КОМПЬЮТЕРНОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ТЕХНИЧЕСКИХ ЗАДАЧ

Лектор: Болегенова Салтанат Алихановна
+7 701 386 97 55
e-mail.: Saltanat.Bolegenova@kaznu.kz

ПРИНЦИПЫ ПОСТРОЕНИЯ РАЗНОСТНЫХ СХЕМ

Цель лекции - Основные понятия и обозначения теории разностных схем

3.1 Основные понятия и обозначения теории разностных схем

Существующий метод конечных разностей состоит в следующем.

Пусть состояние среды описывается дифференциальным уравнением изменения функции f непрерывного аргумента. Область непрерывного изменения аргумента заменяется некоторым конечным множеством точек (*узлов*). Расстояния между узлами называют *шагами*. Совокупность узлов составляет *сетку*, которая может быть *равномерной* или *неравномерной*. Если функция f зависит от одной переменной, то сетка является одномерной, если f является функцией нескольких переменных, то сетка является многомерной. Конечно-разностная сетка может быть равномерной по одной переменной и неравномерной – по другой. Например, на рисунке 1 изображена сетка, равномерная по x и неравномерная по y.

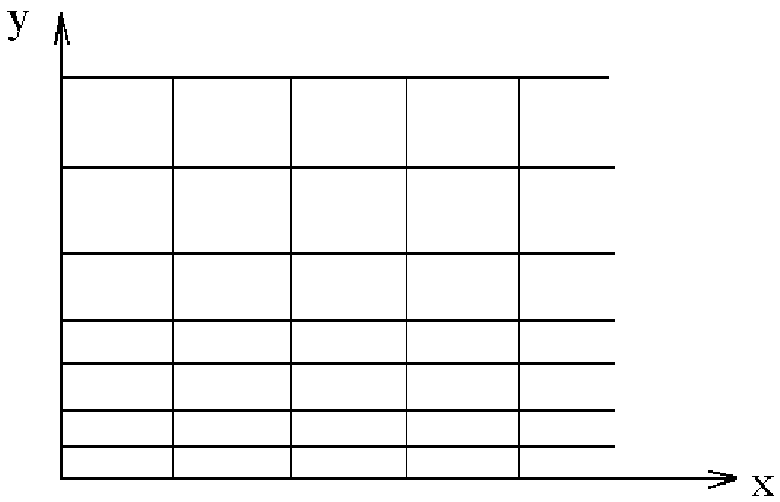


Рис.1. Конечно-разностная сетка

Функция, определенная на множестве узлов конечно-разностной сетки, называется *сеточной функцией* f_Δ. Производные, входящие в дифференциальное уравнение, заменяются (*аппроксимируются*) соответствующими приближенными алгебраическими соотношениями, или *конечно-разностными аналогами*.

Таким образом, дифференциальное уравнение для функции f непрерывного аргумента заменяется алгебраическим конечно-разностным уравнением для сеточной функции f_Δ. ***Конечно разностная схема*** *представляет собой систему дискретных алгебраических уравнений, аппроксимирующих дифференциальное уравнение с соответствующими граничными условиями*. В качестве приближенного решения дифференциального уравнения принимается решение соответствующего разностного уравнения – сеточная функция – в виде одно- или многомерной таблицы.

Совокупность узлов сетки, используемых при построении конечно-разностной схемы, называется ***шаблоном****.*

В дальнейшем мы будем использовать следующее модельное уравнение:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + u\frac{\partial f}{\partial x} = a\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \qquad (3.1)$$

Это уравнение выбрано потому, что оно учитывает локальное изменение искомой функции во времени (первое слагаемое в левой части), конвективный перенос (второе слагаемое в левой части) и молекулярный перенос (член в правой части уравнения). Коэффициент a равен кинематической вязкости ν, если f представляет собой скорость υ, коэффициенту диффузии D, если f является концентрацией c, и, наконец, это будет коэффициент температуропроводности, если f есть температура T. В последнем случае можно сказать, что при $f \equiv T$ уравнение (2.1) описывает нестационарный процесс изменения температуры в одномерном канале при течении в нем жидкости с постоянной скоростью u.

3.2 Методы представления дифференциальных уравнений в конечных разностях

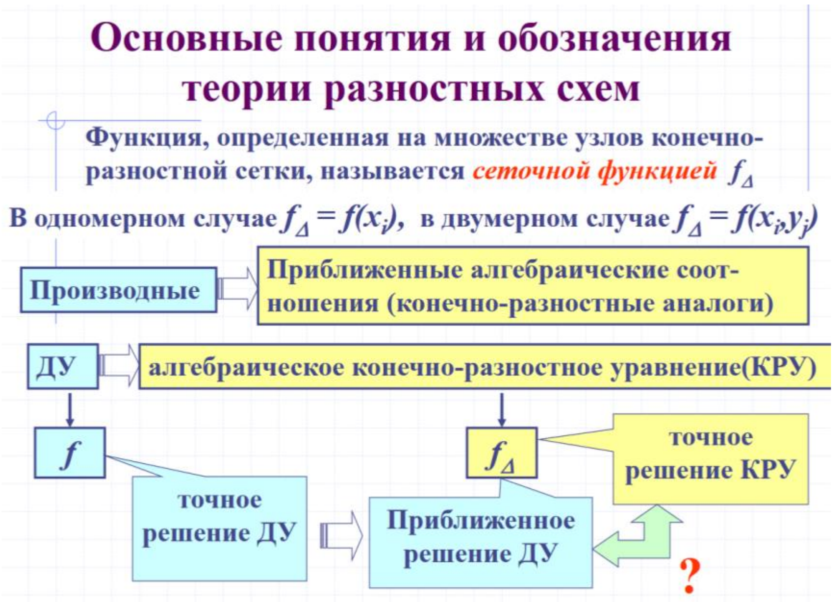
3.2.1 Метод разложения в ряд Тейлора

Используем разложение функции $f(x)$ в ряд Тейлора в окрестности точки x_i:

$$f(x_{i+1}) = f(x_i) + \left.\frac{df}{dx}\right|_i (x_{i+1} - x_i) + \frac{1}{2}\left.\frac{d^2 f}{dx^2}\right|_i (x_{i+1} - x_i)^2 +$$

$$+\frac{1}{6}\left.\frac{d^3 f}{dx^3}\right|_i (x_{i+1} - x_i)^3 + ЧВП,$$

где *ЧВП* – члены более высоких порядков.



Для простоты введем следующие обозначения, которые всегда будем использовать в дальнейшем:

$\Delta x = x_{i+1} - x_i$, $f_{i+1} = f(x_{i+1})$, $f_i = f(x_i)$, $f_{i-1} = f(x_{i-1})$.

Перепишем последнее выражение в новых обозначениях:

$$f_{i+1} = f_i + \left.\frac{df}{dx}\right|_i \Delta x + \frac{1}{2}\left.\frac{d^2 f}{dx^2}\right|_i \Delta x^2 + \\ + \frac{1}{6}\left.\frac{d^3 f}{dx^3}\right|_i \Delta x^3 + ЧВП. \tag{3.2}$$

Обозначим все члены выше второго порядка следующим образом:

$$O(\Delta x^2) = \frac{1}{2}\left.\frac{d^2 f}{dx^2}\right|_i \Delta x^2 + \frac{1}{6}\left.\frac{d^3 f}{dx^3}\right|_i \Delta x^3 + ЧВП,$$

тогда (2.2) будет иметь вид:

$$f_{i+1} = f_i + \left.\frac{df}{dx}\right|_i \Delta x + O(\Delta x^2).$$

Обозначение $O(\Delta x^2)$ означает, что наименьший порядок всех следующих слагаемых равен двум; остальные слагаемые имеют больший порядок малости. Найдем отсюда первую производную в точке i:

$$\left.\frac{df}{dx}\right|_i = \frac{f_{i+1} - f_i}{\Delta x} + O(\Delta x)\,.$$

Обозначение *O(Δx)* означает, что теперь наименьший порядок всех следующих слагаемых равен единице. Отбросив этот «хвост» разложения, получим приближенное выражение для первой производной:

$$\left.\frac{df}{dx}\right|_i \approx \frac{f_{i+1} - f_i}{\Delta x}\,. \qquad (3.3)$$

Это выражение называется *конечно-разностным соотношением* ***«вперед»*** или ***правосторонней*** *конечно-разностной аппроксимацией* первой производной. Выражение (2.3) аппроксимирует первую производную с ошибкой аппроксимации порядка Δx, т.е. *имеет* ***первый*** *порядок точности*.

Для получения конечно-разностного выражения для производной можно также использовать разложение функции *f(x)* в ряд Тейлора в точке x_{i-1}:

$$f_{i-1} = f_i - \left.\frac{df}{dx}\right|_i \Delta x + \frac{1}{2}\left.\frac{d^2 f}{dx^2}\right|_i \Delta x^2 - \\ - \frac{1}{6}\left.\frac{d^3 f}{dx^3}\right|_i \Delta x^3 + ЧВП \qquad (3.4)$$

Отсюда:

$$\left.\frac{df}{dx}\right|_i = \frac{f_{i+1} - f_i}{\Delta x} + O(\Delta x)$$

или

$$\left.\frac{df}{dx}\right|_i \approx \frac{f_i - f_{i-1}}{\Delta x}\,. \qquad (3.5)$$

Это выражение называется *конечно-разностным соотношением* ***«назад»*** или ***левосторонней*** *конечно-разностной аппроксимацией* первой производной. Выражение (3.5) также *имеет* ***первый*** *порядок точности*, как и (3.3).

Есть и третий способ получения конечно-разностного выражения для производной с помощью разложения функции *f(x)* в ряд Тейлора. Для этого вычтем почленно из уравнения (2.2) уравнение (2.4):

$$f_{i+1} - f_{i-1} = 2\left.\frac{df}{dx}\right|_i \Delta x + \frac{1}{3}\left.\frac{d^3 f}{dx^3}\right|_i \Delta x^3 + ЧВП\,.$$

Найдем отсюда производную:

$$\left.\frac{df}{dx}\right|_i = \frac{f_{i+1} - f_{i-1}}{2\Delta x} - \frac{1}{3}\left.\frac{d^3 f}{dx^3}\right|_i \Delta x^2 + ЧВП$$

или

$$\left.\frac{df}{dx}\right|_i = \frac{f_{i+1} - f_{i-1}}{2\Delta x} + O(\Delta x^2)\,.$$

Отсюда приближенное выражение:

$$\left.\frac{df}{dx}\right|_i \approx \frac{f_{i+1} - f_{i-1}}{2\Delta x}\,. \qquad (3.6)$$

Это выражение называется ***центральным*** *конечно-разностным соотношением* и *имеет* ***второй*** *порядок точности*, в отличие от соотношений (3.3) и (3.5), поскольку при его выводе отброшены члены второго порядка малости.

Таким образом, мы получили три различных приближенных выражения для первой производной. На первый взгляд кажется, что все три выражения мало отличаются друг от друга, но в действительности они могут давать значения для производной в точке i, отличающиеся в несколько раз, особенно там, где функция f резко меняется. Наиболее точное значение дает центральное конечно-разностное соотношение (3.6), поскольку оно имеет более высокий порядок точности. В то же время, использование выражения (3.6) не всегда дает хорошие результаты и может даже привести к неустойчивости конечно-разностной схемы, тогда как выбор менее точного выражения (3.3) или (3.5) может дать более успешные результаты. Мы видим, что в представлении простейшей производной (первого порядка от функции одной переменной) в конечных разностях имеется определенный произвол, что приводит к различным вариантам конечно-разностных схем.

Выведем теперь конечно-разностный аналог второй производной, используя два варианта разложения функции $f(x)$ в ряд Тейлора до пятого члена:

$$f_{i+1} = f_i + \left.\frac{df}{dx}\right|_i \Delta x + \frac{1}{2}\left.\frac{d^2 f}{dx^2}\right|_i \Delta x^2 +$$
$$+\frac{1}{6}\left.\frac{d^3 f}{dx^3}\right|_i \Delta x^3 + \frac{1}{24}\left.\frac{d^4 f}{dx^4}\right|_i \Delta x^4 + ЧВП.$$

$$f_{i-1} = f_i - \left.\frac{df}{dx}\right|_i \Delta x + \frac{1}{2}\left.\frac{d^2 f}{dx^2}\right|_i \Delta x^2 -$$
$$- \frac{1}{6}\left.\frac{d^3 f}{dx^3}\right|_i \Delta x^3 + \frac{1}{24}\left.\frac{d^4 f}{dx^4}\right|_i \Delta x^4 + ЧВП.$$

Сложим почленно эти два выражения:

$$f_{i+1} + f_{i-1} = 2 f_i + \left.\frac{d^2 f}{dx^2}\right|_i \Delta x^2 + \frac{1}{12}\left.\frac{d^4 f}{dx^4}\right|_i \Delta x^4 + ЧВП.$$

Отсюда:

$$\left.\frac{d^2 f}{dx^2}\right|_i = \frac{f_{i+1} + f_{i-1} - 2 f_i}{\Delta x^2} + O(\Delta x^2)$$

или окончательно:

$$\left.\frac{d^2 f}{dx^2}\right|_i \approx \frac{f_{i+1} + f_{i-1} - 2 f_i}{\Delta x^2} \tag{3.7}$$

Это выражение *имеет* ***второй*** *порядок точности*, как и (3.6), поскольку при его выводе отброшены члены второго порядка малости.

Понятие конечно-разностной аппроксимации можно распространить и на частные производные. Введем следующие обозначения:

$f_{i,j} = f(x_i,y_j)$, $f_{i,,j,k} = f(x_i,y_j,z_k)$, $f^{n}_{i,j,k} = f(t_n,x_i,y_j,z_k)$.

По аналогии с формулами для функции одной переменной можно с помощью разложения в ряд Тейлора получить следующие конечно-разностные соотношения для частных производных:

$$\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_i \approx \frac{f_{i+1,j} - f_{i-1,j}}{2\Delta x}, \quad \left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_i \approx \frac{f_{i,j+1} - f_{i,j-1}}{2\Delta y} \text{ и т.д.}$$

Запишем теперь уравнение (2.1) в конечных разностях, выбирая для аппроксимации первых производных центральные разностные соотношения:

$$\frac{f_i^{n+1} - f_i^{n-1}}{2\Delta t} + u\,\frac{f_{i+1}^{n} - f_{i-1}^{n}}{2\Delta x} = a\,\frac{f_{i+1}^{n} + f_{i-1}^{n} - 2 f_i^{n}}{\Delta x^2}. \tag{3.8}$$

Это уравнение имеет второй порядок точности. Изобразив шаблон (рисунок 2), можно убедиться, что это трехслойная пятиточечная схема. Здесь неизвестным является значение функции *f* на самом правом слое по времени, т.е. f_i^{n+1}, его легко можно найти из уравнения (2.8):

$$f_i^{n+1} = f_i^{n-1} - \frac{u\Delta t}{\Delta x}\left(f_{i+1}^{n} - f_{i-1}^{n}\right) +$$
$$+ \frac{2a\Delta t}{\Delta x^2}\left(f_{i+1}^{n} + f_{i-1}^{n} - 2f_i^{n}\right)$$

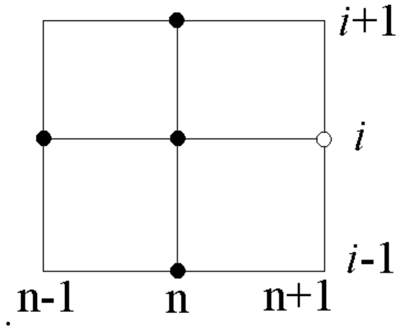


Рис.2. Трехслойная пятиточечная схема

Однако на практике оказывается, что такая схема является неприемлемой. Для всех возможных $\Delta t>0$ эта схема численно неустойчива, т.е. приводит к возникновению хаотических решений, не имеющих ничего общего с решением исходного дифференциального уравнения (3.1).

Если вместо центральных разностей в нестационарном члене использовать разности вперед по времени, то эта проблема решается. В этом случае получаем следующую конечно-разностную схему:

$$\frac{f_i^{n+1} - f_i^{n}}{\Delta t} + u\frac{f_{i+1}^{n} - f_{i-1}^{n}}{2\Delta x} = a\frac{f_{i+1}^{n} + f_{i-1}^{n} - 2f_i^{n}}{\Delta x^2} \qquad (3.9)$$

или

$$f_i^{n+1} = f_i^{n} - \frac{u\Delta t}{2\Delta x}\left(f_{i+1}^{n} - f_{i-1}^{n}\right) +$$
$$+ \frac{a\Delta t}{\Delta x^2}\left(f_{i+1}^{n} + f_{i-1}^{n} - 2f_i^{n}\right). \qquad (3.10)$$

В дальнейшем мы убедимся, что эта схема устойчива, по крайней мере, при некоторых условиях, наложенных на Δt и Δx. В то же время эта схема менее точная, чем (2.8): она имеет первый порядок точности по времени и второй – по пространственным переменным. Из шаблона видно (рисунок 3), что это двухслойная четырехточечная схема.

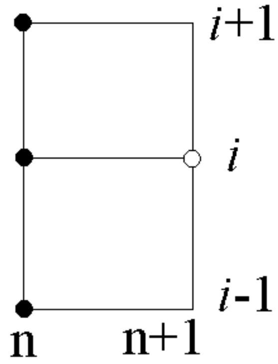


Рис.3. Двухслойная четырехточечная схема

Контрольные вопросы:

1. Какое ДУ является линейным?
2. Какое ДУ является однородным?
3. Как определяется порядок ДУ?
4. Какие типы ДУ II порядка Вы знаете?
5. Чем отличается равномерная сетка от неравномерной?
6. Что такое «сеточная функция»?
7. Что такое «конечно-разностная схема»?
8. Что такое «шаблон»?