m+1}^0 uv^{(m+1)} + C_{m+1}^1 u'v^{(m)} + \ldots + C_{m+1}^m u^{(m)} v' + C_{m+1}^{m+1} u^{(m+1)} v.
\end{aligned}$$

■

Замечание. Доказательство аналогично выводу формулы бинома Ньютона и использует свойства биномиальных коэффициентов.

Многочлен Тейлора

Пусть $P(x)$ - многочлен степени N. Хотим разложить его в точке a, т.е. записать

$$P(x) = c_0 + c_1(x-a) + c_2(x-a)^2 + \ldots + c_N(x-a)^N.$$

Имеем:

$$c_0 = P(a),$$
$$c_1 = P'(a),$$
$$c_k = \frac{P^{(k)}(a)}{k!}$$
$$c_k = \sum_{k=0}^{N} \frac{P^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k.$$

Определение. Пусть f – n-раз дифференцируема в точке a. Многочлен

$$T_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)(x-a)^k}{k!}$$
$$\left(T_n(x)\right)^{(k)}(a) = f^{(k)}(a)$$

называется многочленом Тейлора.

Теорема. Если f – n-раз дифференцируемая функция в точке a, то

$$f(x) - T_n(x) = \alpha(x)(x-a)^n,$$

где $\lim\limits_{x\to a} \alpha(x) = 0$.

□ Доказательство.

$$g(x) = f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)(x-a)^k}{k!}$$
$$g(a) = g'(a) = \ldots = g^{(n)}(a) = 0$$

Надо доказать, что

$$\lim_{x\to a} \frac{g(x)}{(x-a)^n} = 0.$$

По правилу Лопиталя

$$\lim_{x\to a} \frac{g(x)}{(x-a)^n} = \lim_{x\to a} \frac{g'(x)}{n(x-a)^{n-1}} = \ldots$$
$$\ldots = \lim_{x\to a} \frac{g^{(n-1)}(x)}{n!(x-a)} = \lim_{x\to a} \frac{g^{(n-1)}(x) - g^{(n-1)}(a)}{n!(x-a)} = \frac{g^{(n)}(x)}{n!} = 0.$$

■

Теорема. Формула Тейлора с остаточным членом в форме Пеано:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)(x-a)^k}{k!} + \bar{o}\left((x-a)^n\right), \quad x \to a.$$

Пример. Пусть $a=0$. Тогда

$$e^x=\sum_{k=0}^{n}\frac{x^k}{k!}+\bar{o}\left(x^n\right)$$

$$\sin x=\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)!}+\bar{o}\left(x^{2n+2}\right)$$

$$\cos x=\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!}+\bar{o}\left(x^{2n+1}\right)$$

$$\ln(1+x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^{k+1} x^{k}}{k}+\bar{o}\left(x^n\right)$$

Теорема (остаточный член). Пусть f – n-раз дифференцируема в каждой точке отрезка $[a;x]$, функция $f^{(n)}$ непрерывна на $[a;x]$ и дифференцируема на интервале $(a;x)$. Пусть g непрерывна на $[a;x]$ и дифференцируема на интервале $(a;x)$, причем $g'\neq 0$ на $(a;x)$. Тогда $\exists c\in(a;x):$

$$f(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(a)(x-a)^k}{k!}+r_n(x,a),$$

где

$$r_n(x,a)=\frac{f^{(n+1)}(c)(g(x)-g(a))(x-c)^n}{n!g'(c)}.$$

□ Доказательство. Идея: применить теорему Коши к $g(t)$ и

$$F(t)=f(x)-\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(t)(x-t)^k}{k!}=*$$

По теореме Коши существует $c\in(a;x):$

$$\frac{F(x)-F(a)}{g(x)-g(a)}=\frac{F'(x)}{g'(c)}$$

$$*=f(x)-\left(f(t)+f'(t)(x-t)+\frac{f''(t)}{2}(x-t)^2+\ldots\right)$$

Кроме того, $F(x)=0$ и

$$F(a)=f(x)-\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(a)(x-a)^k}{k!}\Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow f(x)-\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(a)(x-a)^k}{k!}=-\frac{F'(c)(g(x)-g(a))}{g'(c)}$$

Возьмем производную от $F(t):$

$$F'(t)=-f'(t)-f''(t)(x-t)+f'(t)-\frac{f'''(t)}{2!}(x-t)^2+f''(t)(x-t)-\ldots=-\frac{f^{(n+1)}(t)(x-t)^n}{n!}$$

Итого:

$$f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)(x-a)^k}{k!} = \frac{f^{(n+1)}(c)(g(x)-g(a))(x-c)^n}{n!g'(c)}.$$

■

Следствие (остаточный член в форме Коши).
Положим $g(t) = x - t \Rightarrow g' = -1, g(x) = 0, g(a) = x - a$:

$$r_n(x,a) = \frac{f^{(n+1)}(c)(x-a)(x-c)^n}{n!}$$

Следствие (остаточный член в форме Лагранжа).
Положим $g(t) = (x-t)^{n+1}$. Тогда

$$r_n(x,a) = \frac{f^{(n+1)}(c)(x-a)^{n+1}(x-c)^n}{n!(n+1)(x-c)^n} = \frac{f^{(n+1)}(c)(x-a)^{n+1}}{(n+1)!}$$

Разложение основных элементарных функций по формуле Маклорена

Если $x_0 = 0$, то формула Тейлора называется **формулой Маклорена**. Если функция имеет $f^{(n)}(0)$, то формула Маклорена имеет вид

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k + o\left(x^n\right), \quad x \to 0.$$

Получим формулы Маклорена для основных элементарных функций.

1) $f(x) = e^x$.

Функция дифференцируема бесконечное число раз, причем производная n-го порядка равна $(e^x)^{(n)} = e^x$. Поэтому $f(0) = f'(0) = \ldots = f^{(n)}(0) = 1$ и формула Маклорена имеет вид

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + r_n(x)$$

где $r_n(x) = \dfrac{e^{\theta x}}{(n+1)!} x^{n+1}, \quad 0 < \theta < 1.$

2) $f(x) = \operatorname{sh} x$.

Эта функция также дифференцируема бесконечное число раз и

$$(\operatorname{sh} x)^{(n)} = \begin{cases} \operatorname{ch} x, & n - \text{ нечетное }, \\ \operatorname{sh} x, & n - \text{ четное }. \end{cases}$$

Поэтому $f(0) = f^{(2k)}(0) = 0$ и $f^{(2k-1)}(0) = 1$, $k \in \mathbb{N}$, и

$$\operatorname{sh} x = \frac{x}{1!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{x^{2m-1}}{(2m-1)!} + r_{2m-1}(x),$$

где $r_{2m-1}(x) = \dfrac{e^{\theta x} - e^{-\theta x}}{2(2m)!} x^{2m} = \dfrac{\operatorname{sh}(\theta x)}{(2m)!} x^{2m}$.

3) $f(x) = \operatorname{ch} x$.

Формула Маклорена для этой функции выводится аналогично предыдущей и имеет вид

$$\operatorname{ch} x = 1 + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^{2m}}{(2m)!} + \frac{\operatorname{ch}(\theta x)}{(2m+1)!} x^{2m+1}.$$

4) $f(x) = \sin x$.

$(\sin x)^{(n)} = \sin\left(x + \dfrac{\pi n}{2}\right)$, поэтому $f(0) = f^{(2k)}(0) = 0$ и $f^{(2k-1)}(0) = (-1)^{k-1}, k \in \mathbb{N}$. Отсюда

$$\sin x = \frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \ldots + (-1)^{m-1} \frac{x^{2m-1}}{(2m-1)!} + \frac{\sin(\theta x + \pi m)}{(2m)!} x^{2m}.$$

5) $f(x) = \cos x$.

Эта формула получается аналогично предыдущей и имеет вид

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \ldots + (-1)^m \frac{x^{2m}}{(2m)!} + \frac{\cos\left(\theta x + \dfrac{(2m+1)\pi}{2}\right)}{(2m+1)!} x^{2m+1}.$$

6) $f(x) = \ln(1+x)$.

$(\ln(1+x))^{(n)} = \dfrac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{(1+x)^n}$, поэтому $f(0) = 0, f^{(n)}(0) = (-1)^{n-1}(n-1)!$ и

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \ldots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + (-1)^n \frac{x^{n+1}}{(n+1)(1+\theta x)^{n+1}}.$$

7) $f(x) = (1+x)^\alpha$.

$$((1+x)^\alpha)^{(n)} = \alpha \cdot (\alpha - 1) \ldots (\alpha - n + 1)(1+x)^{\alpha - n}.$$

Отсюда

$$f(0) = 1,$$

$$f'(0) = \alpha, \ldots,$$

$$f^{(k)}(0) = \alpha \cdot (\alpha - 1) \cdot \ldots (\alpha - k + 1,)$$

и

$$(1+x)^\alpha = 1 + \frac{\alpha}{1!}x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \ldots + \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}{n!}x^n +$$
$$+ \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n)(1+\theta x)^{\alpha-n-1}}{(n+1)!}x^{n+1}.$$

Функцию $(1+x)^\alpha$ будем называть **биномом** или **биномиальной фуикцией**. Ясно, что формула бинома Ньютона получается из формулы Маклорена для биномиальной функции при $\alpha \in \mathbb{N}$.

Отметим частные случаи формулы Маклорена для биномиальной функции:

а) Если $\alpha = -1$, то формула примет вид

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - \ldots + (-1)^n x^n + r_n(x).$$

б) Если в последней формуле заменить x на $-x$, то получим

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \ldots + x^n + r_n(x).$$

Замечания 1. Во всех фориулах остаточный член написан в форме Лагранжа, но его мозсно было бы написать в форме Пеано, например,

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - \ldots + (-1)^n x^n + o\left(x^n\right), \quad x \to 0.$$

2. В формулах для четных или нечетных функций степень у остаточного члена можно увеличить на 1. Например,

$$\operatorname{sh} x = \frac{x}{1!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{x^{2m-1}}{(2m-1)!} + \frac{e^{\theta x} + e^{-\theta x}}{2(2m+1)!} x^{2m+1}$$

Это возиожно, так как многочлен Маклорена для нечетной функиии долждсен цметь только нечетные степени, следовательно, слагаемое со степеньюю x^{2m} будет равно нулю.