Лекция 6. Поверхностный интеграл первого рода. Приложения поверхностного интеграла первого рода

Поверхностный интеграл первого рода

Поверхностный интеграл первого рода представляет собой такое же естественное обобщение двойного интеграла, каким является криволинейный интеграл первого рода по отношению к обычному определенному интегралу. Это обобщение строится на основе определения площади криволикеймой поверхюости.

Введем в пространстве прямоугольную декартову систему координат z. Пусть на некоторой двусторонней гладкой (или кусочно-гладкой) поверхности Φ, ограниченной кусочно-гладким контуром L, определена функция $f(M) = f(x, y, z)$. Выберем разбиение поверхности Φ на конечное число частичных областей $\Phi_i, i = \overline{1, n}$, с площадями ΔS_i. В каждой частичной области Φ_i возьмем произвольную точку $M_i\left(x_i; y_i; z_i\right) \in \Phi_i$. Пусть d - максимальный из диаметров d_i частичных областей $\Phi_i, i = \overline{1, n}$. Сумму

$$S_n' = \sum_{i=1}^{n} f\left(x_i, y_i, z_i\right) \Delta S_i \tag{6.1}$$

назовем интегральной суммой для функции $f(x, y, z)$ по поверхности Φ.

Определение 6.1. Если интегральная сумма (6.23) при $d \to 0$ имеет конечный предел I, не зависящий ни от способа разбиения поверхности Φ на частичные области $\Phi_i \subset \Phi, i = = \overline{1, n}$, ни от выбора точек $M_i\left(x_i; y_i; z_i\right) \in \Phi_i$, то этот предел называют поверхностным интегралом первого рода от функции $f(x, y, z)$ по поверхности Φ и обозначают

$$I = \int\limits_{\Phi} f(x, y, z) dS.$$

Итак, используя (6.1), имеем

$$I = \int\limits_{\Phi} f(x, y, z) dS = \lim_{d \to 0} \sum_{i=1}^{n} f\left(x_i, y_i, z_i\right) \Delta S_i. \tag{6.2}$$

Раскрывая смысл предельного перехода в (6.2), устанавливаем следующее: число I называют поверхностным интегралом первого рода от функции $f(x, y, z)$ по поверхности Φ, если для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое

$\delta(\varepsilon) > 0$, что при любом разбиении поверхности Φ на частичные области $\Phi_i \subset \Phi, i = \overline{1, n}$, с диаметрами d_i и площадями ΔS_i, подчиненными единственному условию $d = \max\limits_{i=\overline{1,n}} d_i < \delta(\varepsilon)$, и при произвольном выборе точек $M_i\,(x_i; y_i; z_i) \in \Phi_i$ выполняется неравенство

$$\left| I - \sum_{i=1}^{n} f\,(x_i, y_i, z_i)\,\Delta S_i \right| < \varepsilon. \tag{6.3}$$

Из определения 6.1 поверхностного интеграла первого рода следует, что он не зависит от выбора стороны поверхности.

Теорема 6.1. *Пусть Φ - гладкая поверхность, не имеющая особых точек и заданная параметрически уравнениями*

$$\begin{cases} x = x(u, v) \\ y = y(u, v), \quad (u; v) \in D \subset \mathbb{R}^2 \\ z = z(u, v) \end{cases}$$

и пусть функция $f(M) = f(x, y, z)$ непрерывна во всех точках $M \in \Phi$, включая край поверхности Φ. Тогда поверхностный интеграл первого рода (6.2) *существует и может быть вычислен по формуле*

$$\int\limits_{\Phi} f(x, y, z)dS = \iint\limits_{D} f(x(u, v), y(u, v), z(u, v))\sqrt{EG - F^2}dudv \tag{6.4}$$

где функции E, F, G переменных u и v определены соотношениями

$$E = \left(r'_u\right)^2 = \left(x'_u(u, v)\right)^2 + \left(y'_u(u, v)\right)^2 + \left(z'_u(u, v)\right)^2, \tag{6.5}$$

$$F = r'_u r'_v = x'_u(u, v)x'_v(u, v) + y'_u(u, v)y'_v(u, v) + z'_u(u, v)z'_v(u, v), \tag{6.6}$$

$$G = \left(r'_v\right)^2 = \left(x'_v(u, v)\right)^2 + \left(y'_v(u, v)\right)^2 + \left(z'_v(u, v)\right)^2. \tag{6.7}$$

□ Согласно определению, разбиению T поверхности Φ на частичные области $\Phi_i, i = \overline{1, n}$, отвечает разбиение T_D области D определения функций в параметрических уравнениях

$$\begin{cases} x = x(u, v), \\ y = y(u, v), \quad (u; v) \in D \subset \mathbb{R}^2, \\ z = z(u, v), \end{cases} \tag{6.8}$$

где $x(u,v)$, $y(u,v)$, $z(u,v)$ – непрерывные функции в их области определения D на частичные области D_i. Если к нуло стремится диаметр $d(T)$ разбиения T, то диаметр $d\left(T_D\right)$ разбиения T_D также стремится к нуло, и наоборот.

Итак, выберем разбиение T поверхности Φ на частичные области Φ_i и соответствующее ему разбиение T_D замкнутой области D на частичные области $D_i, i=\overline{1,n}$. В каждой частичной области Φ_i возьмем произвольную точку $M_i\left(x_i; y_i; z_i\right)$. Этой точке отвечает точка ($u_i; v_i$) в частичной области D_i, так что

$$x_i = x\left(u_i, v_i\right), \quad y_i = y\left(u_i, v_i\right), \quad z_i = z\left(u_i, v_i\right). \tag{6.9}$$

Для площади поверхности ΔS_i частичной области Φ_i имеем

$$\Delta S_i = \iint\limits_{D_i} \sqrt{EG - F^2} du dv.$$

Применяя теорему о среднем змачении для двойного интеграла, получаем

$$\Delta S_i = \sqrt{\widetilde{E}_i \widetilde{G}_i - \widetilde{F}_i^2} \Delta \widetilde{S}_i$$

где $\widetilde{E}_i, \widetilde{F}_i, \tilde{G}_i$– значения функций E, F, G в некоторой точке $(\tilde{u}_i; \tilde{v}_i) \in D_i$, а $\Delta\tilde{S}_i$ - площадь D_i. Тогда интегральную сумму для поверхностного интеграла в левой части (6.4) с учетом (6.9) можно представить в виде

$$S_n' = \sum_{i=1}^{n} f\left(x\left(u_i, v_i\right), y\left(u_i, v_i\right), z\left(u_i, v_i\right)\right) \sqrt{\tilde{E}_i \tilde{G}_i - \tilde{F}_i^2} \Delta \tilde{S}_i.$$

Отличие суммы S_n' от интегральной суммы

$$S_n'' = \sum_{i=1}^{n} f\left(x\left(u_i, v_i\right), y\left(u_i, v_i\right), z\left(u_i, v_i\right)\right) \sqrt{E_i G_i - F_i^2} \Delta \widetilde{S}_i$$

для двойного интеграла в правой части (6.4), в которой E_i, F_i, G_i - значения E, F, G в точке $(x_i; y_i)$, состоит в том, что слагаемые в S_n'' вычислены в произвольной точке $(u_i; v_i) \in D_i$, тогда как в S_n' сомножитель $\sqrt{EG - F^2}$ в каждом из слагаемых вычислен в точке $(\tilde{u}_i; \tilde{v}_i) \in D_i$, положение которой диктуется теоремой о среднем значении для двойного интеграла.

Рассмотрим разность

$$\left|S_n' - S_n''\right| = \sum_{i=1}^{n} f_i \left(\sqrt{\widetilde{E}_i \widetilde{G}_i - \widetilde{F}_i^2} - \sqrt{E_i G_i - F_i^2}\right) \Delta \tilde{S}_i,$$

где $f_i = f\left(x\left(u_i, v_i\right), y\left(u_i, v_i\right), z\left(u_i, v_i\right)\right)$. Поскольку сложная функция $f(x(u,v), y(u,v), z(u,v))$ непрерывна в замкнутой области D, то она и ограничена в этой области, т.е. $|f(x,y)| \leqslant K$ в D для некоторой константы K. Следовательно, $|f_i| \leqslant K, i = \overline{1,n}$. Ф ункция $\sqrt{EG - F^2}$ также непрерывна в D. Поэтому для лобого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta(\varepsilon) > 0$, что для лобого разбиения замкнутой области D с диаметром $\tilde{d}$, меньшим $\delta(\varepsilon)$, вышолняется неравенство

$$\Delta = \left|\sqrt{\tilde{E}_i\tilde{G}_i - \tilde{F}_i^2} - \sqrt{E_iG_i - F_i^2}\right| < \frac{\varepsilon}{K\widetilde{S}},$$

где $\tilde{S}$ - площадь области D. Значит, если $\tilde{d} = d\left(T_D\right) < \delta(\varepsilon)$, то

$$|S_n' - S_n''| < \frac{\varepsilon}{K\widetilde{S}} K \sum_{i=1}^{n} \Delta\widetilde{S}_i = \varepsilon$$

Это равносильно тому, что $\lim\limits_{\tilde{d}\to 0}\left(S_n' - S_n''\right) = 0$. Отсюда следует, что если сумма S_n'' имеет предел при $\tilde{d} \to 0$, то и сумма S_n' имеет тот же предел при $\tilde{d} \to 0$. Но при любом выборе точек $M_i \in \Delta\Phi_i, i = \overline{1,n}$, сумма S_n'' является интегральной суммой двойного интеграла в правой части (6.4), который существует в силу непрерывности подынтегральной функции. Следовательно, существует и равный этому интегралу предел при $\tilde{d} \to 0$ суммы S_n', являющийся, согласно определению 6.1, поверхностным интегралом первого рода в левой части (6.4).

В случае поверхности Φ, заданной явно уравнением $z = f(x,y)$, формула (6.4) принимает вид

$$\int\limits_{\Phi} f(x,y,z)dS = \iint\limits_{D^*} f(x,y,z(x,y))\sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2} dxdy, \tag{6.10}$$

где D^* - проекция поверхности Φ на плоскость xOy. Так как

$$\sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2} = \frac{1}{|\cos\gamma|}$$

где γ - угол между вектором нормали к поверхности Φ и осью Oz, то (6.10) можно представить в виде

$$\int\limits_{\Phi} f(x,y,z)dS = \iint\limits_{D^*} f(x,y,z(x,y))\frac{dxdy}{|\cos\gamma|}. \tag{6.11}$$

Теорема доказана. ■

При доказательстве теоремы 6.1 предполагалось, что поверхность Φ, по которой беретсл поверхностный интеграл первого рода в (6.4), является гладкой и незамкнутой. Отметим, что формула (6.4) справедлива и в случае кусочко гладкой поверхности, причем как незамкнутой, так и замкнутой.

Пример 6.1. Вычислим поверхностный интеграл первого рода I от функции $f(x,y,z)=z$ по поверхности Φ, являющейся частью гиперболического параболоида, заданного уравнением $z=xy$, которая вырезана цилиндрической поверхностью $x^2+ +y^2=4$.

△ Используя (6.10), запишем

$$I=\int\limits_{\Phi} zdS=\iint\limits_{D^*} z\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\,dx=\iint\limits_{D^*} xy\sqrt{1+y^2+x^2}dxdy,$$

где D^* - замкнутый круг радиуса 2 с центром в начале координат. Перейдем к полярным координатам:

$$I=\int\limits_0^{2\pi} d\varphi\int\limits_0^2 r^3\sqrt{1+r^2}\cos\varphi\sin\varphi dr=$$

$$=\left(\int\limits_0^{2\pi}\cos\varphi\sin\varphi d\varphi\right)\int\limits_0^2 r^3\sqrt{1+r^2}dr=0. \quad \blacktriangle$$

Поверхностный интеграл первого рода по своей сути аналогичен двойному интегралу и на него распространяются основные свойства двойного интеграла: линейность, аддитивность, монотонность. Для поверхностного интеграла верна оценка по модулю, аналогичная соответствущей оценке двойного интеграла, а также следующий аналог теоремы о среднем для двойного интеграла.

Теорема 6.2. *(теорема о среднем). Пусть функция $f(x,y,z)$ непрерывна на гладкой поверхности S с площадью S^*. Тогда на этой поверхности существует такая точка $(x_0;y_0;z_0)$, что выполняется равенство*

$$\int\limits_S f(x,y,z)dS=f\left(x_0,y_0,z_0\right)S^*$$

Как и в случае двойного интеграла, значение $f\left(x_0,y_0,z_0\right)$ называют **средним значением функции $f(x,y,z)$ на поверхности S**.

Приложения поверхностного интеграла первого рода

В пространстве введем прямоугольную систему координат материальную поверхность Φ, по которой распределена масса с поверхностной плотностью $\rho(M) = \rho(x, y, z)$. Разобъем поверхность на n частичных областей $\Phi_i, i = \overline{1, n}$, выбрав на каждой из них произвольную точку $M_i\left(x_i; y_i; z_i\right) \in \Phi_i$. При этом полагаем, что при малых диаметрах d_i частичных областей Φ_i поверхностная плотность распределенной по поверхности массы в пределах каждой частичной области постоянна и равна значению $\rho\left(M_i\right) = \rho\left(x_i, y_i, z_i\right)$.

При этих предположениях, как и в случае материальной кривой, приходим к следующим выводам:

а) масса всей поверхности Φ равна

$$m = \int\limits_{\Phi} \rho(M) dS = \int\limits_{\Phi} \rho(x, y, z) dS; \tag{6.12}$$

б) статические моменты этой поверхности относительно координатных плоскостей yOz, zOx и xOy равны

$$\begin{cases} K_z = \int\limits_{\Phi} x\rho(x, y, z) dS, \\ K_y = \int\limits_{\Phi} y\rho(x, y, z) dS, \\ K_z = \int\limits_{\Phi} z\rho(x, y, z) dS, \end{cases} \tag{6.13}$$

где x, y, z - координаты точки $M \in \Phi$;

в) координаты центра масс поверхности Φ имеют вид

$$x_C = \frac{K_z}{m}, \quad y_C = \frac{K_y}{m}, \quad z_C = \frac{K_z}{m}; \tag{6.14}$$

г) моменты инерции этой поверхности относительно, например, плоскости

yOz, оси Ox и начала координат O равны соответственно

$$J_{yOz} = \int\limits_{\Phi} x^2 \rho(x, y, z) dS$$

$$J_{Ox} = \int\limits_{\Phi} \left(y^2 + z^2\right) \rho(x, y, z) dS$$

$$J_{O} = \int\limits_{\Phi} \left(x^2 + y^2 + z^2\right) \rho(x, y, z) dS;$$

д) проекции на координатные оси вектора $\boldsymbol{F}$ силы притяжения, с которой материальная поверхность Φ притягивает материатьную точку $M_0\left(x_0; y_0; z_0\right)$ массы m_0, равны соответственно

$$\begin{cases} F_x = Gm_0 \int\limits_{\Phi} \dfrac{x - x_0}{r^3} \rho(x, y, z) dS, \\ F_y = Gm_0 \int\limits_{\Phi} \dfrac{y - y_0}{r^3} \rho(x, y, z) dS \\ F_z = Gm_0 \int\limits_{\Phi} \dfrac{z - z_0}{r^3} \rho(x, y, z) dS \end{cases} \tag{6.15}$$

где $r = \sqrt{\left(x - x_0\right)^2 + \left(y - y_0\right)^2 + \left(z - z_0\right)^2}$; G – гравитационная постоянная.

Приведенные соотношения связаны с приложениями поверхностного интеграла первого рода в механике. Аналогично можно получить формулы для вычисления величин, имеющих иной физический смысл.

6.1 Вопросы и задачи

6.1. Пользуясь явным заданием поверхности, вычислить площади:
а) части гиперболического параболоида $az = xy$, ограниченной цилиндрической поверхностью $x^2 + y^2 = a^2$;
б) части элиптического параболоида $2az = x^2 + y^2$, ограниченной цилиндрической поверхностью $\left(x^2 + y^2\right)^2 = 2a^2 xy$;
в) части конической поверхности $z^2 = 2xy$, отсекаемой плоскостями $x + y = 1, x = 0, y = 0$;
г) части конической поверхности $z = \sqrt{x^2 + y^2}$, ограниченной цилиндрической поверхностью $x^2 + y^2 = 2x$.

6.2. Пользуясь параметрическим заданием поверхности, вычислить площади:
а) части геликоида $x = r\cos\varphi, y = r\sin\varphi, z = h\varphi, r \in [0, a]$, $\varphi \in [0, 2\pi]$;
б) поверхности тора $x = (b + a\cos\psi)\cos\varphi, y = (b + a\cos\psi)\sin\varphi$, $z = a\sin\varphi$ при $0 \leqslant a \leqslant b$ и $\varphi, \psi \in [0, 2\pi)$.

6.3. Вычислить площадь поверхности тела, ограниченного поверхностями:
а) $x^2 + y^2 = z^2/3, x = 0, x + y + z = 2a, a > 0$;
б) $z = \sqrt{x^2 + y^2}, x + 2z = a, a > 0$.

6.4. Вычислить поверхностные интегралы первого рода по заданной поверхности Φ от заданной функции:
а) $f(y, z) = \sqrt{y^2 - z^2}, \Phi-$ часть конической поверхности $x^2 + y^2 = z^2$, ограниченная цилиндрической поверхностью $x^2+ +y^2 = a^2$;
б) $f(x, y, z) = x + y + z$, Φ - полусфера $x^2 + y^2 + z^2 = a^2, z \geqslant 0$;
в) $f(x, y) = x^2 + y^2, \Phi$ - граница тела, заданного неравенствами $\sqrt{x^2 + y^2} \leqslant z \leqslant 1$;
г) $f(z) = z, \Phi$ - часть геликоида $x = u\cos v, y = u\sin v, z = v$ при $u \in [0, a]$ и $v \in [0, 2\pi]$;
д) $f(x, y, z) = xy + yz + zx, \Phi-$ часть конической поверхности $z = \sqrt{x^2 + y^2}$, ограниченная цилиндрической поверхностью $x^2 + y^2 = 2ax$.

6.5. При заданной поверхностной плотности $\rho_S(M) = \rho_0 z/a$ в точках M поверхности вычислить массу:
а) части поверхности $z = \left(x^2 + y^2\right)/2$ при $z \leqslant a$;
б) полусферы $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ при $z \geqslant 0$.

6.6. Вычислить статические моменты относительно координатнњх плоскостей однородной треугольной пластинки $x+ +y + z = a, x \geqslant 0, y \geqslant 0, z \geqslant 0$ с поверхностной плотностью $\rho_0 = \text{const}$.

6.7. Вычислить момент инерции относительно оси Oz части однородной (с поверхностной плотностью $\rho_0 = \text{const}$) конической поверхности $x^2 + z^2 = y^2$, $y > 0$, ограниченной цилиндрической поверхностью $x^2 + y^2 = a^2$.

6.8. С какой силой однородная (с поверхностной плотностью $\rho_0 = \text{const}$) поверхность $x = r\cos\varphi, y = r\sin\varphi, z = r$ при $0 \leqslant a \leqslant \leqslant r \leqslant b$ и $\varphi \in [0, 2\pi]$ притягивает материальную точку массой m, находящуюся в начале координат?