

10 лекция АНЫҚТАЛМАҒАН ИНТЕГРАЛ

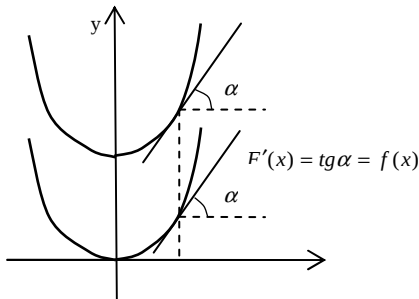
Анықталмаған интеграл. $f(x)$ және $F(x)$ функциялары ақырлы немесе ақырсыз X аралықта анықталған функциялар болсын.

Анықтама. X аралығында дифференциалданатын $F(x)$ функциясы

$$F'(x) = f(x)$$

теңдігін қанағаттандырса $F(x)$ функциясы $f(x)$ функциясының **алғашқы функциясы** деп аталады.

Мысалы, $F(x)=x^3$ функциясы $f(x)=3x^2$ функциясының алғашқы функциясы болады, себебі



$$F'(x) = (x^3)' = 3x^2 = f(x)$$

$F'(x)$ туындының геометриялық мағынасы $y=F(x)$ функциясына x нүктеде жүргізілген жанаманың бұрыштық коэффициенті. Сонда, $f(x)$ функцияның алғашқы функциясын табу дегеніміз x нүктеде жүргізілген жанамасының бұрыштық коэффициенті сол нүктедегі $f(x)$ функциясының мәніне тең болатын $y=F(x)$ қисығын табу деген сөз, яғни

$$F'(x) = \operatorname{tg} \alpha = f(x).$$

$f(x)$ функцияның алғашқы функциясы бізмәнді анықталмаған. Шынында да, мысалдағы $f(x)=3x^2$ функцияларының алғашқы функциялары ретінде мына функцияларды алуымызға болады: x^3+1 , x^3-5 , x^3+C , мұндағы C -қандай да бір нақты сан (себебі, бұл функциялардың туындысы $3x^2$ болады). Жалпы жағдайда айтсақ, $f(x)$ функцияның алғашқы функциясы $y=F(x)$ табылса, онда $F(x)+C$ функциясы да $f(x)$ функцияның алғашқы функциясы болады, себебі $(F(x)+C)' = F'(x)+0 = f(x)$. Геометриялық тұрғыдан қарастырсақ, $F'(x) = \operatorname{tg} \alpha = f(x)$ шартын қанағаттандыратын бір $y=F(x)$ функция табылса, онда функция графигін Оу осі бойымен C шамаға жылжыту арқылы осы шартты қанағаттандыратын қисықтарды аламыз (бұлай жылжыту бұрыштық коэффициентті өзгертпейді).

Мынадай теорема дұрыс болады.

Теорема. Егер X аралығында $F(x)$ және $\Phi(x)$ функциялары $f(x)$ функциясының алғашқы функциясы болса, онда қандай да бір C саны табылып, мына теңдік орындалады:

$$\Phi(x) = F(x) + C.$$

Бұл теоремадан егер $F(x)$ функциясы $f(x)$ функциясының алғашқы функциясы болса, онда $F(x)+C$ өрнегі $f(x)$ функциясының барлық алғашқы функцияларының жиынын беретіндігі шығады.

Анықтама. $f(x)$ функциясының алғашқы функцияларының жиыны оның **анықталмаған интегралы** деп аталады және $\int f(x)dx$ деп белгіленеді, мұндағы $\int$ - интеграл белгісі; $f(x)$ - интеграл астындағы функция; $f(x)dx$ - интеграл астындағы өрнек. Сонымен,

$$\int f(x)dx = F(x) + C, \quad (1)$$

мұндағы $F(x)$ - алғашқы функция, C - ерікті тұрақты.

Мысалдағы, $f(x)=3x^2$ функциясының алғашқы функциясы $F(x)=x^3$ болғандықтан, анықтама бойынша $\int 3x^2 dx = x^3 + C$.

Берілген функцияның алғашқы функциясын табу амалы **функцияны интегралдау** деп аталады. Функцияны интегралдау амалы дифференциалдау амалына кері амал.

Мұнда интеграл астындағы dx символы өте маңызды және ол интегралдау қандай айнымалы бойынша есептелінетіндігін білдіреді. Мысалға

$$\int xtdx = \frac{tx^2}{2} + C \text{ болса, } \int xtdt = \frac{xt^2}{2} + C$$

Интеграл анықтамасынан мынадай қасиеттер шығады.

1. $(\int f(x)dx)' = f(x)$.

2. $d(\int f(x)dx) = f(x)dx$.

3. $\int dF(x) = F(x) + C$.

4. Берілген аралықта $f(x)$ және $g(x)$ функцияларының алғашқы функциялары бар болса, онда $f(x)+g(x)$ функциясының да алғашқы функциясы бар болады және

$$\int (f(x) + g(x))dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx.$$

5. $\int kf(x)dx = k \int f(x)dx$.

6. Егер $\int f(x)dx = F(x) + C$ болса, онда

$$\int f(ax+b)dx = \frac{1}{a} F(ax+b) + C.$$

Анықталмаған интегралдар кестесі:

1	$\int 0dx = C$	2	$\int 1dx = x + C$
3	$\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C, x > 0, \alpha \neq -1$	4	$\int \frac{dx}{x} = \ln x + C, x \neq 0$
5	$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C, 0 < a \neq 1$	6	$\int e^x dx = e^x + C$
7	$\int \cos x dx = \sin x + C$	8	$\int \sin x dx = -\cos x + C$
9	$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \tan x + C, x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$	10	$\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\cot x + C, x \neq k\pi$
11	$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C,$ $-1 < x < 1$	12	$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + C,$ $-a < x < a$
13	$\int \frac{dx}{1+x^2} = \arctg x + C$	14	$\int \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + C$
15	$\int \frac{dx}{x^2-a^2} = \frac{1}{2a} \ln \left \frac{x-a}{x+a} \right + C$	16	$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+k}} = \ln \left x + \sqrt{x^2+k} \right + C$

ИНТЕГРАЛДАУ ӘДІСТЕРІ

1. Бірден интегралдау. Белгілі формулалар көмегімен интегралды бір немесе бірнеше кестелік интегралға келтіруге болатын кезде қолданамыз. Мысалдар қарастырайық.

а) $\int (x^2 - \sqrt[3]{7x} + 1)dx = \int x^2 dx - \sqrt[3]{7} \int x^{\frac{1}{3}} dx + \int 1dx = \frac{x^3}{3} + \sqrt[3]{7} \frac{x^{\frac{1}{3}+1}}{\frac{1}{3}+1} + x + C = \frac{x^3}{3} + \sqrt[3]{7} \frac{x^{\frac{4}{3}}}{\frac{4}{3}} + x + C$

б) $\int \cos^2 x dx = \int \frac{1 + \cos 2x}{2} dx = \int \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos 2x \right) dx = \frac{1}{2} x + \frac{1}{4} \sin 2x + C.$

$$в) \int (3x+4)^{17} dx = \frac{1}{3} \frac{(3x+4)^{18}}{18} + C = \frac{(3x+4)^{18}}{54} + C \text{ (6-қасиет бойынша есептелді).}$$

$$г) \int \frac{6x-7}{3x^2-7x+5} dx = \left\| \begin{array}{l} (3x^2-7x+5)' = 6x-7 \\ \text{болгандыктан} \end{array} \right\| = \ln|3x^2-7x+5| + C.$$

2. Айнымалыны алмастыру әдісі. $I = \int f(x) dx$ интегралын қарастырайық. Айталық, $x=g(t)$ функциясы дифференциалданатын функция болсын. Сонда $dx=g'(t)dt$ және

$$\int f(x) dx = \int f[g(t)]g'(t) dt.$$

Бұл әдіс айнымалыны ұтымды алмастыруға негізделген. Айнымалыны алмастыру арқылы интеграл бірден немесе бірнеше амалдардан кейін кестелік интегралға келтіріледі. Мысалдар қарастырайық.

$$а) \int x e^{x^2} dx = \left\| \begin{array}{l} x^2 = t \Rightarrow 2x dx = dt; \\ x dx = \frac{1}{2} dt \end{array} \right\| = \frac{1}{2} \int e^t dt = \frac{1}{2} e^t + C = \frac{1}{2} e^{x^2} + C$$

$$б) \int \frac{x^2 dx}{1+x^6} = \left\| \begin{array}{l} x^3 = t \Rightarrow 3x^2 dx = dt; \\ x^2 dx = \frac{1}{3} dt \end{array} \right\| = \frac{1}{3} \int \frac{dt}{1+t^2} = \frac{1}{3} \arctg t + C = \frac{1}{3} \arctg x^3 + C$$

$$в) \int \frac{dx}{x(1+\ln x)} = \left\| 1 + \ln x = t \Rightarrow \frac{dx}{x} = dt \right\| = \int \frac{dt}{t} = \ln|t| + C = \ln|1+\ln x| + C$$

3. Бөліктеп интегралдау әдісі. Бұл әдіс мынадай қатынасқа негізделген:

$$d(uv) = u dv + v du \Rightarrow u dv = d(uv) - v du$$

мұндағы $u=f(x)$ және $v=g(x)$ функциялары туындылары бар функциялар. Теңдіктің екі жағынан да интеграл алсақ,

$$\int u dv = \int d(uv) - \int v du,$$

осыдан

$$\int u dv = uv - \int v du.$$

Бұл әдісті қолданғанда u және v функцияларын $\int v du$ интеграл $\int u dv$ интегралға қарағанда оңай алынатындай етіп таңдайды. Мысалдар қарастырайық.

$$а) \int x e^x dx = \left\| \begin{array}{l} x = u \Rightarrow du = dx; \\ e^x dx = dv \Rightarrow v = e^x \end{array} \right\| = x e^x - \int e^x dx = x e^x - e^x + C =$$

$$= e^x (x-1) + C.$$

$$б) J = \int e^x \cos x dx = \left\| \begin{array}{l} \cos x = u \Rightarrow du = -\sin x dx; \\ e^x dx = dv \Rightarrow v = e^x \end{array} \right\| = e^x \cos x + \int e^x \sin x dx =$$

$$= \left\| \begin{array}{l} \sin x = u \Rightarrow du = \cos x dx; \\ e^x dx = dv \Rightarrow v = e^x \end{array} \right\| = e^x \cos x + e^x \sin x - \int e^x \cos x dx = e^x (\cos x + \sin x) - J.$$

$$J = e^x (\cos x + \sin x) - J \Rightarrow J = \frac{1}{2} e^x (\cos x + \sin x) + C.$$

Төмендегі интегралдар тобы тек бөліктеп интегралдау әдісімен есептелінеді:

$$\int x^n \ln x dx; \quad \int x^n \arcsin x dx; \quad \int x^n \arccos x dx; \quad \int x^n \arctg x dx.$$

Рационал функцияларды интегралдау.

$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n$ түріндегі өрнекті n -дәрежелі көпмүшелік деп атайды. Мұндағы $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n$ - нақты сандар ($a_n \neq 0, n > 0$). Көпмүшеліктердің қатынасы түрінде берілген өрнек рационал өрнек болады.

Мысалы $\frac{3x-1}{x^2+1}, \frac{x^3-5x^2+1}{x-1}$ бөлшектер рационал өрнектер.

Егер бөлшектің алымындағы көпмүшеліктің дәрежесі бөліміндегі көпмүшелік дәрежесінен кем болса, бөлшек дұрыс деп, ал кем болмаса бөлшек бұрыс деп аталады. Мысалдағы бірінші бөлшек - дұрыс, ал екінші - бұрыс бөлшек.

Кез келген бұрыс бөлшекті алымын бөлімге бөлу арқылы дұрыс бөлшекке келтіріп алуға болады.

Мысалы, $\frac{x^3-5x^2+1}{x-1}$ бөлшекті дұрыс бөлшекке келтірейік:

$$\begin{array}{r} x^3 - 5x^2 + 1 \mid x - 1 \\ \underline{x^3 - x^2} \mid x^2 - 4x - 4 \\ -4x^2 + 1 \mid \\ \underline{-4x^2 + 4x} \mid \\ -4x + 1 \mid \\ \underline{-4x + 4} \mid \\ -3 \end{array}$$

Сонымен, берілген бөлшектің бүтін бөлігін бөліп дұрыс бөлшекке келтірдік:

$$\frac{x^3-5x^2+1}{x-1} = x^2 - 4x - 4 - \frac{3}{x-1}.$$

Мектеп курсынан көпмүшеліктің мынадай қасиеті белгілі: Кез келген көпмүшелікті $(x-a)^\alpha$ және $(x^2+px+q)^\beta$ түріндегі көбейткіштерге жіктеуге болады.

Мынадай тұжырым дұрыс болады: **Егер дұрыс рационал бөлшек бөлімі $(x-a)^\alpha$ және $(x^2+px+q)^\beta$ түріндегі көбейткіштерге жіктелген болса, онда бөлшекті мынадай қарапайым бөлшектердің қосындысына жіктеуге болады:**

$$\begin{aligned} \frac{P(x)}{(x-a)^\alpha (x^2+px+q)^\beta} &= \frac{A_1}{x-a} + \frac{A_2}{(x-a)^2} + \dots + \frac{A_\alpha}{(x-a)^\alpha} + \\ &+ \frac{B_1 x + C_1}{x^2+px+q} + \frac{B_2 x + C_2}{(x^2+px+q)^2} + \dots + \frac{B_\beta x + C_\beta}{(x^2+px+q)^\beta}, \end{aligned} \quad (2)$$

мұндағы $P(x)$ – белгілі көпмүшелік, $A_1, A_2, \dots, A_\alpha, B_1, B_2, \dots, B_\beta, C_1, C_2, \dots, C_\beta$ – белгісіз коэффициенттер. Ол коэффициенттерді табу үшін белгісіз коэффициенттер әдісін пайдаланамыз: теңдіктің оң жағын ортақ бөлімге келтіреміз; екі бөлшектің бөлімдері тең болатындықтан, алымдарын теңестіреміз; теңдіктің екі жағындағы x айнымалының бірдей дәрежелері алдындағы коэффициенттерін теңестіру арқылы теңдеулер жүйесін аламыз; осы жүйені шешіп белгісіз коэффициенттерді табамыз.

Мысалы $\frac{3x^2 + 2x + 1}{(x+1)^2(x^2 - x + 1)}$ бөлшегін қарапайым бөлшектер қосындысына жіктейік.

Бөлшек дұрыс, сондықтан (2) формула бойынша бөлшекті жіктейміз,

$$\frac{3x^2 + 2x + 1}{(x+1)^2(x^2 - x + 1)} = \frac{A_1}{x+1} + \frac{A_2}{(x+1)^2} + \frac{Bx + C}{x^2 - x + 1}$$

Белгісіз коэффициенттерді табу үшін теңдіктің оң жағын ортақ бөлімге келтіріп жазайық:

$$\frac{3x^2 + 2x + 1}{(x+1)^2(x^2 - x + 1)} = \frac{A_1(x+1)(x^2 - x + 1) + A_2(x^2 - x + 1) + (Bx + C)(x+1)^2}{(x+1)^2(x^2 - x + 1)}$$

Бөлімдері бірдей, алымдарын теңестіреміз (оң жақтағы бөлшек алымын ықшамдап, x -тің дәрежесі түрінде жазайық):

$$3x^2 + 2x + 1 = (A_1 + B)x^3 + (A_2 + 2B + C)x^2 + (-A_2 + B + 2C)x + A_1 + A_2 + C.$$

Теңдіктің екі жағындағы x айнымалының бірдей дәрежелері алдындағы коэффициенттерін теңестіру арқылы теңдеулер жүйесін аламыз:

$$\begin{cases} A_1 + B = 0 \\ A_2 + 2B + C = 3 \\ -A_2 + B + 2C = 2 \\ A_1 + A_2 + C = 1 \end{cases}$$

Төрт белгісізді, төрт теңдеуден тұрған жүйені шешіп, белгісіз коэффициенттерді табамыз:

$$A_1 = -\frac{2}{3}; \quad A_2 = \frac{2}{3}; \quad B = \frac{2}{3}; \quad C = 1.$$

Табылған мәндерді теңдіктегі орнына қойып, бөлшектің қарапайым жіктелуін аламыз:

$$\frac{3x^2 + 2x + 1}{(x+1)^2(x^2 - x + 1)} = -\frac{2}{3(x+1)} + \frac{2}{3(x+1)^2} + \frac{2x+3}{3(x^2 - x + 1)}.$$

Енді осы рационал бөлшекті интегралдайық.

$$\int \frac{3x^2 + 2x + 1}{(x+1)^2(x^2 - x + 1)} dx = \int \left(-\frac{2}{3(x+1)} + \frac{2}{3(x+1)^2} + \frac{2x+3}{3(x^2 - x + 1)} \right) dx =$$

$$= -\frac{2}{3} \int \frac{dx}{x+1} + \frac{2}{3} \int \frac{dx}{(x+1)^2} + \frac{1}{3} \int \frac{2x+3}{x^2 - x + 1} dx$$

Әр интегралды жеке қарастырайық.

1) $\int \frac{dx}{x+1} = \ln|x+1| + C$, мұнда бөлшектің алымы бөлімінің туындысы болғандықтан 7-қасиетті пайдаландық.

$$2) \int \frac{dx}{(x+1)^2} = \left\| \frac{x+1=t}{dx=dt} \right\| = \int \frac{dt}{t^2} = \int t^{-2} dt = \frac{t^{-2+1}}{-2+1} + C = -\frac{1}{t} + C = -\frac{1}{x+1} + C;$$

$$3) \int \frac{2x+3}{x^2-x+1} dx = \int \frac{(2x-1)+4}{x^2-x+1} dx = \int \frac{2x-1}{x^2-x+1} dx + \int \frac{4dx}{x^2-x+1} =$$

$$= \int \frac{2x-1}{x^2-x+1} dx + \int \frac{4d\left(x-\frac{1}{2}\right)}{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}} = \ln|x^2-x+1| + 4 \frac{1}{\frac{\sqrt{3}}{2}} \operatorname{arctg} \frac{x-\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} + C =$$

$$= \ln|x^2-x+1| + \frac{8}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{2x-1}{\sqrt{3}} + C,$$

мұнда бірінші қосылғышты алымы бөлімінің туындысы болғандай етіп түрлендірдік те 7-қасиетті пайдаландық. Ал екінші қосылғышта бөлімінің толық квадратын бөліп алып, интегралдар кестесіндегі 14-формуланы пайдаландық.

Сонымен,

$$\int \frac{3x^2+2x+1}{(x+1)^2(x^2-x+1)} dx = -\frac{2}{3} \ln|x+1| - \frac{2}{3(x+1)} +$$

$$+ \frac{1}{3} \ln|x^2-x+1| + \frac{8}{3\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{2x-1}{\sqrt{3}} + C.$$

11 лекция. ИРРАЦИОНАЛ ЖӘНЕ ТРИГОНОМЕТРИЯЛЫҚ ФУНКЦИЯЛАРДЫ ИНТЕГРАЛДАУ.

1. $\int R(x, \sqrt[n]{x}) dx$ түріндегі интегралды қарастырайық. Мұндағы иррационалдықты $t = \sqrt[n]{x}$ деген белгілеу енгізіп, рационал функцияға келтіруге болады.

Мысал.

$$\int \frac{\sqrt{x}}{x+1} dx = \left\| \frac{t=\sqrt{x} \Rightarrow x=t^2}{dx=2tdt} \right\| = \int \frac{2t^2}{t^2+1} dt = 2 \int \frac{t^2+1-1}{t^2+1} dt =$$

$$= 2 \int \left(1 - \frac{1}{t^2+1} \right) dt = 2(t - \operatorname{arctg} t) + C = 2(\sqrt{x} - \operatorname{arctg} \sqrt{x}) + C.$$

2. $\int R(x, \sqrt{ax^2+bx+c}) dx$ түріндегі интегралды қарастырайық. Қарапайым жағдайларда мұндай интеграл кестелі интегралға келтіріледі. Ол үшін квадрат үшмүшеліктен толық квадрат бөліп алып, айнымалыны алмастыру керек.

Мысал.

$$\int \frac{xdx}{\sqrt{5+2x-x^2}} = \left\| \frac{5+2x-x^2=6-(x-1)^2}{x-1=t \Rightarrow x=t+1} \right\| = \int \frac{(t+1)dt}{\sqrt{6-t^2}} =$$

$$\begin{aligned}
&= \int \frac{tdt}{\sqrt{6-t^2}} + \int \frac{dt}{\sqrt{6-t^2}} = \left\| \begin{aligned} 6-t^2 &= z \\ -2tdt &= dz \\ tdt &= -\frac{1}{2}dz \end{aligned} \right\| = -\frac{1}{2} \int \frac{dz}{\sqrt{z}} + \int \frac{dt}{\sqrt{(\sqrt{6})^2 - t^2}} = \\
&= -\frac{1}{2} \frac{z^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1} + \arcsin \frac{t}{\sqrt{6}} + C = -\sqrt{z} + \arcsin \frac{t}{\sqrt{6}} + C = -\sqrt{6-t^2} + \\
&+ \arcsin \frac{x-1}{\sqrt{6}} + C = -\sqrt{5+2x-x^2} + \arcsin \frac{x-1}{\sqrt{6}} + C.
\end{aligned}$$

3. $\int R(\sin x, \cos x) dx$ түріндегі интегралды қарастырайық. Бұл интегралды $t = \operatorname{tg} \frac{x}{2}$ ($-\pi < x < \pi$) - универсал алмастыру жасау арқылы рационал функцияны интегралдауға келтіреді. Шынында да,

$$\sin x = \frac{2 \operatorname{tg} \frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}} = \frac{2t}{1+t^2}; \quad \cos x = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}} = \frac{1-t^2}{1+t^2};$$

$$t = \operatorname{tg} \frac{x}{2} \Rightarrow x = 2 \operatorname{arctg} t \Rightarrow dx = \frac{2dt}{1+t^2}.$$

Мысал. $\int \frac{dx}{\sin x} = \int \frac{\frac{2dt}{1+t^2}}{\frac{2t}{1+t^2}} = \int \frac{dt}{t} = \ln|t| + C = \ln \left| \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right| + C.$

4. $\int \sin^m x \cos^n x dx$ түріндегі интегралды қарастырайық. Бұл интегралда екі жағыдай болуы мүмкін:

а) m немесе n сандарының біреуі тақ оң сан. Егер m – тақ сан болса $\cos x = t$ деген, ал егер n – тақ сан болса, $\sin x = t$ деген алмастыру жасалады.

б) m және n сандары жұп оң сан. Онда мынадай формулаларды пайдаланады:

$$\sin x \cos x = \frac{1}{2} \sin 2x;$$

$$\sin^2 x = \frac{1}{2}(1 - \cos 2x); \quad \cos^2 x = \frac{1}{2}(1 + \cos 2x).$$

12-лекция. АНЫҚТАЛҒАН ИНТЕГРАЛ

$y=f(x)$ функциясы $[a;b]$ кесіндісінде үзіліссіз болсын. $[a;b]$ кесіндісін n бөлікке бөлеміз:
 $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$.

Әр бір $[x_{i-1}; x_i]$ кесіндіден ξ_i нүкте алып, $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ деп белгілеп, мынадай қосынды құрайық:

$$\sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i = f(\xi_1) \Delta x_1 + f(\xi_2) \Delta x_2 + \dots + f(\xi_n) \Delta x_n \quad (1)$$

(1) қосынды $y=f(x)$ функциясының $[a;b]$ кесіндісіндегі **интегралдық қосындысы** деп атайды.

Анықтама. $y=f(x)$ функциясының интегралдық қосындысының $\max \Delta x_i \rightarrow 0$ жағдайдағы шегі функцияның $[a;b]$ аралығындағы **анықталған интегралы** деп аталады және $\int_a^b f(x) dx$ деп белгіленеді.

Сонымен,

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\max \Delta x_i \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i, \quad (2)$$

мұндағы a және b сандары интегралдың сәйкес **төменгі** және **жоғарғы** шектері деп аталады.

Белгіленуі мен айтылуында ұқсастық болғанымен анықталған және анықталмаған интеграл екеуі түрлі ұғымды береді: $\int f(x) dx$ - функциялар жиыны болса; $\int_a^b f(x) dx$ - нақтылы сан болады.

Егер $[a;b]$ кесіндіде $f(x) > 0$ болса, онда анықталған интеграл анықтамасынан оның **геометриялық мағынасы** шығады: $\int_a^b f(x) dx$ - үстіңгі жағынан $y=f(x)$ қисығымен, бүйір жақтарынан $x=a$, $x=b$ түзулерімен, астыңғы жағынан $y=0$ түзуімен шектелген қисық сызықты трапеция ауданы.

Анықталған интеграл қасиеттері.

1. Тұрақтыны шек таңбасы алдына шығаруға болады:

$$\int_a^b C f(x) dx = C \int_a^b f(x) dx.$$

2. Екі функцияның алгебралық қосындысының интегралы сол функциялар интегралдарының алгебралық қосындысына тең болады:

$$\int_a^b [f(x) \pm g(x)] dx = \int_a^b f(x) dx \pm \int_a^b g(x) dx.$$

3. Интеграл шектерінің орындарын ауыстырғанда интеграл таңбасы қарама-қарсыға өзгереді:

$$\int_a^b f(x) dx = - \int_b^a f(x) dx.$$

4. Интеграл шектері бірдей болғанда интеграл мәні нөлге тең:

$$\int_a^a f(x) dx = 0.$$

5. Егер $m \leq f(x) \leq M$ болса, онда

$$m(b-a) < \int_a^b f(x)dx < M(b-a).$$

6. Егер c нүктесі $[a;b]$ кесіндісінде жатқан нүкте болса, онда

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx.$$

7. *Орта мән туралы теорема.* $y=f(x)$ функциясы $[a;b]$ кесіндісінде үзіліссіз функция болса, онда қандай да бір $c \in [a;b]$ нүкте табылады да мына теңдік орындалады:

$$\int_a^b f(x)dx = (b-a)f(c).$$

8. Егер $y=f(x)$ функциясы жұп болса, онда

$$\int_{-a}^a f(x)dx = 2 \int_0^a f(x)dx.$$

9. Егер $y=f(x)$ функциясы тақ болса, онда

$$\int_{-a}^a f(x)dx = 0.$$

10. *Ньютон-Лейбниц формуласы.*

$$\int_a^b f(x)dx = F(x) \Big|_a^b = F(b) - F(a),$$

мұндағы $F'(x) = f(x)$.

11. Анықталған интегралдағы бөліктеп интегралдау:

$$\int_a^b u dv = uv \Big|_a^b - \int_a^b v du.$$

12. Анықталған интегралдағы айнымалыны алмастыру:

$$\int_a^b f(x)dx = \left\| \begin{array}{l} x = g(t) \Rightarrow dx = g'(t)dt \\ a = g(t_0), b = g(T) \end{array} \right\| = \int_{t_0}^T f(g(t))g'(t)dt.$$

13. Меншіксіз интеграл. Егер $y=f(x)$ функциясы $a \leq f(x) < \infty$ аралығында үзіліссіз болса, онда мына шекті $\lim_{b \rightarrow +\infty} \int_a^b f(x)dx$ **жоғары шегі шексіз меншіксіз** интеграл дейді және былай жазады:

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx = \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_a^b f(x)dx.$$

Теңдіктің оң жағындағы шек ақырлы болса меншіксіз **интеграл жинақталады** деп, ал шек ақырсыз немесе болмаса меншіксіз **интеграл жинақталмайды** дейді. Осыған ұқсас мынадай меншіксіз интегралдар анықталады:

$$\int_{-\infty}^b f(x)dx = \lim_{a \rightarrow -\infty} \int_a^b f(x)dx, \quad \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \lim_{\substack{a \rightarrow -\infty \\ b \rightarrow +\infty}} \int_a^b f(x)dx.$$

Мысалдар. 1) $\int_1^2 \frac{dx}{x^2 + x} = \int_1^2 \frac{dx}{x(x+1)} = \int_1^2 \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} \right) dx = \left(\ln|x| - \ln|x+1| \right) \Big|_1^2 =$

$$= \left(\ln \left| \frac{x}{x+1} \right| \right) \Big|_1^2 = \ln \frac{2}{2+1} - \ln \frac{1}{1+1} = \ln \frac{4}{3}.$$

2) $\int_0^1 \ln(1+x)dx = \left\| \begin{array}{l} \ln(1+x) = u \Rightarrow du = \frac{dx}{1+x} \\ dx = dv \Rightarrow v = x \end{array} \right\| = x \ln(1+x) \Big|_0^1 - \int_0^1 \frac{x dx}{1+x} = \ln 2 -$

$$- \int_0^1 \left(1 - \frac{1}{1+x} \right) dx = \ln 2 - (x - \ln|1+x|) \Big|_0^1 = \ln 2 - [1 - \ln 2 - 0 + \ln 1] = \ln 4 - 1.$$

3) $\int_0^{+\infty} e^{-x} dx = \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_0^b e^{-x} dx = \lim_{b \rightarrow +\infty} \left(-e^{-x} \right) \Big|_0^b = \lim_{b \rightarrow +\infty} (e^0 - e^{-b}) = 1.$

