Лекция 8. Условия независимости криволинейного интеграла второго рода от пути интегрирования в пространстве. Формула Остроградского-Гаусса

Условия независимости криволинейного интеграла второго рода от пути интегрирования в пространстве

Для криволинейных интегралов второго рода общего вида вдоль пространственной кривой AB можно сформулировать условия независимости их от пути интегрирования, аналогичные тем, которые были установлены в теореме 4.3 (Лекция 4).

Пространственную область G назовем поверхностно односвязной, если любой контур L, целиком лежащий в G, является границей некоторой поверхности, лежащей в G. Примером поверхностно односвязной области является шар. Поверхностно односвязной областью является также полый шар, т.е. область, заключенная между двумя концентрическими сферами. К поверхностно односвязным не относится область внутри тора - поверхности, образованной вращением окружности вокруг оси, которая расположена в плоскости окружности и с окружностью не пересекается.

Теорема 8.1. *Пусть G - поверхностно односвязная область в пространстве и функции $P(x,y,z), Q(x,y,z), R(x,y,z)$ непрерывно дифференцируемы в G. Тогда следующие четыре условия эквивалентны.*
1. Выражение $Pdx+Qdy+Rdz$ является полным дифференциалом dF некоторой функции $F(x,y,z)$, дифференцируемой в G.
2. В области G верны равенства

$$\begin{cases} \dfrac{\partial P}{\partial y} = \dfrac{\partial Q}{\partial x} \\ \dfrac{\partial P}{\partial z} = \dfrac{\partial R}{\partial x} \\ \dfrac{\partial Q}{\partial z} = \dfrac{\partial R}{\partial y} \end{cases} \tag{8.1}$$

3. Для любого кусочно гладкого контура L, целиком лежащего в области G, *справедливо равенство*

$$\int\limits_{L} P(x,y,z)dx + Q(x,y,z)dy + R(x,y,z)dz = 0. \tag{8.2}$$

4. Для любых двух точек A и B в области G криволинейный интеграл второго рода

$$\int\limits_{AB} P(x,y,z)dx + Q(x,y,z)dy + R(x,y,z)dz$$

не зависит в этой области от пути интегрирования.

Доказательство этой теоремы можно провести "в круговую " аналогично доказательству теоремы 4.3 с той лишь разницей, что надо опереться на формуау Стокса, а не на формулу Грина, которая по сути является частным случаем формулы Стокса. Отметим, что если криволинейный интеграл в пространстве не зависит от пути интегрирования, то, как и в плоском случае, в его обозначении указывают лишь начальную и конечную точки кривой. При этом для любой кусочно гладкой кривой AB с качальной точкой $A\,(x_A; y_A; z_A)$ и кокечной точкой $B\,(x_B; y_B; z_B)$, целиком лежащей в G, имеет место формула **Ньютона-Лейбница для криволинейного интеграла вдоль пространственной кривой**

$$\begin{aligned} &\int\limits_{(x_A;y_A;z_A)}^{(x_B;y_B;z_B)} P(x,y,z)dx + Q(x,y,z)dy + R(x,y,z)dz = \\ &= F\left(x_B, y_B, z_B\right) - F\left(x_A, y_A, z_A\right) = F(x,y,z)\Bigg|_{(x_A;y_A;z_A)}^{(x_B;y_B;z_B)}, \end{aligned} \tag{8.3}$$

где $F(x,y,z)$ - произвольная функция, имеющая дифференциал $dF = Pdx + Qdy + Rdz$. Такую функцию можно найти, как и в случае плоской области, интегрированием по отрезкам прямых, параллельных координатным осям. Например, можно использовать формулу

$$F(x,y,z) = \int\limits_{(x_0;y_0;z_0)}^{(x;y;z)} Pdx + Qdy + Rdz =$$

$$= C + \int\limits_{x_0}^{x} P\left(x, y_0, z_0\right) dx + \int\limits_{y_0}^{y} Q\left(x, y, z_0\right) dy + \int\limits_{z_0}^{z} R(x, y, z) dz, \tag{8.4}$$

где $C = const$, а $(x_0; y_0; z_0)$ - какая-нибудь фиксированная точка области G. Приведенная формула соответствует интегрированию вдоль трехзвенной ломаной, первое звено которой параллельно оси Ox, второе - оси Oy, а третье - оси Oz. Применение формулы возможно в том случае, когда эта ломаная целиком попадает в область G.

Формула Остроградского - Гаусса

Формула Стокса устанавливает связь между криволинейным и поверхностным интегралами. Аналогичная связь существует между поверхностным интегралом и тройкым интегралом. Прежде чем формулировать соответствующее утверждение, введем одно понятие.

Пространственную область G назовем *объемно односвязной*, если для любой замкнутой поверхности, лежащей в G, ограничиваемая этой поверхностью область также целиком лежит в G. Объемно односвязными областями являются шар и внутренность тора (часто также называемая тором), в то время как полый шар (область между двумя концентрическими сферами) к объемно односвязным областям не относится.

Предположим, что замкнутая пространственная область G может быть разделена на конечное число областей, правияькых в направлении оси Ox. Пусть аналогичное свойство выполняется и в отношении двух других осей Oy и Oz . Такую область мы будем называть простой.

Теорема 8.2. *Если функции $P(x, y, z), Q(x, y, z), R(x, y, z)$ непрерывно дифференцируемы в объемно односвязной области G, то для любой простой замкнутой области $V \subset G$, ограниченной кусочно гладкой замкнутой поверхностью Φ, верна формула Остроградского - Гаусса* [1]

$$\oiint\limits_{\Phi} P dydz + Q dzdx + R dxdy = \iiint\limits_{V} \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right) dxdydz, \tag{8.5}$$

[1] Эту формулу часто называют формулой Остроградского, который вывел ее в 1828 г. и опубликовал в 1831 г., а в 1834 г. обобщил на случай n-мерной области. К.Гаусс получил частный вариант этой формулы в 1813 г.

где поверхностный интеграл второго рода вычисляется по внешней стороне поверхности Φ.

□ Формула Остроградского - Гаусса распадается на три самостоятельных равенства, соответствующие трем подынтегральным функциям P, Q и R. Эти три равенства доказываются схожим образом, и мы остановимся на одном из них, например на равенстве

$$\oiint\limits_{\Phi} R(x,y,z)dxdy = \iiint\limits_{V} \frac{\partial R(x,y,z)}{\partial z} dxdydz. \tag{8.6}$$

Рассматриваемое равенство обладает свойством аддитивности. Это означает, что если замкнутая область V разбита на частичные области $V_k, k=\overline{1,m}$, ограниченные кусочно гладкими поверхностями Φ_k, и для этих замкнутых областей доказываемое равенство установлено, то это равенство будет выполняться и для самой области V. Действительно, пусть

$$\oiint\limits_{\Phi_k} R(x,y,z)dxdy = \iiint\limits_{V_k} \frac{\partial R(x,y,z)}{\partial z} dxdydz, \quad k=\overline{1,m}.$$

Просуммировав эти равенства, получим

$$\sum_{k=1}^{m} \oiint\limits_{\Phi_k} R(x,y,z)dxdy = \sum_{k=1}^{m} \iiint\limits_{V_k} \frac{\partial R(x,y,z)}{\partial z} dxdydz =$$

$$= \iiint\limits_{V} \frac{\partial R(x,y,z)}{\partial z} dxdydz.$$

Сумма в левой части равенства равна интегралу по поверхности Φ, так как по частям границ Φ_k частичных областей V_k, не входящим в поверхность Φ, интегрирование проводится дважды с выбором противоположных сторон поверхности, а такие интегралы взаимно уничтожаются.

Так как замкнутая область V является простой, ее можно разбить на частичные области $V_k, k=\overline{1,m}$, являющиеся правильными в направлении оси Oz. Таким образом, равенство (8.6) достаточно доказать для случая замкнутой области, правильной в направлении оси Oz.

Итак, пусть замкнутая область $V \subset G$ является правильной в направлении оси Oz. Это значит, что она ограничена двумя поверхностями Φ_1 и Φ_2 вида $z=\varphi_1(x,y)$ и $z=\varphi_2(x,y)$, где функции $\varphi_1(x,y)$ и $\varphi_2(x,y)$ определены в замкнутой области D_{xy} на плоскости и удовлетворяют неравенству

$\varphi_1(x,y) \leqslant \varphi_2(x,y)$, $(x;y) \in D_{xy}$, а также цилиндрической поверхностью Φ_3 с образующими, параллельными оси Oz. По правилу вычисления тройного интеграла по правильной области V имеем

$$\iiint\limits_V \frac{\partial R}{\partial z} dxdydz =$$

$$= \iint\limits_{D_{xy}} dxdy \int\limits_{z_1(x,y)}^{z_2(x,t)} \frac{\partial R}{\partial z} dz = \iint\limits_{D_{xy}} R(x,y,z)\Bigg|_{z_1(x,y)}^{z_2(x,t)} dxdy =$$

$$= \iint\limits_{D_{xy}} R\left(x,y,z_2(x,y)\right) dxdy - \iint\limits_{D_{xy}} R\left(x,y,z_1(x,y)\right) dxdy.$$

Полученные двойные интегралы по области D_{xy} можно заменить равными им поверхностными интегралами второго рода по поверхностям Φ_2 и Φ_1, причем для учета знаков двойных интегралов для поверхности Φ_2 нужно выбрать верхнюю сторону, а для поверхности Φ_1 - нижнюю. К этим интегралам добавим равный нулю поверхностный интеграл по внешней стороне боковой поверхности Φ_3 (цилиндрической поверхности с образующими, параллельными оси Oz). В итоге получим

$$\iiint\limits_V \frac{\partial R}{\partial z} dxdydz = \iint\limits_{\Phi_2} Rdxdy + \iint\limits_{\Phi_1} Rdxdy + \iint\limits_{\Phi_3} Rdxdy = \oiint\limits_{\Phi} R(x,y,z)dxdy,$$

что равносильно (8.6). ■

Формулу Остроградского - Гаусса можно также записать в виде

$$\oiint\limits_{\Phi} (P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma)dS = \iiint\limits_V \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right) dxdydz, \quad (8.7)$$

где $\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma$ – направляющие косинусы единичного вектора внешней нормали к поверхности Φ.

Замечание 8.1. Формулу Остроградского - Гаусса можно распространить на произвольную ограниченную пространственную область V, граница Φ которой состоит из конечного числа замкнутых кусочно гладких поверхностей (область V в этом случае имеет полости). При этом в левой части формулы Остроградского - Гаусса поверхностный интеграл следует брать вдоль границы области V, т.е. необходимо суммировать поверхностные интегралы по всем поверхностям, составляющим границу, причем для внешней поверхности выбирается внешняя сторона, а для внутренних - внутренняя. Чтобы доказать такое обобщение формулы Остроградского - Гаусса, достаточно соединить произвольными гладкими поверхностями внешнюю часть границы области V с внутренними. #

Формула Остроградского - Гаусса используется во многих приложениях. Одно из ее возможных применений - вычисление интегралов по замкнутым поверхностям сведением их к тройному интегралу или, наоборот, вычисление тройных интегралов с помощью поверхностных (аналогично тому, как площадь плоской области может быть вычислена с помощью криволинейного интеграла). Правая часть формулы (8.5) Остроградского - Гаусса равна объему замкнутой области V, если функции P, Q, R удовлетворяют условию

$$\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} = 1. \tag{8.8}$$

Например, объем области V, который обозначим также через V, можно найти при помощи поверхностного интеграла

$$V = \frac{1}{3} \oiint\limits_{\Phi} xdydz + ydzdx + zdxdy, \tag{8.9}$$

вычисляемого по внешней стороне замкнутой поверхности Φ, ограничивающей эту область. Нетрудно выписать целый ряд аналогичных формул, используя различные подходящие комбинации функций P, Q, R.

Пусть G - объемно односвязная область в $\mathbb{R}^3$ и функции $P(x, y, z)$, $Q(x, y, z)$, $R(x, y, z)$ непрерывно дифференцируемы в этой области. Для того чтобы поверхностный интеграл от функций P, Q, R по любой замкнутой поверхности $\Phi \subset G$ равнялся нулю, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось равенство

$$\frac{\partial P(x, y, z)}{\partial x} + \frac{\partial Q(x, y, z)}{\partial y} + \frac{\partial R(x, y, z)}{\partial z} = 0, \quad (x; y; z) \in G. \tag{8.10}$$

□

Достаточность следует непосредственно из формулы Остроградского - Гаусса.

Необходимость докажем от противного. Пусть поверхностный интеграл от функций P, Q, R по любой замкнутой поверхности равен нулю, в то время как в некоторой точке $M_*(x_*; y_*; z_*) \in G$ равенство (8.10) не выполняется. Для определенности предположим, что

$$\frac{\partial P(x_*, y_*, z_*)}{\partial x} + \frac{\partial Q(x_*, y_*, z_*)}{\partial y} + \frac{\partial R(x_*, y_*, z_*)}{\partial z} > 0.$$

В силу непрерывности этих частных производных такое неравенство выполнено и в некоторой окрестности $\mathrm{U}(M_*) \subset V$ точки M_*. Но тогда

$$\iiint\limits_{\mathbf{U}(M_*)} \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right) dxdydz > 0,$$

а в соответствии с формулой Остроградского - Гаусса поверхностный интеграл по внешней стороне замкнутой поверхности, ограничивающей эту окрестность, является положительным, что противоречит исходному предположению. ■

Пример 8.1. С помощью формулы Остроградского-Гаусса вычислим поверхностный интеграл второго рода

$$I = \oiint\limits_{\Phi} x^2 dydz + y^2 dzdx + z^2 dxdy$$

по внешней стороне Φ сферы $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$.

△ В соответствии с (8.7) имеем

$$I = \iiint_V (2x + 2y + 2z) dxdydz,$$

где V - замкнутый шар $x^2+y^2+z^2 \leqslant R^2$. Для вычисления тройного интеграла перейдем к сферическим координатам

$$\begin{cases} x = r\sin\theta\cos\varphi, \\ y = r\sin\theta\sin\varphi, \quad r \in [0, R], \quad \theta \in [0, \pi], \quad \varphi \in [0, 2\pi]. \\ z = r\cos\theta \end{cases}$$

С учетом равенства $dxdydz = r^2 \sin\theta dr d\theta d\varphi$ получим

$$I = 2\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} d\theta \int_0^{R} (\sin\theta\cos\varphi + \sin\theta\sin\varphi + \cos\theta) r^3 \sin\theta dr =$$

$$= \frac{R^4}{4}\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} \left((\cos\varphi + \sin\varphi)\sin^2\theta + \sin\theta\cos\theta\right) d\theta.$$

Так как

$$\int_0^{\pi} \sin\theta\cos\theta d\theta = \frac{1}{2}\int_0^{\pi} \sin 2\theta d\theta = 0$$

то второе слагаемое в подынтегральной функции двойного интеграла можно опустить. В результате находим

$$I = \frac{R^4}{4}\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} (\cos\varphi + \sin\varphi)\sin^2\theta d\theta =$$

$$= \frac{R^4}{4}\int_0^{2\pi} (\cos\varphi + \sin\varphi) d\varphi \cdot \int_0^{\pi} \sin^2\theta d\theta = 0. \quad \blacktriangle$$

Вопросы для закрепления

1. Какие условия необходимы для того, чтобы криволинейный интеграл второго рода в пространстве был независим от пути?
2. Как определить, является ли область поверхностно односвязной, и почему это важно для криволинейного интеграла второго рода?
3. Как теорема о независимости криволинейного интеграла второго рода от пути интегрирования применяется к поверхностно односвязной области?
4. В чем физический смысл независимости криволинейного интеграла второго рода от пути интегрирования?
5. Какова основная идея формулы Остроградского-Гаусса, и как она используется для перехода от поверхностного интеграла к тройному интегралу?

6. Какие условия должны выполняться, чтобы формула Остроградского-Гаусса могла быть применена к пространственной области?

7. Какова связь между поверхностным интегралом второго рода и тройным интегралом в формуле Остроградского-Гаусса?

8. Как с помощью формулы Остроградского-Гаусса можно вычислить объем ограниченной области?

9. Какие особенности имеет применение формулы Остроградского-Гаусса для объемов с полостями?

10. Как с помощью специального вида поверхностного интеграла можно вычислить объем области?

11. Что означает условие $\dfrac{\partial P}{\partial x} + \dfrac{\partial Q}{\partial y} + \dfrac{\partial R}{\partial z} = 1$ для функции, применяемой в формуле Остроградского-Гаусса?

12. Каким условиям должны удовлетворять функции $P(x, y, z)$, $Q(x, y, z)$, $R(x, y, z)$ для того, чтобы поверхностный интеграл по замкнутой поверхности был равен нулю?

13. Как вычислить объем тела, используя интегралы, если область имеет сложную форму?

14. Как направление нормали к поверхности влияет на применение формулы Остроградского-Гаусса?

15. Какие ограничения накладываются на поверхность и функцию, чтобы формула Остроградского-Гаусса была применима?