

## ЛЕКЦИЯ-9

### § 5.3. Ядроны қатарға жіктеу

Симметриялық  $K(x, s)$  ядросын қарастырайық. Оның меншікті мәндері  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n, \dots$ , ал меншікті функциялары  $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots, \varphi_n(x), \dots$  болсын. Меншікті функциялар ортонормаланған, ал меншікті мәндер абсолют шамаларының өсу ретімен орналасқан болсын. Жаңадан

$$K^{(n)}(x, s) = K(x, s) - \sum_{j=1}^n \frac{1}{\lambda_j} \varphi_j(x) \varphi_j(s) \quad (76)$$

симметриялық ядросын құрайық.

**4 лемма.**  $\lambda_{n+1}, \lambda_{n+2}, \dots, \lambda_{n+k}, \dots; \varphi_{n+1}(x), \dots, \varphi_{n+2}(x), \dots, \varphi_{n+k}(x), \dots$  тізбектері симметриялық  $K^{(n)}(x, s)$  ядросының меншікті мәндері мен оларға сәйкес меншікті функциялары болады.

**Дәлелдеуі.**  $m > n$  болсын. Бірінші тізбектен  $\lambda_m$ -ді, ал екінші тізбектен оған сәйкес келуші  $\varphi_m(x)$  функциясын алып,

$$\alpha(x) = \varphi_m(x) - \lambda_m \int_a^b K^{(n)}(x, s) \varphi_m(s) ds$$

өрнегін құрайық. Енді  $K^{(n)}(x, s)$  ядросын (76) өрнегімен ауыстырып,

$$\alpha(x) = [\varphi_m(x) - \lambda_m \int_a^b K(x, s) \varphi_m(s) ds] + \lambda_m \sum_{j=1}^n \frac{1}{\lambda_j} \varphi_j(x) \int_a^b \varphi_m(s) \varphi_j(s) ds$$

теңдігін аламыз.

$\{\varphi_m(x)\}$  функциялары жүйесі ортонормаланғандықтан,

$$\int_a^b \varphi_m(s) \varphi_j(s) ds, (m \neq j).$$

Демек,  $\alpha(x) = 0$ , яғни  $\varphi_m(x) = \lambda_m \int_a^b K^{(n)}(x, s) \varphi_m(s) ds$ , олай болса,  $m > n$  жағдайында  $\lambda_m$  мен  $\varphi_m - K^{(n)}(x, s)$  ядросының меншікті мәні мен меншікті функциясы.

Керісінше, егер  $K^{(n)}(x, s)$  ядросы үшін  $\mu$  саны мен  $\psi(x)$  функциясы меншікті мән мен меншікті функция болса, онда олар  $K(x, s)$  ядросының меншікті мәндері мен меншікті функцияларының жиындарынан табылады. Ұйғарым бойынша  $\mu$  мен  $\psi(x)$

$$\psi(x) = \mu \int_a^b K^{(n)}(x, s) \psi(s) ds$$

теңдеуін қанағаттандырады. Бұл теңдіктегі  $K^{(n)}(x,s)$  ядросын (76) өрнегі бойынша ауыстырсақ,

$$\psi(x) - \mu \int_a^b K(x,s)\psi(s)ds + \mu \sum_{j=1}^n \frac{\psi_j(x)}{\lambda_j} \int_a^b \psi(s)\varphi_j(s)ds = 0. \quad (77)$$

Бұл теңдеудің екі жағын да  $\varphi_l(x) (l=1, \bar{n})$  функциясынан скаляр көбейтіп,

$$(\psi, \varphi_l) - \mu(K\psi, \varphi_l) + \mu \sum_{j=1}^n \frac{1}{\lambda_j} (\psi, \varphi_j)(\varphi_j, \varphi_l) = 0$$

теңдеуіне келеміз.  $K(x,s)$  ядросының симметриялық және  $\{\varphi_j(x)\}$  функцияларының ортонормаланған қасиетін ескерсек,

$$(K\psi, \varphi_l) = (\psi, K\varphi_l) = (\psi, \frac{1}{\lambda_l} \varphi_l) = \frac{1}{\lambda_l} (\psi, \varphi_l),$$

$$\sum_{j=1}^n \frac{1}{\lambda_j} (\psi, \varphi_j)(\varphi_j, \varphi_l) = \frac{1}{\lambda_l} (\psi, \varphi_l)$$

өрнектерін аламыз. Бұл жағдайда алдыңғы теңдеуден  $(\psi, \varphi_l) = 0, (l=1, 2, \dots, n)$  ортогональдық шарты шығады. Онда (77) теңдеуі

$$\psi(x) - \mu \int_a^b K(x,s)\psi(s)ds = 0$$

түрінде жазылады. Бұл теңдеуден  $\mu$  мен  $\psi(x) - K(x,s)$  ядросының меншікті мәні мен меншікті функциясы екенін, ал  $\psi(x)$ -тің  $\varphi_j(x) (j=1, \dots, n)$  функцияларымен ортогональ болғандықтан  $m > n$  ретті меншікті функциялардың біреуімен сай келетінін көреміз.

**Салдар.** Егер  $K(x,s)$  ядросының  $n$ -нен көп меншікті мәні бар болса, онда  $K^{(n)}(x,s)$  ядросының меншікті мәндерінің модулі бойынша ең кішісі  $\lambda_{n+1}$  болады.

Берілген ядроның меншікті мәндері  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$  ақырлы санды болған жеке жағдайды қарастырайық. Онда  $K^{(n)}(x,s)$  ядросының бірде-бір меншікті мәні болмайды. Бұндай жағдайда бұрын дәлелденген теорема бойынша  $K^{(n)}(x,s) = 0$  немесе

$$K(x,s) = \sum_{j=1}^n \frac{1}{\lambda_j} \varphi_j(x)\varphi_j(s).$$

Осы формуладан  $K(x,s)$  ядросының ерекшеленген ядро екенін көреміз. Кез келген ерекшеленген ядроның ақырлы санды меншікті мәндері бар болғандықтан және жоғарыдағы талдаулардан мына теорема орынды.

**Дини теоремасы.** Квадратымен интегралданатын симметриялық ядроның меншікті мәндері мен меншікті функциялары ақырлы санды болуы үшін оның ерекшеленген ядро болуы қажетті де жеткілікті.

**Салдар.** Кез келген квадратымен интегралданатын  $\varphi(x)$  функциясы үшін

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|K^{(n)}\varphi\| = 0$$

теңдігі орынды.

**Дәлелдеуі.** Егер  $K(x,s)$  ерекшеленбеген ядро болса, соңғы теңдіктің орындалуы ап-айқын. Бірінші салдар бойынша  $K(x,s)$  ядросы ерекшеленбеген болса, онда  $K^{(n)}(x,s)$  ядросының модулі бойынша ең кіші меншікті мәні  $\lambda_{n+1}$  болады.

Жоғарыдағы (73) теңсіздігі бойынша  $K^{(n)}(x,s)$  ядросы, оның меншікті мәні мен меншікті функциясы үшін

$$\|K^{(n)}\| \leq \frac{1}{\lambda_{n+1}} \|\varphi\|.$$

Теңсіздік орынды және  $n \rightarrow \infty$  жағдайда  $\lambda_{n+1} \rightarrow \infty$  болғандықтан соңғы өрнектен  $\|K^{(n)}\varphi\| \rightarrow 0$ .

Тұрақты болған  $x$  үшін  $K(x,s) \in L_2[a,b]$  олай болса, ол ядро ортонормаланған  $\{\varphi_n(x)\}$  жүйе бойынша

$$K(x,s) \sim \sum_{n=1}^{\infty} C_n(x) \varphi_n(s).$$

Фурье қатарына жіктеледі де, ал Фурье коэффициенттері

$$C_n(x) = \int_a^b K(x,s) \varphi_n(s) ds = \frac{1}{\lambda_n} \varphi_n(x)$$

теңдігімен анықталады. Сонымен,  $K(x,s)$  ядросына оның меншікті функциялар жүйесі  $\{\varphi_n(x)\}$  бойынша

$$K(x,s) \sim \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_n} \varphi_n(x) \varphi_n(s)$$

түріндегі бисызықты деп аталатын Фурье қатары сәйкес келеді екен. Бессель теңсіздігі бойынша

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_n^2} \varphi_n^2 \leq \int_a^b K^2(x,s) ds. \quad (78)$$

Бұл теңсіздіктегі қатар мүшелері оң және оларды мүшелеп  $x$  бойынша  $a$  - дан  $b$ -ға дейін интегралдап  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_n^2} \leq B^2$  теңсіздігін аламыз, яғни  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_n^2}$  қатары жинақты.

Енді қайталанған ядроларды жіктейік. Егер  $\{\lambda_k\}$  сандары мен  $\{\varphi_k(x)\}$  функциялары  $K(x, s)$  симметриялық ядросының меншікті мәндері мен меншікті функциялары болса, онда  $K_m(x, s)$  қайталанатын ядросының меншікті мәндері  $\{\lambda_k^{(m)}\}$ , ал меншікті функциялары  $\{\varphi_k(x)\}$  екені белгілі, яғни

$$\varphi_k(x) = \lambda_k^{(m)} \int_a^b K_m(x, s) \varphi_k(s) ds \quad (79)$$

теңдігі орындалады.  $K_m(x, s)$  ядросын  $x$  аргументін тұрақтылап, ортонормаланған  $\{\varphi_k(s)\}$  жүйесі бойынша Фурье қатарына жіктесек,

$$K_m(x, s) \sim \sum_{k=1}^{\infty} C_k(x) \varphi_k(s),$$

мұндағы, Фурье коэффициенттері

$$C_k(x) = \int_a^b K_m(x, s) \varphi_k(s) ds,$$

өрнегімен анықталады. Бұдан және (79) теңдігінен

$$C_k(x) = \frac{1}{\lambda_k^{(m)}} \varphi_k(x).$$

Сонымен,

$$K_m(x, s) \sim \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_k^{(m)}} \varphi_k(x) \varphi_k(s). \quad (80)$$

Егер  $K(x, s) \in L_2[D]$  болса, онда  $K_m(x, s) \in L_2[D]$  екенін көрсету қиын емес. Сондықтан (80) қатары Рисс-Фишер, теоремасы бойынша орташа мағынада жинақты. Егер  $\int_a^b K^2(x, s) ds \leq A$  болса, онда (80) қатар тек орташа мағынада ғана жинақты емес, оның  $m > 2$  болғанда абсолютті және бірқалыпты жинақты болатынын дәлелдеуге болады.  $m \geq 3$  болсын.  $n \rightarrow \infty \Rightarrow \lambda_n \rightarrow \infty$  болғандықтан,  $n$  санының жеткілікті мөлшерде үлкен мәндерінде  $\lambda_n > 1$ . Осыларды ескертіп, (80) өрнегіне Коши-Буняковский теңсіздігін пайдалансақ,

$$\left| \sum_{k=n}^{n+p} \frac{1}{\lambda_k^{(m)}} \varphi_k(x) \varphi_k(s) \right| \leq \frac{1}{\lambda_k^{(m-2)}} \sum_{k=n}^{n+p} \frac{1}{\lambda_k^2} |\varphi_k(x)| \cdot |\varphi_k(s)| \leq$$

$$\leq \frac{1}{\lambda_k^{(m-2)}} \left( \sum_{k=n}^{n+p} \frac{\varphi_k^2(x)}{\lambda_k^2} \right)^{\frac{1}{2}} \left( \sum_{k=n}^{n+p} \frac{\varphi_k^2(s)}{\lambda_k^2} \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Жоғарыдағы (78) Бессель теңсіздігі мен соңғы теңсіздіктен

$$\left| \sum_{k=n}^{n+p} \frac{1}{\lambda_k^{(m)}} \cdot \varphi_k(x) \varphi_k(s) \right| < \varepsilon \quad (n > N, \forall p)$$

екені шығады. Олай болса, қатардың жинақтылығын көрсетуші Коши белгісі бойынша, (80) қатары бірқалыпты жинақты және оның қосындысы  $K_n(x, s)$  болады. Сонымен мына теорема орынды.

**Теорема.** Егер  $K(x, s)$  ядросы  $\int_a^b K^2(x, s) ds \leq A$  шартын қанағаттандырса, онда  $m \geq 3$  мәндерінде (80) қатары  $D \equiv \{a \leq x, s \leq b\}$  облысында абсолютті және бірқалыпты жинақты болады да:

$$K_m(x, s) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_k^{(m)}} \cdot \varphi_k(x) \varphi_k(s).$$

Мысал. Фредгольмнің 2-текті интегралдық

$$\varphi(x) = \lambda \int_0^{\pi} \cos(x-t) \varphi(t) dt + \sin x$$

теңдеуінің шешімін табайық.

Шешуі.  $\cos(x-t) = \cos x \cos t + \sin x \sin t$  формуласын пайдалансақ, теңдеуді

$$\varphi(x) = \lambda \cos x \int_0^{\pi} \cos t \varphi(t) dt + \lambda \sin x \int_0^{\pi} \sin t \varphi(t) dt + \sin x$$

түріне келтіреміз. Бұл өрнекте

$$C_1 = \int_0^{\pi} \cos t \varphi(t) dt, C_2 = \int_0^{\pi} \sin t \varphi(t) dt$$

деп белгілесек, онда  $\varphi(x) = \lambda C_1 \cos x + \lambda C_2 \sin x + \sin x$  теңдеуі шығады. Бұл теңдеуде  $C_1$  мен  $C_2$  белгісіз тұрақты коэффициенттер. Оларды табу үшін теңдіктің екі жағын  $\cos x$  пен  $\sin x$  функцияларына көбейтіп, одан кейін  $x$  бойынша 0-ден  $\pi$ -ге дейін интегралдап,

$$C_1 = \int_0^{\pi} \cos x \varphi(x) dx = \lambda C_1 \int_0^{\pi} \cos^2 x dx + \lambda C_2 \int_0^{\pi} \sin x \cos x dx + \int_0^{\pi} \sin x \cos x dx,$$

$$C_2 = \int_0^{\pi} \sin x \varphi(x) dx = \lambda C_1 \int_0^{\pi} \cos x \sin x dx + \lambda C_1 \int_0^{\pi} \sin^2 x dx + \int_0^{\pi} \sin^2 x dx$$

немесе  $C_1(1 - \frac{\pi}{2}\lambda) = 0$ ,  $C_2 = (1 - \frac{\pi}{2}\lambda) = \frac{\pi}{2} \Rightarrow C_1 = 0$ ,  $C_2 = \frac{\pi}{2 - \lambda\pi}$  екенін табамыз.

Демек, берілген тендеудің шешімі

$$\varphi(x) = \sin x + \frac{\lambda\pi \sin x}{2 - \lambda\pi} \left( \lambda \neq \frac{2}{\pi} \right)$$

болады.