КОМПЬЮТЕРНОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ТЕХНИЧЕСКИХ ЗАДАЧ

Лектор: Болегенова Салтанат Алихановна
+7 701 386 97 55
e-mail.: Saltanat.Bolegenova@kaznu.kz

МЕТОДЫ ИССЛЕДОВАНИЯ КОНЕЧНО-РАЗНОСТНЫХ СХЕМ НА УСТОЙЧИВОСТЬ

Цель лекции - Методы исследования конечно-разностных схем на устойчивость

Метод дискретных возмущений

Идея метода дискретных возмущений состоит в том, что в уравнение *в каждую точку поочередно* вводится дискретное возмущение ε и прослеживается влияние этого возмущения на следующих временных слоях. Конечно-разностная схема будет устойчивой, если возмущение не возрастает, то есть выполняется условие (3.6).

Рассмотрим конечно-разностное уравнение (3.5). Введем возмущение ε в точку (i,n):

$$f_i^{n+1} + \varepsilon^{n+1} = \left(f_i^n + \varepsilon^n\right) - \frac{C}{2}\left(f_{i+1}^n - f_{i-1}^n\right) + \\ + d\left[f_{i+1}^n + f_{i-1}^n - 2\left(f_i^n + \varepsilon^n\right)\right].$$

Вычтя из этого уравнения с возмущением «невозмущенное» уравнение (3.5), получим уравнение для возмущений:

$$\varepsilon^{n+1} = \varepsilon^n - 2d\varepsilon^n.$$

Отсюда:

$$\left|\frac{\varepsilon^{n+1}}{\varepsilon^n}\right| = \left|1 - 2d\right| \le 1.$$

Необходимо разрешить полученное неравенство относительно d:

$-1 \le 1-2d \le 1$.

Рассмотрим отдельно правую и левую части этого неравенства:

а) $1-2d \le 1 \Rightarrow d \ge 0$ — это условие выполняется всегда.
б) $-1 \le 1-2d \Rightarrow d \le 1$ — конечно-разностная схема (3.5) устойчива при выполнении этого условия.

Необходимо еще потребовать, чтобы знаки ε^{n+1} и ε^n были одинаковыми во избежание осцилляций, то есть должно выполняться условие:

$$\frac{\varepsilon^{n+1}}{\varepsilon^n} \ge 0.$$

В данном случае это условие означает выполнение следующего неравенства:

$1-2d\geq 0 \;\Rightarrow\; d\leq 1/2$.

Мы получили более жесткое ограничение, чем в *б*), которое включает в себя условие $d \leq 1$. При фиксированных Δx и a это условие накладывает ограничение на шаг по времени:

$$\Delta t \leq \frac{1}{2}\frac{\Delta x^2}{a}.$$

Это ограничение является жестким в смысле затрат времени для расчета на компьютере. Например, предположим, что расчет ведется с некоторым пространственным шагом Δx_1. Максимально возможный шаг по времени $\Delta t_1 = \frac{1}{2}\frac{\Delta x_1}{a}$. Если надо провести расчет с вдвое меньшим шагом $\Delta x_2=\Delta x_1/2$, то шаг по времени $\Delta t_2 = \frac{1}{2}\frac{\Delta x_2^2}{a} = \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2}\frac{\Delta x_1^2}{a} = \frac{1}{4}\Delta t_1$, т.е. шаг по времени придется уменьшить в 4 раза, а затраты компьютерного времени в общей сложности увеличатся в 8 раз. В двумерной задаче уменьшение вдвое шагов Δx и Δy увеличивает затраты времени в 16 раз, а в трехмерной задаче – в 32 раза!

Введем теперь возмущение ε в точку ($i+1,n$):

$$f_i^{n+1} + \varepsilon^{n+1} = f_i^n - \frac{C}{2}\left(f_{i+1}^n + \varepsilon^n - f_{i-1}^n\right) + \\ + d\left(f_{i+1}^n + \varepsilon^n + f_{i-1}^n - 2f_i^n\right).$$

Вычтя из этого уравнения с возмущением «невозмущенное» уравнение (3.5), получим новое уравнение для возмущений:

$$\varepsilon^{n+1} = -\frac{C}{2}\varepsilon^n + d\varepsilon^n.$$

Отсюда условие устойчивости имеет вид:

$$-1 \leq -\frac{c}{2} + d \leq 1$$

$$a) -\frac{c}{2} + d \leq 1 \;\Rightarrow\; \frac{a\Delta t}{\Delta x^2} - \frac{u\Delta t}{2\Delta x} \leq 1,$$

$$\Delta t \le \frac{1}{\frac{a}{\Delta x^2} - \frac{u}{2\Delta x}} \qquad (3.11)$$

Получили еще одно условие устойчивости, которое выполняется только в том случае, если $\frac{a}{\Delta x^2} - \frac{u}{2\Delta x} > 0$, т.к. шаг по времени не может быть отрицательным.

Последнее неравенство можно переписать следующим образом:

$$\frac{u\Delta x}{a} < 2$$

Выражение слева представляет собой сеточное число Пекле: $Pe_c = \frac{u\Delta x}{a}$. Тогда последнее неравенство можно переписать так:

$Pe_c < 2$.

Это условие можно воспринимать как ограничение на шаг по x:

$$\Delta x \le \frac{2a}{u},$$

Это очень жесткое условие, т. к. с интенсификацией процессов тепломассопереноса скорость, как правило, возрастает, следовательно, Δx должен быть уменьшен, а это, в свою очередь, требует уменьшения Δt, что ведет к возрастанию затрат компьютерного времени.

$$б) -1 \le -\frac{c}{2} + d$$

или

$$\Delta t\left(\frac{a}{\Delta x^2} - \frac{u}{2\Delta x}\right) \ge -1.$$

Поскольку $\frac{a}{\Delta x^2} > \frac{u}{2\Delta x}$, то это неравенство выполняется всегда.

Проведя аналогичный анализ для точки (i-1,n), получим:

$$\varepsilon^{n+1} = \frac{C}{2}\varepsilon^n + d\varepsilon^n$$

Отсюда условие устойчивости:

$$-1 \leq \frac{c}{2} + d \leq 1$$

Левая часть этого неравенства выполняется всегда, и никаких ограничений на шаги сетки не накладывает. Правая часть неравенства дает следующее условие:

$$\Delta t \leq \frac{1}{\dfrac{a}{\Delta x^2} + \dfrac{u}{2\Delta x}}$$

Это условие более ограничительное, чем (3.11), поэтому условие (3.11) можно не принимать во внимание.

Таким образом, метод дискретных возмущений для уравнения (3.5) дает три следующих условия:

а) $d \leq \frac{1}{2} \Leftrightarrow \Delta t \leq \frac{\Delta x^2}{2a}$

б) $\mathrm{P}e_c \leq 2 \Leftrightarrow \Delta x \leq \frac{2a}{u}$

в) $\Delta t \leq \dfrac{1}{\dfrac{a}{\Delta x^2} + \dfrac{u}{2\Delta x}}$

Из условия *б*: $u\Delta x<2a$, из условия *а*: $2a \leq \frac{\Delta x^2}{\Delta t}$. Следовательно, получаем еще одно условие:

г) $\frac{u\Delta t}{\Delta x} < 1 \Leftrightarrow C < 1.$

Контрольные вопросы:

1. Напишите правостороннее конечно-разностное соотношение для первой производной.
2. Напишите левостороннее конечно-разностное соотношение для первой производной.
3. Напишите центральное конечно-разностное соотношение для первой производной.
4. Напишите конечно-разностное соотношение для второй производной.
5. Какие из этих 4-х конечно-разностных соотношений имеют 1-й порядок точности, а какие 2-й?
6. Напишите конечно-разностное соотношение для частной производной