Әл-Фараби атындағы Қазақ ұлттық университеті

Механика-математика факультеті

Сызықты алгебралық теңдеулер жүйесін шешудің итерациялық әдістері

Темирбеков Нурлан Муханович ф-м.ғ.д., профессор

Жоспар

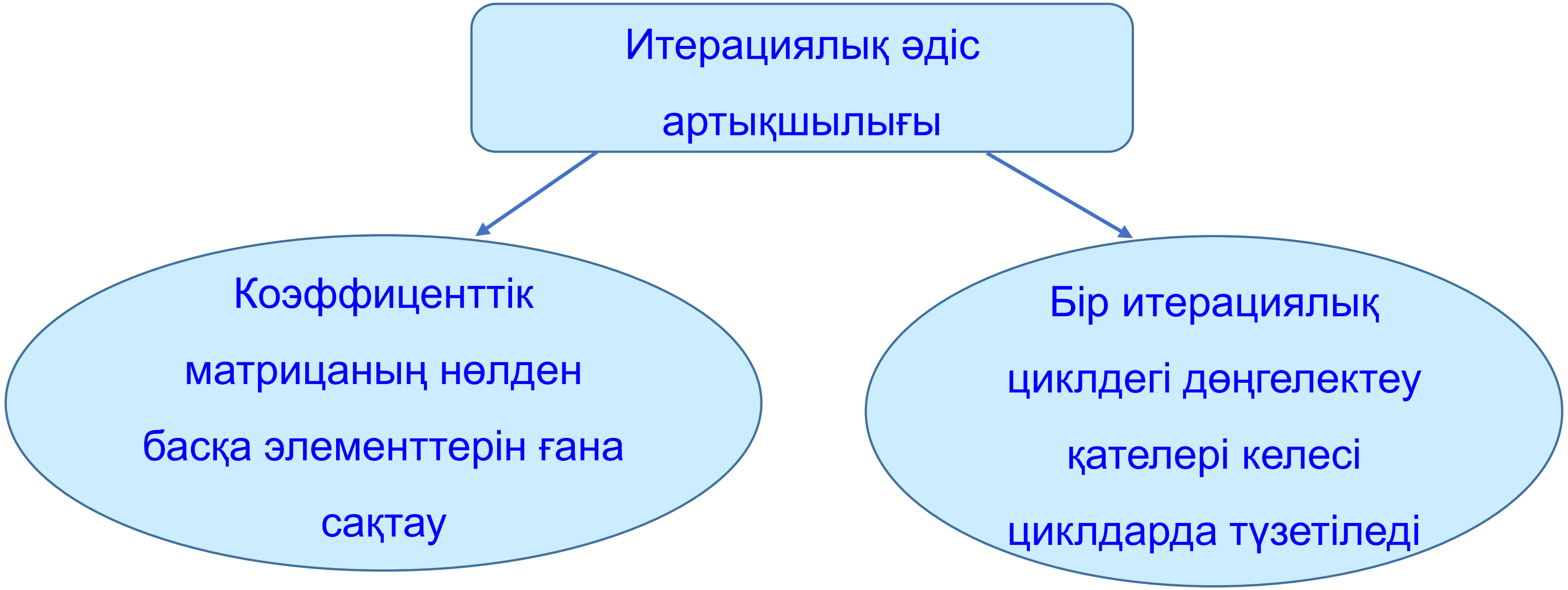
1. Итерациялық әдіске кіріспе.
2. Гаусс-Зейдель әдісі.
3. Гаусс-Зейдель әдісінің бағдарламалық коды.
4. Әдіс бойынша есеп шығару.

Мақсаты

Сызықты алгебралық теңдеулер жүйесін сандық шешудің итерациялық әдістері мен есептеу алгоритмдерін талдау.

Итерациялық әдіске кіріспе

Итерациялық әдістер x шешімін бастапқы болжаудан бастайды, содан кейін x өзгерісі елеусіз болғанша шешімді қайта-қайта жақсартады.



Итерациялық әдістердің елеулі кемшілігі – олар әрқашан шешімге жақындай бермейді. Коэффицент матрицасы диагональ бойынша басым болған жағдайда ғана жинақталуға кепілдік берілетінін көрсетуге болады.

Гаусс-Зейдель әдісі

$\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ теңдеулер жүйесі скалярлық белгілеуде $\sum_{j=1}^{n} \boldsymbol{A}_{ij}\boldsymbol{x}_j = \boldsymbol{b}_i, \qquad i = 1,2,\dots,n$

Қосынды белгісінен $\boldsymbol{x}_i$ бар мүшені алу келесі нәтиже береді $\boldsymbol{A}_{ii}\boldsymbol{x}_i + \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} \boldsymbol{A}_{ij}\boldsymbol{x}_j = \boldsymbol{b}_i, \qquad i = 1,2,\dots,n$

$\boldsymbol{x}_i$ үшін шешеміз $\boldsymbol{x}_i = \frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{A}_{ii}}\left(\boldsymbol{b}_i - \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} \boldsymbol{A}_{ij}\boldsymbol{x}_j\right), \qquad i = 1,2,\dots,n$

Соңғы теңдеу келесі итерациялық сұлбаны ұсынады: $\boldsymbol{x}_i \leftarrow \frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{A}_{ii}}\left(\boldsymbol{b}_i - \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} \boldsymbol{A}_{ij}\boldsymbol{x}_j\right), \qquad i = 1,2,\dots,n \qquad (\mathbf{1})$

Гаусс-Зейдель әдісін жақсарту

Гаусс-Зейдель әдісінің жинақталуын релаксациямен жақсартуға болады.

Негізгі идея $\boldsymbol{x_i}$- ң жаңа мәнін оның алдыңғы мәні мен (1) теңдеу бойынша болжанған мәнінің орташа өлшенген мәні ретінде қабылдау болып табылады. Сәйкес итерациялық формула келесідей болып табылады.

$$\boldsymbol{x_i \leftarrow \frac{\omega}{A_{ii}}\left(b_i - \sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} A_{ij}x_j\right) + (1-\omega)x_i}, \qquad i = 1,2,\ldots,n \qquad \boldsymbol{(2)}$$

$\boldsymbol{\omega}$ салмақ релаксация коэффициенті.

Егер $\boldsymbol{\omega = 1}$ болса, релаксация болмайды, өйткені (1) мен (2) теңдеулер бірдей нәтиже береді.

Егер $\boldsymbol{\omega < 1}$ болса, (2) теңдеу ескі x_i мен (1) теңдеуде берілген мән арасындағы интерполяцияны көрсетеді. Бұл **төменгі релаксация** деп аталады.

$\boldsymbol{\omega > 1}$ болған жағдайда бізде экстраполяция немесе **жоғары релаксация** болады.

Гаусс-Зейдель әдісі

$\boldsymbol{\omega}$ тиімді мәнінің жуықтауы
$$\omega_{opt} \approx \frac{2}{1+\sqrt{1-\left(\Delta x^{(k+p)}/\Delta x^{(k)}\right)^{1/p}}} \qquad (3)$$

мұндағы $\boldsymbol{p}$ – натурал сан, $\Delta x^{(k)} = \left|x^{(k-1)} - x^{(k)}\right|$

Релаксациясы бар Гаусс-Зейдель алгоритмінің негізгі элементтері келесідей:

- $\boldsymbol{\omega = 1}$ болатын $\boldsymbol{k}$ итерацияны орындаймыз ($\boldsymbol{k = 10}$ орынды).
- $\Delta x^{(k)}$ жазып аламыз.
- $\boldsymbol{p}$ итерация үшін қайта орындаймыз.
- $\Delta x^{(k+p)}$ жазып аламыз.
- (3) теңдеуінен ω_{opt} есептеңіз.
- Барлық келесі итерацияларды $\omega = \omega_{opt}$ арқылы орындаңыз.

Гаусс-Зейдель әдісінің релаксациямен

жүзеге асыру бағдарламалық коды

```
import numpy as np
import math
def gaussSeidel(iterEqs,x,tol = 1.0e-9):
    omega = 1.0
    k = 10
    p = 1
for i in range(1,501):
        xOld = x.copy()
        x = iterEqs(x,omega)
        dx = math.sqrt(np.dot(x-xOld,x-xOld))
        if dx < tol: return x,i,omega
```

Гаусс-Зейдель әдісінің релаксациямен жүзеге асыру бағдарламалық коды

```
#k+p итерациясынан кейін релакcация
коэффициентін есептеңіз.
    if i == k: dx1 = dx
    if i == k + p:
        dx2 = dx
        omega = 2.0/(1.0 + math.sqrt(1.0 \
             - (dx2/dx1)**(1.0/p)))
    print('Гаусс-Зейдель жинақталмады')
```

Әдіс бойынша есеп шығару

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_{n-2} \\ x_{n-1} \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Бағдарламаны $n = 20$ үшін орындаңыз. Нақты шешім: $x_i = -n/4 + i/2\,, i = 1,2,\dots,n$

Шешуі. Берілген теңдеулер жүйесін (2) формулалар түріне келтіреміз:

$$x_1 = \omega(x_2 - x_n)/2 + (1-\omega)x_1$$

$$x_i = \omega(x_{i-1} + x_{i+1})/2 + (1-\omega)x_i, \qquad i = 2,3,\dots,n-1$$

$$x_n = \omega(1 - x_1 + x_{n-1})/2 + (1-\omega)x_n$$

Есепті шешу коды

```
import numpy as np
import math
def iterEqs(x,omega):
    n = len(x)
    x[0] = omega*(x[1] - x[n-1])/2.0 + (1.0 - omega)*x[0]
    for i in range(1,n-1):
        x[i] = omega*(x[i-1] + x[i+1])/2.0 + (1.0 - omega)*x[i]
    x[n-1] = omega*(1.0 - x[0] + x[n-2])/2.0 + (1.0 - omega)*x[n-1]
    return x
```

```
n = eval(input("Теңдеулер саны ==> "))
x = np.zeros(n)
x,numIter,omega = gaussSeidel(iterEqs,x)
print("\nИтерация саны =",numIter)
print("\nРелаксация коэффициенті =",omega)
print("\nШешім :\n",x)
```

Бағдарлама нәтижесі:

```
Теңдеулер саны ==> 20
Итерация саны = 259
Релаксация коэффициенті = 1.705452310713
```

```
Шешім:
[-4.5  -4.  -3.5 -3.  -2.5  -2.  -1.5 -1.  -0.5  0.   0.5
 1.   1.5  2.  2.5  3.   3.5  4.   4.5  5. ]
```

Қорытынды

1. Итерациялық әдістердің артықшылығы мен кемшілігі.
2. Гаусс-Зейдель әдісінің итерациялық формуласы, жақсарту жолдары.
3. Гаусс-Зейдель әдісінің релаксациямен бағдарламалық коды.
4. Python тілінде коды бойынша мысал.

Пайдаланылған әдебиеттер тізімі

1. Jaan Kiusalaas. Numericalmethods in engineering with Python. Cambridge University Press. ISBN 978-1-107-03385
2. Вабищевич П.Н. Численные методы: Вычислительный практикум. — М.: Книжный дом «ЛИБРОКОМ», 2010. — 320 с.
3. Киреев В. И., Пантелеев А. В. Численные методы в примерах и задачах: Учебное пособие. —СПб.: Издательство «Лань», 2015. — 448 с.