Лекция 11. Циркуляция векторного поля и ротор

Пусть в области $D \subset \mathbb{R}^3$ заданы кепрерывное векторное поле $\boldsymbol{a}(M)$ и гладкая кривая L, на которой определено направление обхода выбором начальной и конечной точек. На этой кривой в каждой точке M в соответствии с направлением обхода можно определить единичный касательный вектор $t(M)$, который является непрерывной функцией точки (рис. 1).

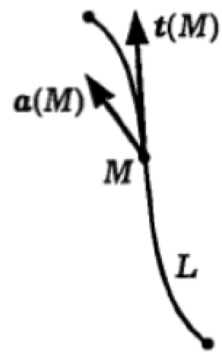

Рис. 1

Криволинейный интеграп

$$I_L = \int\limits_L \boldsymbol{a}\boldsymbol{t} ds = \int\limits_L a_t(M) ds, \tag{11.1}$$

где ds - дифференциал длины дуги кривой L, в теории поля называют линейжым иктегралом от векторного поля $\boldsymbol{a}$ вдоль кривой L.

Понятие линейного интеграла легко переносится на произвольные кусочно гладкие кривые. Для его существования достаточно, чтобы кривая была кусочно гладкой, а векторное поле - кусочно непрерывным на L.

Замечание 11.1. В случае силового поля линейный интеграл вдоль кривой L представляет собой работу, которую силовое поле совершает при перемещении материальной точки вдоль кривой из ее начальной точки в конечную. Иногда о линейном интеграле как о работе говорят в случае произвольного векторного поля. #

Линейный интеграл по замкнутой кривой (контуру) традиционно называют чиркуляиией векторного поля. Это понятие было введено в 1858 г. Г.Л.Ф. Гельмгольцем [1], а термин "циркуляция" (от латинского слова **circulatio** -

[1] Г.Л.Ф. Гельмгольц (1821-1894) - немецкий физик, математик, физиолог и психолог

вращение) предложил У. Томсон [2].

Пример 11.1.

Векторное поле скоростей твердого тела, вращающегося вокруг оси с угловой скоростью $\mathbf{\Omega}$, описывается векторной функцией $\boldsymbol{v}(\boldsymbol{r}) = \mathbf{\Omega}\times\boldsymbol{r}$ (см. пример 9.3, Лекция 9). В качестве контура интегрирования выберем окружность L с центром на оси вращения в плоскости, перпендикулярной оси вращения. Центр окружности возьмем как начало радиус-вектора $\boldsymbol{r}$. Циркуляция Γ_L векторного поля $\boldsymbol{v}(\boldsymbol{r})$ вдоль L может быть представлена в виде

$$\Gamma_L = \oint\limits_L vtds = \oint\limits_L (\mathbf{\Omega}\times\boldsymbol{r})\boldsymbol{t}ds = \oint\limits_L \boldsymbol{\Omega r t}ds, \tag{11.2}$$

где под знаком последнего интеграла стоит смешанное произведение трех векторов.

На окружности L выберем направление обхода против часовой стрелки, если смотреть на окружность с конца вектора $\mathbf{\Omega}$, приложенного к точке O. Тогда в каждой точке $M\in L$ вектор $\mathbf{\Omega}$, радиус-вектор $\boldsymbol{r}$ этой точки и касательный вектор $\boldsymbol{t}(M)$ к окружности L в точке M образуют правую тройку (рис. 2).

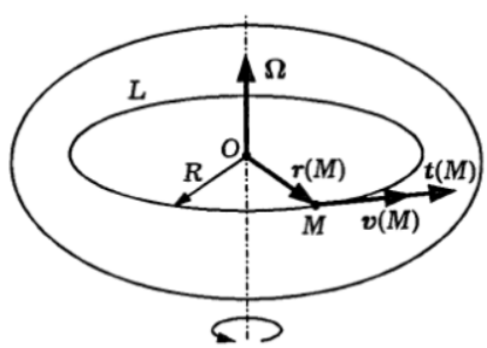

Рис. 2

Поскольку эти векторы попарно ортогональны, их смешанное произведение равно произведению длин этих векторов, т.е. $\boldsymbol{\Omega r t} = \Omega R = const$, где Ω – длина вектора Ω. Отсюда следует, что $\Gamma_L = 2\pi\Omega R^2$. Отметим, что значение контурного интеграла оказалось пропорциональным площади круга, ограниченного этим контуром. Отношение циркуляции вдоль окружности к

[2]У. Томсон, лорд Кельви (1824-1907) - английский физик и математик

площади этой окружности равно $\dfrac{\Gamma_L}{F} = 2\Omega$ и не зависит от радиуса окружности. #

Ненулевое значение циркуляции силового поля указывает на то, что это поле производит работу при перемещении материальной точки, возвращающейся в исходное положение. В этом случае говорят о вихревом характере силового поля. Чтобы охарактеризовать, в какой степени и где поле является вихревым, поступим следующим образом. Выберем некоторый единичный вектор $\boldsymbol{n}$, точку M_0 в области определения векторного поля a. В плоскости σ, перпендикулярной вектору $\boldsymbol{n}$ и проходящей через точку M_0, возьмем простой кусочно гладкий контур L, окружающий точку M_0 и ограничивающий в плоскости область с площадью F (рис. 3).

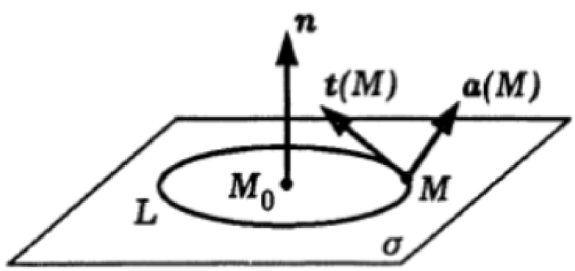

Рис. 3

Предел

$$\omega_n(M_0) = \lim_{L \to M_0} \frac{1}{F} \oint\limits_L \boldsymbol{a}\boldsymbol{t}ds \tag{11.3}$$

отношения циркуляции вдоль контура к площади, ограниченной этим контуром, если он существует, называют завихренностью векторного поля в точке M_0 в направлении вектора $\boldsymbol{n}$.

Например, завихренность плоского векторного поля скоростей точек вращающегося твердого тела в направлении вектора $\boldsymbol{\Omega}$ угловой скорости для любой точки M_0 на оси вращения будет равна 2Ω (см. пример 11.1).

Оказывается, что завихренность векторного поля $\boldsymbol{a}(M)$ в точке M_0 в направлении единичного вектора n можно представить как проекцию некоторого вектора $\boldsymbol{\omega}$ на направление вектора n. Вектор $\boldsymbol{\omega}$ можно определить его проекциями на направления базисных векторов $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3$. Его называют тором (иногда вихрем) векторного поля в точке M_0 и обозначают $\operatorname{rot} \boldsymbol{a}(M)$. Термин "ротор" (от латинского слова **roto** - вращаю) и обозначение rot ввел в 1878 г. У. Клиффорд, но до него это обозначение наряду с обозначением **curl** (по-английски вихрь, завиток, спираль) применял Дж. Максвелл.

Поскольку завихренность векторного поля $\boldsymbol{a}(M)$ в точке M_0 по направлению n есть проекция на это направление вектора $\operatorname{rot} \boldsymbol{a}\,(M_0)$, наибольшее значение в точке M_0 она достигает в направлении, определяемом самим ротором векторного поля. Таким образом, можно сказать, что ротор векторного поля в точке M_0 - это вектор, в направлении которого завихренность поля в точке M_0 максимальная, причем длина вектора равна этому максимальному значению.

Понятиям циркуляции и ротора можно дать *гидродинамическую интерпретацию.*

Рассмотрим векторное поле $\boldsymbol{v}(M)$ скоростей частиц жидкости, заданное в некоторой пространственной области D. Поместим мысленно в точку $M_0 \in D$ центр тонкого плоского диска турбинки, лопасти которой расположены по ее ободу, представляющему собой окружность L радиуса R (рис. 4).

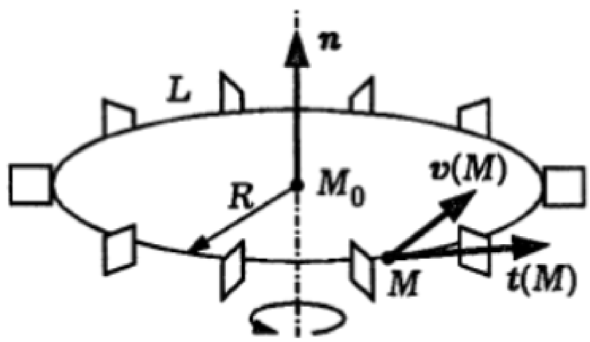

Рис. 4

Предположим, что погружение турбинки в жидкость не изменяет поля скоростей и при воздействии частиц жидкости на лопасти турбинка может вращаться без трения относительно своей оси. В каждой точке $M \in L$ действие жидкости на лопасти определяется проекцией вектора $v(M)$ на направление вектора $\boldsymbol{t}(M)$, касательного к L в этой точке, т.е. значением $v_t(M) = \boldsymbol{v}(M)\boldsymbol{t}(M)$. Суммарное воздействие жидкости на турбннку при бесконечно большом числе лопастей будет пропорционально интегралу

$$\Gamma_L = \oint\limits_L \boldsymbol{v}\boldsymbol{t}ds$$

т.е. циркуляции поля скоростей жидкости по контуру L.

Предположим, что турбинка имеет малые размеры, т.е. величина R мала. В этом случае угловая скорость турбинки будет характеризовать завихренность поля скоростей жидкости в точке M_0 в направлении оси турбинки. Изменяя направление оси, можно найти такое ее направление, при котором угловая скорость вращения турбинки будет наибольшей. Это направление совпадает с направлением ротора $\operatorname{rot} v\,(M_0)$ поля скоростей в точке M_0, а угловая скорость вращения турбинки при этом пропорциональна $|\operatorname{rot} \boldsymbol{v}\,(M_0)|$.

Циркуляция векторного поля и ротор не связаны с выбором какой-либо системы координат, однако вычисление их значений возможно лишь в том случае, если векторное поле будет представлено в некоторой системе координат. Выясним, как выражается ротор векторного поля $\boldsymbol{a}(M)$, представленного в прямоугольной системе координат $Ox_1x_2x_3$ функцией

$$\boldsymbol{a}\,(x_1,x_2,x_3)=\left(a_1\,(x_1,x_2,x_3)\,a_2\,(x_1,x_2,x_3)\,a_3\,(x_1,x_2,x_3)\right)^T.$$

В этом случае циркуляция Γ_L векторного поля $a(M)$ вдоль плоского простого контура L представляется криволинейным интегралом от координатных функций a_1,a_2,a_3 векторного поля $\boldsymbol{a}(M)$:

$$\Gamma_L=\oint\limits_L \boldsymbol{a}\boldsymbol{t}ds=\oint\limits_L a_1dx_1+a_2dx_2+a_3dx_3. \tag{11.4}$$

Если векторное поле $\boldsymbol{a}(M)$ непрерывно дифференцируемо в области D, содержащей контур L, то к этому криволинейному интегралу можно применить формулу Стокса:

$$\begin{gathered}\Gamma_L=\oint\limits_L a_1dx_1+a_2dx_2+a_3dx_3=\int\limits_S\left(\left(\frac{\partial a_2}{\partial x_1}-\frac{\partial a_1}{\partial x_2}\right)n_3+\right.\\ \left.+\left(\frac{\partial a_3}{\partial x_2}-\frac{\partial a_2}{\partial x_3}\right)n_1+\left(\frac{\partial a_1}{\partial x_3}-\frac{\partial a_3}{\partial x_1}\right)n_2\right)dS\end{gathered} \tag{11.5}$$

где S - замкнутая область в плоскости контура L, ограниченная этим контуром, а n_i - направляющие косинусы вектора $\boldsymbol{n}$ нормали к плоскости контура L, выбранного так, что заданное на контуре направление обхода направлено против часовой стрелки, если смотреть с конца вектора $\boldsymbol{n}$. Стягивая контур L к фиксированной точке M_0, получим выражение для проекции ротора векторного поля $\boldsymbol{a}(M)$ в точке M_0 на направление $\boldsymbol{n}$ (F обозначает площадь плоской замкнутой области S)

$$(\operatorname{rot}\boldsymbol{a}\,(M_0))\,\boldsymbol{n} = \lim_{L\to M_0}\frac{1}{F}\int\limits_S\left(\frac{\partial a_2}{\partial x_1}-\frac{\partial a_1}{\partial x_2}\right)n_3 dS+$$
$$+\lim_{L\to M_0}\frac{1}{F}\int\limits_S\left(\frac{\partial a_3}{\partial x_2}-\frac{\partial a_2}{\partial x_3}\right)n_1 dS+\lim_{L\to M_0}\frac{1}{F}\int\limits_S\left(\frac{\partial a_1}{\partial x_3}-\frac{\partial a_3}{\partial x_1}\right)n_2 dS.$$

Пределы в правой части равенства в силу непрерывности подынтегральных функций равны значениям этих функций в точке M_0. Таким образом,

$$\begin{aligned}(\operatorname{rot}\boldsymbol{a}\,(M_0))\,\boldsymbol{n} &= \left(\frac{\partial a_2}{\partial x_1}-\frac{\partial a_1}{\partial x_2}\right)n_3+\\ &+\left(\frac{\partial a_3}{\partial x_2}-\frac{\partial a_2}{\partial x_3}\right)n_1+\left(\frac{\partial a_1}{\partial x_3}-\frac{\partial a_3}{\partial x_1}\right)n_2\end{aligned} \tag{11.6}$$

Формула (11.6) выражает завихренность векторного поля $\boldsymbol{a}(M)$ в точке M_0 в направлении вектора $\boldsymbol{n} = \begin{pmatrix} n_1 & n_2 & n_3\end{pmatrix}^T$. Из вида правой части формулы вытекает, что завихренность есть проекция на $\boldsymbol{n}$ вектора с координатами $\dfrac{\partial a_3}{\partial x_2}-\dfrac{\partial a_2}{\partial x_3}, \dfrac{\partial a_1}{\partial x_3}-\dfrac{\partial a_3}{\partial x_1}, \dfrac{\partial a_2}{\partial x_1}-\dfrac{\partial a_1}{\partial x_2}$. Таким образом, найден ротор векторного поля в точке M_0, а указанные выражения есть его координаты, т.е.

$$\begin{aligned}\operatorname{rot}\boldsymbol{a}\,(M_0) &= \left(\frac{\partial a_3}{\partial x_2}-\frac{\partial a_2}{\partial x_3}\right)\boldsymbol{e}_1+\\ &+\left(\frac{\partial a_1}{\partial x_3}-\frac{\partial a_3}{\partial x_1}\right)\boldsymbol{e}_2+\left(\frac{\partial a_2}{\partial x_1}-\frac{\partial a_1}{\partial x_2}\right)\boldsymbol{e}_3.\end{aligned} \tag{11.7}$$

Координаты ротора по своему виду похожи на координаты векторного произведения двух векторов. Учитывая это, ротор векторного поля можно записать с помощью символического определителя третьего порядка

$$\operatorname{rot}\boldsymbol{a}\,(M_0) = \begin{vmatrix} \boldsymbol{e}_1 & \boldsymbol{e}_2 & \boldsymbol{e}_3\\ \dfrac{\partial}{\partial x_1} & \dfrac{\partial}{\partial x_2} & \dfrac{\partial}{\partial x_3}\\ a_1 & a_2 & a_3\end{vmatrix}, \tag{11.8}$$

который аналогичен определителю, используемому при вычислении векторного произведения. Если векторное пояе плоское и задано функцией

$\boldsymbol{a}(x_1, x_2) = (a_1(x_1, x_2) \quad a_2(x_1, x_2))^T$, то ротор этого векторного поля будет иметь вид

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{a}(M_0) = \left(\frac{\partial a_2}{\partial x_1} - \frac{\partial a_1}{\partial x_2}\right) \boldsymbol{e}_3$$

Пример 11.2.

Вычислим ротор векторного поля скоростей твердого тела, вращающегося вокруг неподвижной точки O.

В каждый момент времени t векторное поле скоростей $v(M)$ описывается векторной функцией $\boldsymbol{v}(\boldsymbol{r}) = \boldsymbol{\Omega} \times \boldsymbol{r}$, где $\boldsymbol{\Omega}-$ вектор мгновенной угловой скорости. Выберем прямоугольную систему координат $O\mathbf{x}_1\mathbf{x}_2x_3$ с началом в точке O и представим вектор $\boldsymbol{\Omega}$ его координатами: $\boldsymbol{\Omega} = (\Omega_1\Omega_2\Omega_3)^T$ (рис. 5).

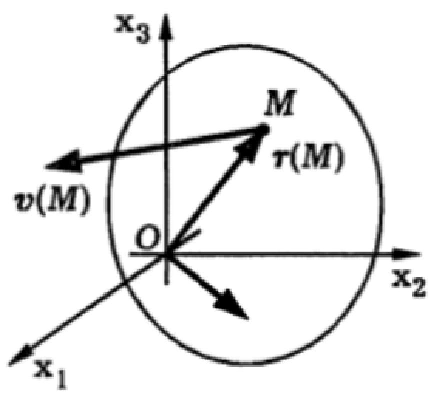

Рис. 5

Тогда, вычислия векторное произведение в координатах, получим

$$\boldsymbol{v}(M) = \begin{vmatrix} \boldsymbol{e}_1 & \boldsymbol{e}_2 & \boldsymbol{e}_3 \\ \Omega_1 & \Omega_2 & \Omega_3 \\ x_1 & x_2 & x_3 \end{vmatrix} =$$
$$= (\Omega_2 x_3 - \Omega_3 x_2)\,\boldsymbol{e}_1 + (\Omega_3 x_1 - \Omega_1 x_3)\,\boldsymbol{e}_2 + (\Omega_1 x_2 - \Omega_2 x_1)\,\boldsymbol{e}_3.$$

Теперь, используя формуду (11.8) вычисления ротора в координатах, находим

$$\operatorname{rot} v = \begin{vmatrix} \boldsymbol{e}_1 & \boldsymbol{e}_2 & \boldsymbol{e}_3 \\ \dfrac{\partial}{\partial x_1} & \dfrac{\partial}{\partial x_2} & \dfrac{\partial}{\partial x_3} \\ \Omega_2 x_3 - \Omega_3 x_2 & \Omega_3 x_1 - \Omega_1 x_3 & \Omega_1 x_2 - \Omega_2 x_1 \end{vmatrix} =$$
$$= 2\Omega_1 \boldsymbol{e}_1 + 2\Omega_2 \boldsymbol{e}_2 + 2\Omega_3 \boldsymbol{e}_3 = 2\Omega.$$

Таким образом, в любой точке M вращающегося тела ротор векторного поля скоростей равен удвоенному вектору мгновенной угловой скорости вращения этого тела. #

Операция вычисления ротора векторного поля является линейной. Если векторные поля $\boldsymbol{a}(M)$ и $\boldsymbol{b}(M)$ дифференцируемы в области D, то, используя линейность операции дифференцирования, можно показать, что в этой области

$$\operatorname{rot}(\alpha\boldsymbol{a} + \beta\boldsymbol{b}) = \alpha \operatorname{rot} \boldsymbol{a} + \beta \operatorname{rot} \boldsymbol{b}$$

где $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Кроме того, можно записать правило для ротора произведения векторного поля на скалярное, аналогичное правилу дифференцирования функций:

$$\operatorname{rot}(f\boldsymbol{a}) = f \operatorname{rot} \boldsymbol{a} - \boldsymbol{a} \times \operatorname{grad} f. \tag{11.9}$$

В самом деле, используя представление (11.7) ротора в координатах и правило дифференцирования произведения функций, находим

$$\operatorname{rot}(f\boldsymbol{a}) = \boldsymbol{e}_1\left(\frac{\partial\,(fa_3)}{\partial x_2} - \frac{\partial\,(fa_2)}{\partial x_3}\right) + \boldsymbol{e}_2\left(\frac{\partial\,(fa_1)}{\partial x_3} - \frac{\partial fa_3}{\partial x_1}\right) +$$
$$+ \boldsymbol{e}_3\left(\frac{\partial\,(fa_2)}{\partial x_1} - \frac{\partial\,(fa_1)}{\partial x_2}\right) = \boldsymbol{e}_1\left(\frac{\partial a_3}{\partial x_2} - \frac{\partial a_2}{\partial x_3}\right) f + \boldsymbol{e}_2\left(\frac{\partial a_1}{\partial x_3} - \frac{\partial a_3}{\partial x_1}\right) f +$$
$$+ \boldsymbol{e}_3\left(\frac{\partial a_2}{\partial x_1} - \frac{\partial a_1}{\partial x_2}\right) f - \boldsymbol{e}_1\left(a_2\frac{\partial f}{\partial x_3} - a_3\frac{\partial f}{\partial x_2}\right) - \boldsymbol{e}_2\left(a_3\frac{\partial f}{\partial x_1} - a_1\frac{\partial f}{\partial x_3}\right) -$$
$$- \boldsymbol{e}_3\left(a_1\frac{\partial f}{\partial x_2} - a_2\frac{\partial f}{\partial x_1}\right) = f \operatorname{rot} \boldsymbol{a} - \boldsymbol{a} \times \operatorname{grad} f.$$

В частности, если $\boldsymbol{a}-$ постоянный вектор, то $\operatorname{rot} \boldsymbol{a} = 0$ и

$$\operatorname{rot}(f\boldsymbol{a}) = -\boldsymbol{a} \times \operatorname{grad} f$$

.

Пример 11.3.

Вычислим ротор центрального векторного поля $a(M)$, заданного в области D векторной функцией $\boldsymbol{a}(\boldsymbol{r}) = f(r)\boldsymbol{r}$, где $r = |\boldsymbol{r}|$, а функция $f(r)$ является дифференцируемой.

В соответствии с формулой (11.9) имеем

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{a} = \operatorname{rot}(f(r)\boldsymbol{r}) = f(r) \operatorname{rot} \boldsymbol{r} - \boldsymbol{r} \times \operatorname{grad} f(r). \tag{11.10}$$

Выберем прямоугольную систему координат $O\mathbf{x}_1x_2x_3$ с началом координат в центре O векторного поля $a(M)$. Градиент центрального скалярного поля $f(r)$ колинеарен радиус-вектору $\boldsymbol{r}$:

$$\operatorname{grad} f\left(\sqrt{x^2+y^2+z^2}\right) =$$

$$= \left(\frac{f'(r)x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\frac{f'(r)y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\frac{f'(r)z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\right)^T = \frac{f'(r)}{r}\boldsymbol{r}.$$

Значит, второе слагаемое в правой части формулы (11.10) равно нулю как векторное произведение двух коллинеарных векторов. Так как $\boldsymbol{r} = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix}^{\mathbf{T}}$, то

$$\operatorname{rot}\boldsymbol{r} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{e}_1 & \boldsymbol{e}_2 & \boldsymbol{e}_3 \\ \dfrac{\partial}{\partial x_1} & \dfrac{\partial}{\partial x_2} & \dfrac{\partial}{\partial x_3} \\ x_1 & x_2 & x_3 \end{vmatrix} = \mathbf{0}.$$

Итак, оба слагаемые в правой части формулы (11.10) нулевые и, следовательно, ротор центрального векторного поля также нулевой. Отметим, что это верно и для осевого векторжого поля, которое можно представить в виде $f(r)\boldsymbol{r}$, где в данном случае вектор $\boldsymbol{r}$ есть проекция радиус-вектора точки на плоскость, перпендикулярную оси поля. #

Понлтия циркуляции и ротора векторного поля позволяют получить краткую **векторную запись формулы Стокса**. Для этого левую часть формулы Стокса (11.5) следует интерпретировать как циркуляцию векторного поля, а правую часть как поток ротора векторного поля через поверхность.

Теорема 11.1. *(теорема Стокса). Если векторное поле $a(M)$ непрерывно дифференцируемо в пространственной области D, то для любой кусочно гладкой поверхности S в D, ограниченной простым кусочно гладким контуром L, верно равенство*

$$\oint\limits_L \boldsymbol{a}\boldsymbol{t}ds = \int\limits_S (\operatorname{rot}\boldsymbol{a})\boldsymbol{n}dS.$$

Вопросы для закрепления

1. Что такое циркуляция векторного поля вдоль кривой, и как она рассчитывается?
2. Каков физический смысл циркуляции векторного поля в случае силового поля?
3. В каких случаях циркуляция векторного поля вдоль замкнутого контура не равна нулю?
4. Что означает завихренность векторного поля, и как она определяется?
5. Как завихренность векторного поля связана с направлением нормали к поверхности?
6. Что называют ротором векторного поля, и как он характеризует вихревое поведение поля?
7. Как формула для ротора векторного поля выражается в прямоугольной системе координат?
8. Как вычисляется ротор векторного поля для осевого векторного поля?
9. Что представляет собой теорема Стокса и как она связывает циркуляцию векторного поля с его ротором?
10. Какой физический смысл можно дать понятию ротора векторного поля?