КОМПЬЮТЕРНОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ТЕХНИЧЕСКИХ ЗАДАЧ

Лектор: Болегенова Салтанат Алихановна
+7 701 386 97 55
e-mail.: Saltanat.Bolegenova@kaznu.kz

УСТОЙЧИВОСТЬ РАЗНОСТНЫХ СХЕМ

Цель лекции - Понятия аппроксимации, устойчивости и сходимости разностных схем

Сходящаяся конечно-разностная схема *математически определяется как схема, дающая конечно-разностная решение, которые стремится к решению дифференциального уравнения при стремлении шагов сетки к нулю.*

Эта концепция более тонкая, чем может показаться с первого взгляда. Она является не просто перефразировкой определения производной; под пределом здесь понимается предел всего решения дифференциального уравнения, а не просто его отдельных членов (производных). Это свойство называется *аппроксимацией*. Например, конечно-разностный аналог дифференциального уравнения может состоять из конечных разностей, каждая из которых аппроксимирует соответствующий член дифференциального уравнения, но в целом этот аналог может быть несходящимся.

Близость конечно-разностной схемы и исходной дифференциальной задачи оценивается по величине невязки, получающейся при подстановке точного решения в уравнение и граничные условия конечно-разностной задачи.

Обозначим всю совокупность уравнений, входящих в задачу (основное дифференциальное уравнение и граничное и начальное условия) следующим оператором:

$$L(f)=0, \tag{5.1}$$

где f — точное решение дифференциального равнения (5.1).

Аналогично конечно-разностную соответствующую задачу в операторном виде можно записать следующим образом:

$$L_{\Delta}(f_{\Delta})=0, \tag{5.2}$$

где f_{Δ} — сеточная функция, являющаяся решением конечно-разностной задачи (5.2).

Ошибкой аппроксимации (или невязкой) *конечно-разностной схемы (5.2) на точном решении задачи (3.1) называется конечно-разностная функция* $\alpha_{\Delta}=L_{\Delta}(f)$.

Схема называется ***аппроксимирующей на точном решении****, если при стремлении шагов сетки к нулю ошибка аппроксимации стремится к нулю.*

Для одномерного случая это определение можно записать следующим образом:

$$\alpha_{\Delta}\to 0 \qquad \text{при } \Delta x\to 0. \tag{5.3}$$

В двумерном случае шаг Δt, как правило, связан с шагом Δx, и $\Delta t\to 0$ при $\Delta x\to 0$, поэтому условие (3.3) справедливо и для двумерной задачи. Очевидно, что для аппроксимирующей схемы ошибка аппроксимации тем меньше, чем меньше шаг аппроксимации Δx. Для двумерной задачи важен также закон согласованного уменьшения шагов по времени и по пространственной переменной.

Например, при выполнении условия $\dfrac{\Delta x}{\Delta t} = const$ схема может быть несходящейся к точному решению, а при $\dfrac{\Delta x^2}{\Delta t} = const$ — сходящейся.

Кроме ошибок аппроксимации при численном счете возникают ошибки округления, которые, наоборот, возрастают при уменьшении шага сетки (т.е. при увеличении числа шагов). Схематичный рост ошибок аппроксимации и округления показан на рисунке 4.

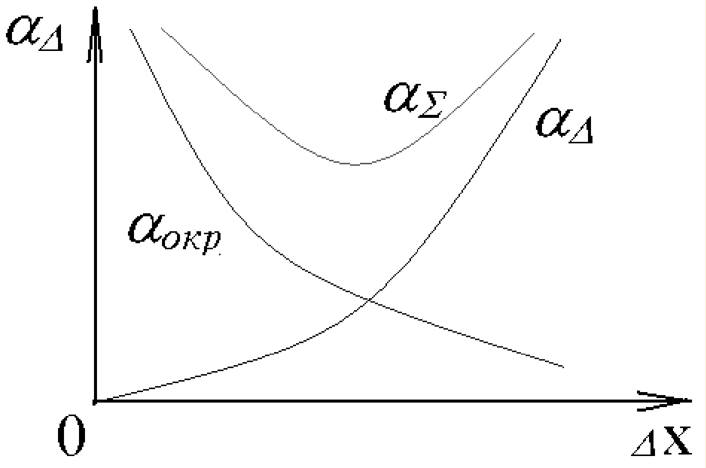

Рис. 4. Схематичный рост ошибок аппроксимации и округления

Из этого рисунка видно, что при $\alpha_\Delta \to 0$ ошибки округления могут сильно возрастать, и поэтому конечно-разностная схема может быть аппроксимирующей, но несходящейся.

Нужно различать понятия аппроксимирующей и сходящейся схемы. Условие сходимости можно записать следующим образом:

$f_\Delta \to f$ при $\Delta x \to 0$,

а условие аппроксимации имеет вид (3.3). $f - f_\Delta$ можно рассматривать как возмущение решения сеточной задачи, вызванное малым возмущением α_Δ в правой части уравнения (3.2).

Для того чтобы из свойства аппроксимации (т.е. из стремления к нулю α_Δ) следовала сходимость (т.е. стремление к нулю $f - f_\Delta$), достаточно дополнительно потребовать, чтобы схема была ***устойчивой относительно малых возмущений****.*

3.2 Описание неустойчивости

Рассмотрим модельное уравнение (5.1):

$$\frac{\partial f}{\partial t} + u\frac{\partial f}{\partial x} = a\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}.$$

Конечно-разностная схема с разностями вперед по времени и центральными разностями по пространственной переменной имеет вид:

$$\frac{f_i^{n+1} - f_i^n}{\Delta t} + u\,\frac{f_{i+1}^n - f_{i-1}^n}{2\Delta x} = a\,\frac{f_{i+1}^n + f_{i-1}^n - 2f_i^n}{\Delta x^2}\,.$$

Для краткости дальше вместо u_i^n будем писать просто u. Перепишем это уравнение следующим образом:

$$\begin{aligned} f_i^{n+1} - f_i^n &= -\frac{u\Delta t}{2\Delta x}\left(f_{i+1}^n - f_{i-1}^n\right) + \\ &+ \frac{a\Delta t}{\Delta x^2}\left(f_{i+1}^n + f_{i-1}^n - 2f_i^n\right) \end{aligned}. \qquad (5.4)$$

Введем следующие обозначения:

$C = \dfrac{u\Delta t}{\Delta x}$ — число Куранта,

$d = \dfrac{a\Delta t}{\Delta x^2}$ — диффузионное число.

После этого уравнение (3.4) запишется так:

$$f_i^{n+1} = f_i^n - \frac{C}{2}\left(f_{i+1}^n - f_{i-1}^n\right) + d\left(f_{i+1}^n + f_{i-1}^n - 2f_i^n\right). \qquad (5.5)$$

Пусть на n-ном слое по времени возникло малое возмущение ε_i^n в виде, представленном на рисунке 5, *а*.

ε_i^n возрастает от точки к точке и имеет разные знаки в соседних узлах. Такие возмущения могут порождаться либо ошибками округления, либо поперечными движениями в реальной двумерной задаче. Возмущение, возникшее на n-ном слое, непременно проявится на $(n+1)$-ом слое. Если возмущение на следующих временных слоях уменьшается по абсолютному значению, то конечно-разностная схема является устойчивой. Таким образом, условие устойчивости в данном случае имеет следующий вид:

$$\left|\varepsilon_i^{n+1}\right| \le \left|\varepsilon_i^n\right|$$

или:

$$\left|\frac{\varepsilon_i^{n+1}}{\varepsilon_i^n}\right| \le 1. \qquad (5.6)$$

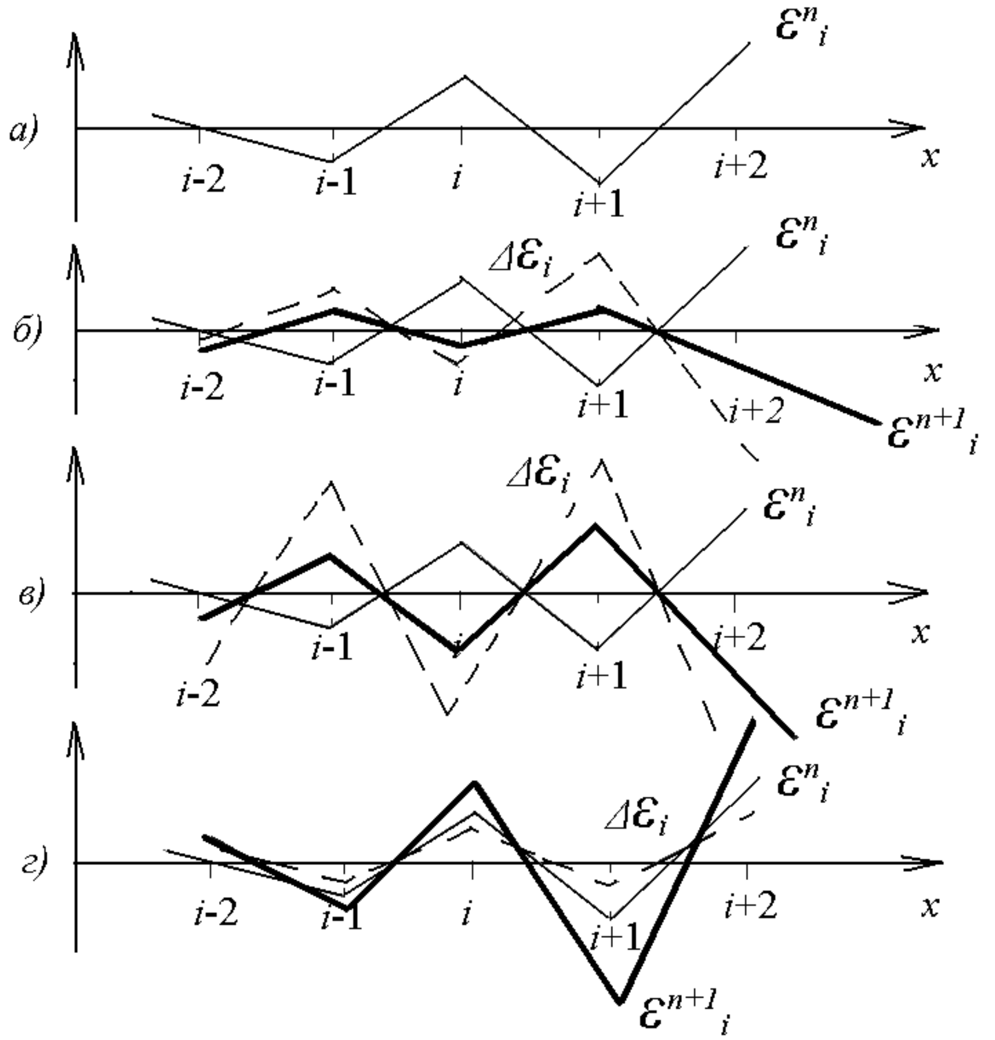

Рис. 5. Конечно-разностные схемы

Проследим за развитием возмущения. Для этого запишем уравнение (5.5) с учетом наложенного на *n*-ном слое возмущения:

$$f_i^{n+1} + \varepsilon_i^{n+1} = f_i^n + \varepsilon_i^n - \frac{C}{2}\left[\left(f_{i+1}^n + \varepsilon_{i+1}^n\right) - \left(f_{i-1}^n + \varepsilon_{i-1}^n\right)\right] + \\ + d\left[\left(f_{i+1}^n + \varepsilon_{i+1}^n\right) + \left(f_{i-1}^n + \varepsilon_{i-1}^n\right) - 2\left(f_i^n + \varepsilon_i^n\right)\right] \tag{5.7}$$

Вычтем из уравнения с возмущениями (5.7) «невозмущенное» уравнение (5.5):

$$\varepsilon_i^{n+1} = \varepsilon_i^n - \frac{C}{2}\left(\varepsilon_{i+1}^n - \varepsilon_{i-1}^n\right) + d\left(\varepsilon_{i+1}^n + \varepsilon_{i-1}^n - 2\varepsilon_i^n\right).$$

Найдем отсюда приращение возмущения на *(n+1)*-ом слое:

$$\Delta\varepsilon_i = \varepsilon_i^{n+1} - \varepsilon_i^n = -\frac{C}{2}\left(\varepsilon_{i+1}^n - \varepsilon_{i-1}^n\right) + d\left(\varepsilon_{i+1}^n + \varepsilon_{i-1}^n - 2\varepsilon_i^n\right). \tag{5.8}$$

*Рассмотрим это уравнение только с одним диффузионным членом, т.е. будем считать, что **C=0**:*

$$\Delta\varepsilon_i = d\left(\varepsilon_{i+1}^n + \varepsilon_{i-1}^n - 2\varepsilon_i^n\right). \tag{5.9}$$

Проанализируем это уравнение в точке i:

$$\Delta\varepsilon_i = d\left(\varepsilon_{i+1}^n + \varepsilon_{i-1}^n - 2\varepsilon_i^n\right) > 0,$$

т.к. $\varepsilon^n_{i+1}>0$, $\varepsilon^n_{i-1}>0$, $\varepsilon_i^n<0$. Следовательно, $\Delta\varepsilon_i>0$ и стремится скорректировать отрицательное возмущение в точке i. Аналогично, рассматривая $\Delta\varepsilon_{i+1}$, имеем:

$$\Delta\varepsilon_{i+1} = d\left(\varepsilon_{i+2}^n + \varepsilon_i^n - 2\varepsilon_{+1i}^n\right) < 0,$$

т.к. $\varepsilon^n_{i+2}<0$, $\varepsilon^n_i<0$, $\varepsilon^n_{i+1}>0$, т.е. положительное возмущение ε^n_{i+1} корректируется отрицательным приращением $\Delta\varepsilon_{i+1}$. Таким образом, можно изобразить, каким будет приращение возмущения на *(n+1)*-ом слое (пунктирная линия на рисунке 5, *б*). Складывая графически ε_i^n и $\Delta\varepsilon_i$, получим вид возмущения на *n+1*-ом слое (жирная линия на рисунке 5, *б*):

$$\varepsilon_i^{n+1} = \varepsilon_i^n + \Delta\varepsilon_i.$$

Из рисунка 5, *б* видно, что в данном случае условие устойчивости (3.6) выполняется, и, следовательно, *конечно-разностное уравнение (3.9)* ***устойчиво***. Однако если шаг Δt слишком велик, то поправка за счет приращения $\Delta\varepsilon_{i+1}$ окажется чрезмерной. Для таких слишком больших Δt величина нового ε_i^{n+1} будет больше начального возмущения ε_i^n, как это показано на рисунке 5, *в*.

Появление таких осцилляций нарастающей амплитуды, обусловленных чрезмерно большим шагом по времени, называется ***динамической неустойчивостью***.

Динамическую неустойчивость можно устранить, наложив ограничения на шаг по времени Δt.

Рассмотрим теперь уравнение (3.8) с одним конвективным членом, то есть, предположив, что ***d=0***: Уравнение (3.8) в этом случае примет вид:

$$\Delta\varepsilon_i = -\frac{C}{2}\left(\varepsilon_{i+1}^n - \varepsilon_{i-1}^n\right). \tag{5.10}$$

Пусть $u>0$, то есть $C>0$. Приращение возмущения в точке i:

$$\Delta\varepsilon_i = -\frac{C}{2}\left(\varepsilon_{i+1}^n - \varepsilon_{i-1}^n\right) < 0,$$

т.к. $\varepsilon^n_{i+1}>0$, $\varepsilon^n_{i-1}>0$, но амплитуда ε растет с ростом i, то есть $\varepsilon^n_{i+1}>\varepsilon^n_{i-1}$, следовательно, выражение в скобках положительно. Таким образом, приращение $\Delta\varepsilon_i$, обусловленное конвекцией, усиливает возмущение ε_i^n. Это означает, что ошибка растет монотонно (рисунок 5, *г*).

Появление такой нарастающей ошибки называется ***статической неустойчивостью****, которую нельзя устранить уменьшением шага по времени и можно устранить только переходом к какой-либо другой конечно-разностной схеме.*

Таким образом, уравнение (3.5) при $C=0$ является условно устойчивым, а при $d=0$ — абсолютно неустойчивым. Если же одновременно $C\neq0$ и $d\neq0$, то конвективный и диффузионный члены будут взаимодействовать друг с другом, и в целом уравнение (3.5) может оказаться как устойчивым, так и неустойчивым. Чтобы ответить на вопрос об устойчивости уравнения (3.5), необходимо проанализировать его на устойчивость одним из методов, которые будут рассмотрены ниже.

Контрольные вопросы:

1. Напишите правостороннее конечно-разностное соотношение для первой производной.
2. Напишите левостороннее конечно-разностное соотношение для первой производной.
3. Напишите центральное конечно-разностное соотношение для первой производной.
4. Напишите конечно-разностное соотношение для второй производной.
5. Какие из этих 4-х конечно-разностных соотношений имеют 1-й порядок точности, а какие 2-й?
6. Напишите конечно-разностное соотношение для частной производной