

ЛЕКЦИЯ-2

§2.2. Сызықты нормаланған кеңістік

Егер E жиыны төмендегі шарттарды:

1) $\forall x, y \in E$ үшін белгілі бір ережемен олардың қосындысы деп аталатын $z = x + y \in E$ элементі сәйкестендірілсе;

2) $\forall x \in E$ мен $\forall \lambda \in R$ сан үшін белгілі бір ережемен олардың көбейтіндісі деп аталатын элемент $\lambda x \in E$ сәйкестендірілсе;

3) сонда: 10. $x + y = y + x$ коммутативтік; 20. $(x + y) + z = x + (y + z)$ (ассоциативтік); 30. $\exists \theta$ (нөлдік элемент) және $x + \theta = x$; 40. Әрбір x үшін $\exists(-x)$ және $x + (-x) = \theta$; 50. $\forall x$ үшін $1 \cdot x = x$; 60. $\lambda(\mu x) = (\lambda\mu)x$ (көбейтудің ассоциативтігі); 70. $\lambda(x + y) = \lambda x + \lambda y$, $(\lambda + \mu)x = \lambda x + \mu x$ (көбейтудің дистрибутивтігі) қанағаттандырса, онда E жиыны сызықтық кеңістік деп аталады. E жиындағы элементтерді нақты немесе комплекс сандарға көбейтуге байланысты оны нақты немесе комплексті сызықты кеңістіктер деп ажыратады.

Мысалдар.

1. E^n жиыны векторларды қосу және оларды нақты сандарға көбейту амалдарына қатысты сызықты кеңістік болады.

2. $C[a, b]$ үзіліссіз функциялар жиыны функцияларды қосу және оларды нақты сандарға көбейту амалдарына қатысты сызықтық кеңістік болады.

Егер E жиыны:

1) Сызықтық кеңістік болса;

2) $\forall x \in E$ үшін белгілі бір заңмен сол x элементінің нормасы деп аталатын $\|x\|$ оң сан сәйкес келіп, және мына шарттарды аксиомаларды:

10. $\|x\| > 0$, $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = \theta$ (тепе-теңдік аксиомасы);

20. $\|\lambda x\| = |\lambda| \cdot \|x\|$ (біртектілік аксиомасы);

30. $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ (үшбұрыштар аксиомасы) қанағаттандырса, онда E^n -ні сызықтық нормаланған кеңістік деп атайды. Сызықтық нормаланған кеңістікте метрику

$$\rho(x, y) = \|x - y\| \quad (10)$$

теңдігімен анықтауға болады. Міне, осы теңдікпен анықталған арақашықтық жоғарыдағы метриканың барлық аксиомаларын қанағаттандыратынына көз жеткізуге болады. $x - \theta = x$ болғандықтан, (10) өрнегінен $\|x\| = \|x - \theta\| = \rho(x, \theta)$.

Демек, кез келген элементтің нормасы деп сол элементтің нөлдік элементіне дейінгі қашықтығына тең шаманы алуға болады.

$\{x_n\}$ тізбегі үшін $\|x_n - x_0\| \rightarrow 0, n \rightarrow \infty$ шарты орындалса, онда $\{x_n\}$ тізбегі x_0 нүктесіне норма бойынша жинақты деп аталады, яғни $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0$. Егер сызықтық нормаланған кеңістік **норма бойынша жинақты** және толық болса, оны **банахтық кеңістік** немесе **B типтегі кеңістік** деп атайды.

Мысалдар. 1. Элементтерді қосу және санға көбейту операциялары анықталған сызықтық векторлық R^n кеңістігін $\|x\| = \left(\sum_{k=1}^n x_k^2 \right)^{\frac{1}{2}}$ нормасымен B типтегі кеңістікке айналдыруға болады, мұнда $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$.

2. Егер $C[a, b]$ жиынында норманы

$$\|x\| = \max_{a \leq t \leq b} |x(t)|$$

түрінде анықтасақ, B типтегі кеңістік алуға болады.

3. $L_2[a, b]$ кеңістігінде $\|x\| = \left(\int_a^b x^2(t) dt \right)^{\frac{1}{2}}$

нормасымен B типтегі кеңістік болады.

4. $[a, b]$ сегментінде үзіліссіз $x(t)$ функцияларынан түзілген сызықтық кеңістікті қарастырайық. Бұл кеңістікті

$$\|x\| = \int_a^b |x(t)| dt \quad (11)$$

нормалы кеңістік етіп алуға болады. Ол кеңістікті $C_1[a, b]$ деп белгілейік. $C_1[a, b]$ толық кеңістік емес. Мысалы,

$$x_n(t) = \begin{cases} 1, & 0 < t < \frac{1}{2}, \\ n-1-2nt, & \frac{1}{2} < t < \left(\frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2n}\right), \\ 0, & \left(\frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2n}\right) < t < 1 \end{cases}$$

үзіліссіз функциялары тізбегі (11) формасы бойынша үзілісті

$$x(t) = \begin{cases} 1, & 0 < t < \frac{1}{2}, \\ 0, & \frac{1}{2} < t < 1 \end{cases}$$

функциясына жинақты. Міне, бұл мысалдан біз $\{x_n(t)\}$ тізбегі $C_1[a, b]$ класында іргелі тізбек, бірақ $C_1[a, b]$ оның шегі жоқ (себебі ол тізбек үзілісті функцияға жинақты), яғни ол толық емес.

§2.3. Сызықтық үзіліссіз операторлар

X пен Y - метрикалық кеңістіктер, ал $D \subset X$ болсын. Егер кез келген $x \in D$ элементіне белгілі бір заңдылықпен $y \in Y$ сәйкес қойылса, яғни D облысындағы элементтер сызықтық A операторы арқылы Y кеңістіктегі $y = Ax$ элементтеріне бейнелесе, онда D облысында сызықты оператор A анықталған дейді, D облысын сызықты A операторының анықталу облысы деп атайды. Егер A операторының әсері мәндерінің жиыны бүкіл Y -пен дәлме-дәл келсе, онда A операторы D -ны Y -ке бейнелейді деп айтамыз.

Мысалдар.

1. X ретінде $C[a, b]$ кеңістігін алайық. Әрбір $x(t) \in C[a, b]$ функциясына

$$y(t) = \int_a^b K(t, s)x(s)ds$$

функциясын сәйкес қойсақ, $C[a, b]$ -да анықталған K интегралдық фредгольм-дік операторын

$$y = Kx = \int_a^b K(t, s)x(s)ds$$

анықтаймыз, мұндағы, $K(t, s)$ берілген $a \leq t, s \leq b$ тіктөртбұрышында үзіліссіз функция.

2. $[a, b]$ сегментінде ақырсыз дифференциалданатын функциялар жиынын $C^\infty(a, b)$ арқылы белгілейік. Әрбір $x(t) \in C^\infty(a, b)$ функциясына оның туындысы $x'(t)$ сәйкестендірсек, онда $C^\infty(a, b)$ -ны $C^\infty(a, b)$ жиынына бейнелейтін дифференциалдау операторы $A \equiv \frac{d}{dt}$ анықтаймыз.

X пен Y сызықтық кеңістіктер болсын. Егер X -ті Y -ке бейнелейтін A операторы үшін: 1) $\forall x_1, x_2 \in X, A(x_1 + x_2) = Ax_1 + Ax_2$ (аддитивтік); 2) $\forall x \in X$ пен α саны үшін $A(\alpha x) = \alpha Ax$ (біртекстілік) шарттары орындалса, онда A операторы сызықтық оператор деп аталады.

Мысалдар.

1. X жиынының кез келген ақырлы элементін қайтадан өзіне сәйкестендіруші $Ix = x$ өрнегімен берілген I операторы сызықтық оператор болады. Әдетте, бұл I операторын бірлік немесе тепе-теңдік оператор деп атайды.

2. $X = Y = C[a, b]$ болсын. Үзіліссіз $K(t, s)$ ядролы фредгольмдік интеграл-дық оператор $Ax = \int_a^b K(t, s)x(s)ds$ сызықты және үзіліссіз болатынын дәлелеу қиын емес.

X пен Y - сызықты нормаланған кеңістіктер, ал $D(A)$ кеңістігі X -ті Y -ке бейнелейтін A операторының анықталу облысы болсын. Егер $\forall \varepsilon > 0$ санына сәйкес $\delta > 0$ саны табылып, $\forall x, x_0 \in D(A)$ нүктелері $\|x - x_0\|_X < \delta$ болғанда $\|Ax - Ax_0\|_Y < \varepsilon$ теңсіздігін қанағаттандырса, онда A операторы $x_0 \in D(A)$ нүктесінде үзіліссіз деп айтады.

1-теорема. Сызықты нормаланған X кеңістігіне анықталған X -ті Y -ке бейнелейтін және $x_0 \in X$ нүктесінде үзіліссіз A операторы бүкіл X кеңістігінде үзіліссіз болады.

Дәлелдеуі. x нүктесі X жиынының кез келген элементі болсын және $x_n \rightarrow x, n \rightarrow \infty$ шарты орындалсын. Ол кезде $x_n - x + x_0 \rightarrow x_0, n \rightarrow \infty$. Ал A операторы x_0 нүктесінде үзіліссіз болғандықтан

$$\lim_{n \rightarrow \infty} A(x_n - x + x_0) = Ax_0.$$

Екінші жағынан, A операторының сызықтық болуына байланысты $A(x_n - x + x_0) = Ax_n - Ax + Ax_0$. Сондықтан $\lim_{n \rightarrow \infty} (Ax_n - Ax + Ax_0) = Ax_0$, бұл өрнектен $\lim_{n \rightarrow \infty} Ax_n = Ax$ теңдігі шығады. Демек, A операторы $\forall x \in X$ нүктесінде үзіліссіз.

X -ті Y -ке бейнелейтін сызықтық A операторы бүкіл X -те анықталып, $\forall x \in X$ үшін $M > 0$ саны табылып, $\|Ax\|_Y \leq M \|x\|_X$ теңсіздігі орындалса, онда A -ны шенелген оператор деп атайды.

Сызықтық операторлар арасында олардың шенелгендігі мен үзіліссіздігі тығыз байланыста екенін мына тұжырым көрсетеді.

2-теорема. Сызықтық A операторы үзіліссіз болуы үшін оның шенелген болуы қажетті де жеткілікті.

Дәлелдеуі. A -шенелген оператор және $x_n \rightarrow x_0, n \rightarrow \infty$ болсын. Сонда, егер $n \rightarrow \infty$ жағдайда $\|Ax_n - Ax_0\| = \|A(x_n - x_0)\| \leq M \|x_n - x_0\| \rightarrow 0$ демек, A

үзіліссіз оператор. Енді A - үзіліссіз деп ұйғарайық. Сонда $|x| < \delta \Rightarrow \|Ax\| < \varepsilon$.
Егер $\varepsilon = M \|x\|$ десек, онда $\|Ax\| \leq M \|x\|$, яғни A - шенелген оператор.

$$M_0 = \sup_{\|x\| \leq 1} \|Ax\|$$

өрнегімен анықталған M_0 саны A операторының нормасы деп аталады да $\|A\|$ символымен белгіленеді.

Сызықтық операторларға амалдар қолдану. Сызықтық нормаланған

X -ті Y -ке бейнелейтін $A, B, C, \dots$ сызықтық операторларын қарастырайық.

Егер $\forall x \in X$ элементі үшін A мен B сызықтық операторлары $Ax = Bx$ теңдігін қанағаттандырса, онда A мен B операторлары бір-біріне тең деп атайды да $A = B$ деп белгілейді. $(A+B)x = Ax + Bx, \forall x \in X$ теңдігін қанағаттандыратын $A+B$ операторын A мен B операторларының қосындысы деп атайды. Сызықтық A операторының скаляр λ санына көбейтіндісі деп $(\lambda A)x = \lambda(Ax), \forall x \in X$ өрнекті қанағаттандыратын λA сызықтық операторын айтады.

X кеңістігінің барлық нүктелері үшін $Ox = \theta$ өрнегін қанағаттандыратын сызықтық операторды нөлдік оператор деп атап, оны O символымен белгілейді. Әрбір сызықтық A операторы үшін әрқашан оған теріс оператор деп аталатын $-A$ операторы бар болады, ол $-A = (-1)A$ өрнегімен анықталады.

Мына тұжырымның дұрыстығына оңай көз жеткізуге болады. X -ті Y -ке бейнелейтін операторлар жиыны $L(X, Y)$ жоғарыдағы операторларды қосу, скаляр санға көбейту, нөлдік оператор және теріс оператор ұғымдарымен сызықтық кеңістік түзеді. Оның үстіне бұл жиын сызықтық нормаланған кеңістік және ол толық болады.

$L(X, Y)$ жиындағы сызықтық A мен B операторларының көбейтіндісі деп $ABx = A(Bx), \forall x \in X$ өрнегін қанағаттандыратын AB операторын айтады. Жалпы жағдайда $AB \neq BA$.

1-лемма. Сызықтық A мен B операторларының AB көбейтіндісі сызықтық оператор болады.

Расында, $\forall x, x_1, x_2 \in X$ үшін

$$\begin{aligned} AB(x_1 + x_2) &= A(B(x_1 + x_2)) = A(Bx_1 + Bx_2) = ABx_1 + ABx_2; \\ AB(\lambda x) &= A(B(\lambda x)) = A(\lambda(Bx)) = \lambda(ABx) \quad (\lambda - \text{скаляр}). \end{aligned}$$

Демек, 1-лемма дәлелденді.

Салдар ретінде сызықтық операторлар A, B, C мен скаляр сан λ үшін:

$$1) (AB)C = A(BC);$$

$$2) (A+B)C = AC + BC;$$

$$3) C(A+B) = CA + CB; \quad 4) \lambda(AB) = (\lambda A)B.$$

Өрнектердің дұрыстығын тексеру қиын емес:

2-лемма. $\|AB\| \leq \|A\| \cdot \|B\|$ теңсіздігі орындалады.

Шынында да, $\forall x \in X$ үшін $\|ABx\| \leq \|A\| \cdot \|Bx\| \leq \|A\| \cdot \|B\| \cdot \|x\|$.

Демек,

$$\|AB\| = \sup_{\|x\| \leq 1} \|ABx\| \leq \|A\| \cdot \|B\|.$$

Егер $A = B$ десек, A операторының екінші дәрежесін анықтаймыз, яғни $A(Ax) = A^2x$, ал жалпы түрде $A^n = A(A^{n-1})$ екені анықталды. Әрине, $A^{n+m} = A^n \cdot A^m A$.

$L(X, X)$ -тегі B операторы сол $L(X, X)$ -тегі A операторымен $AB = BA = I$ өрнегін қанағаттандырса, онда B операторын A операторына кері оператор деп атайды да, A^{-1} символымен белгілейді, мұндағы, I – бірлік оператор.

§2.4. Гильберттік кеңістік

Комплекс элементті сызықты H кеңістігінде $\forall x, y \in H$ элементтері жұбына (x, y) саны сәйкес қойылып, мына аксиомалар:

$$1^0. (x_1 + x_2, y) = (x_1, y) + (x_2, y);$$

$$2^0. (\lambda x, y) = \lambda(x, y);$$

$$3^0. (x, y) = \overline{(y, x)} \text{ (эрмиттік);}$$

$4^0. (x, x) \geq 0, (x, x) = 0 \Leftrightarrow x = \theta$ (θ -нөлдік элемент) орындалса, онда (x, y) саны x пен y -тің скалярлық көбейтіндісі деп аталады.

$1^0 - 3^0$ - аксиомалардың логикалық салдары мына екі өрнек болады: $(x, \lambda y) = \bar{\lambda}(x, y)$ ($\bar{\lambda}$ – λ -ға түйіндес сан); $(x, y_1 + y_2) = (x, y_1) + (x, y_2)$.

Мысалдар.

1. n өлшемді C^n – комплекс сандар кеңістігінде скалярлық көбейтінді

$$(x, y) = \sum_{k=1}^n x_k \overline{y_k}$$

теңдігі мен анықталады, мұнда, $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, $y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$.

2. Элементтері нақты сандар болатын R^n кеңістігінде скалярлық көбейтінді

$$(x, y) = \sum_{k=1}^n x_k y_k$$

өрнегімен, ал R^n -дегі жалпы скалярлық көбейту амалы

$$(x, y) = \sum_{k,i=1}^n a_{ki} x_k y_i$$

өрнегімен анықталады, мұндағы, $\|a_{ki}\|$ оң анықталған матрица.

3. $L_2[a, b]$ кеңістігінде скаляр көбейту

$$(x, y) = \int_a^b x(t) \overline{y(t)} dt \quad (12)$$

өрнегімен анықталады.

Бұл көрсетілген скаляр көбейтулер үшін $1^0 - 4^0$ -аксиомалар оңай тексеріледі.

Ескерту. Скалярлық көбейту амалы орындалатындай элементтері нақты сандар болатын ақырлы өлшемді кеңістік **евклидтік кеңістік** деп аталады. Ал элементтері комплекс сандар болатын ақырлы өлшемді кеңістікте скаляр көбейту амалы орынды болса, оны **унитар кеңістік** деп атайды.

Скалярлық көбейту амалы орынды болатын сызықтық кеңістік **гильберттік кеңістік** деп аталады. Гильберттік кеңістік H -тың x элементінің нормасы $\|x\| = (x, x)^{\frac{1}{2}}$ саны болады.

Лемма. Кез келген гильберттік кеңістікте Коши-Буняковский теңсіздігі

$$|(x, y)| \leq \|x\| \cdot \|y\| \quad (13)$$

орынды.

Дәлелдеуі. Егер $x = \theta$ немесе $y = \theta$ болса, онда теңсіздіктің орынды екені айқын. $y = \theta$ деп $z \in H$ элементін $z = \lambda y$ және $(x - z, y) = 0$,

яғни

$$(x - \lambda y, y) = 0 \Rightarrow \lambda = \frac{\overline{(x, y)}}{(y, y)}$$

болатындай етіп түзейік. Сонда

$$0 \leq (x - \lambda y, x - \lambda y) = (x - \lambda y, x) - \lambda(x - \lambda y, y) = \|x\|^2 - \frac{|(x, y)|^2}{\|y\|^2}$$

болғандықтан, бұл соңғы өрнектен (13) теңсіздігі шығады.

$\|x\| = (x, x)^{1/2}$ нормасы бойынша толық, скалярлық көбейту анықталған сызықтық кеңістік **гильберттік кеңістік** деп аталады. Мысалы, $C^n, R^n, L_2[a, b]$ кеңістіктері гильберттік кеңістіктер. Ал $C[a, b]$ кеңістігі

$$(x, y) = \int_a^b x(t)y(t)dt$$

скалярлық көбейту амалымен $\|x\| = \left(\int_a^b |x(t)|^2 dt \right)^{1/2}$ нормасы бойынша толық емес, ол гильберттік кеңістік болмайды. Әрбір гильберттік кеңістікті толықтырса гильберттік кеңістік алынады.

Егер $\forall x, y \in H$ үшін $(x, y) = 0$ теңдігі орынды болса, онда x, y элементтерін ортогональды деп атайды. Егер $e_1, e_2, \dots, e_n$ элементтерінің жүйесі үшін

$$(e_i, e_j) = \begin{cases} 0, & i \neq j, \\ 1, & i = j \end{cases}$$

шарты орындалса, онда $e_1, e_2, \dots, e_n$ элементтерінің жүйесі ортонормаланған жүйе деп аталады. Егер ортонормаланған $e_1, e_2, \dots, e_n$ элементтерінің жүйесі үшін оның әрбір элементіне ортогональ болатын нөлден басқа ешқандай элемент жоқ болса, онда берілген жүйені **толық ортонормаланған жүйе** деп атайды.

Біз алдағы уақытта $L_2[a, b]$ гильберттік кеңістігін (12) скалярлық көбейту амалымен қарастырамыз. $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots, \varphi_n(x) \in L_2[a, b]$ кеңістігінде ортонормаланған жүйе және $f(x) \in L_2[a, b]$ болсын. Формалді түрде жазылған

$$\sum_{k=1}^n C_k \varphi_k(x)$$

өрнегі Фурье қатары, ал $C_k = (f, \varphi_k(x))$ сандары Фурье коэффициенттері деп аталады.

$$\left\| f - \sum_{k=1}^N C_k \varphi_k \right\|^2 = (f - \sum_{k=1}^N C_k \varphi_k, f - \sum_{k=1}^N C_k \varphi_k) \geq 0$$

болғандықтан, бұл өрнекті ықшамдап,

$$(f, f) - \sum_{k=1}^N C_k (f, \varphi_k) - \sum_{k=1}^N C_k (\varphi_k, f) + \sum_{k=1}^N C_k^2 \geq 0$$

екенін көреміз (мұнда біз $\{\varphi_k\}$ ортонормаланған жүйе екенін ескердік). Егер $(f, \varphi_k) = (\varphi_k, f) = C_k$ екенін ескерсек, соңғы теңсіздіктен

$$\sum_{k=1}^N C_k^2 \leq \|f\|^2$$

екенін көреміз. Бұл өрнек кез келген N үшін орынды болғандықтан,

$$\sum_{k=1}^{\infty} C_k^2 \leq \|f\|^2$$

теңсіздігін аламыз, ол **Бессель теңсіздігі** деп аталады.

Егер осы соңғы өрнек теңдік мағынасында орындалса, онда біз $\{\varphi_k(x)\}$ жүйенің тұйықтық шарты деп аталатын Парсевал-Стеклов тепе-теңдігін аламыз.

Рисс-Фишер теоремасы. Егер $\{\varphi_k(x)\}$ ортонормаланған жүйе болып, ал сандық қатар

$$\sum_{k=1}^{\infty} C_k^2$$

жинақты болса, онда

$$\sum_{k=1}^{\infty} C_k \varphi_k(x) \tag{14}$$

қатары орташа жинақты болады бұл жағдайда (14) қатары тұйықтық шарты орындалған Фурье қатары болады.

Дәлелдеуі. (14) қатарының бөлігін қарастырайық:

$$S_n = \sum_{k=1}^n C_k \varphi_k(x).$$

Бұдан:

$$\|S_{n+\rho} - S_n\|^2 = \left\| \sum_{k=n+1}^{n+\rho} C_k \varphi_k \right\|^2 = \sum_{k=n+1}^{n+\rho} C_k^2,$$

бұл жинақты (14) қатарының қалдық мүшесі, әрине, ол $n \rightarrow \infty$ жағдайда нөлге ұмтылады, олай болса, (14) қатары орташа мағынада жинақты. (14) қатарының қосындысы $f(x)$, яғни

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} C_k \varphi_k(x) \tag{15}$$

деп белгілейік. (15) өрнегінің екі жағында $\varphi_n(x)$ -ке көбейтіп, $\{\varphi_n(x)\}$ жүйенің ортонормаланған екенін еске алып, $C_k = (f, \varphi_k)$ екенін анықтаймыз. Сонымен (14) қатарын $f(x)$ -ке $L_2[a, b]$ -де скалярлық көбейтіп,

$$\|f\|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} C_k (\varphi_k, f) = \sum_{k=2}^{\infty} C_k^2$$

тұйықтық шартын аламыз.

Кез келген гильберттік кеңістік H -та мына тұжырым орынды.

Теорема. H -гильберттік кеңістік, ал $\{e_k\}$ сондағы ортонормаланған жүйе болсын. Сонда мына қасиеттер эквивалентті: 1) Әрбір $x \in H$ элементі өзінің Фурье қатарының қосындысы болады; 2) $\{e_k\}$ жүйесі толық; 3) $\forall x \in H$ үшін Парсевал-Стеклов теңдігі

$$\|x\|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} C_k^2$$

орынды.

Шмидт әдісі бойынша ортогональдау. Егер ақырлы немесе ақырсыз санды сызықты тәуелсіз функциялар жүйесі $\psi_1(x), \psi_2(x), \dots, \psi_n(x), \dots$ берілсе, онда бұл жүйеден $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots, \varphi_n(x), \dots$ түріндегі ортонормаланған жүйе құруға болады. Соңғы жүйедегі әрбір $\varphi_n(x)$ функциясы $\psi_1(x), \psi_2(x), \dots, \psi_n(x), \dots$ арқылы сызықты өрнектеледі, әрине бұл жағдай керісінше де болады, яғни әрбір $\psi_n(x)$ функциясы $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots, \varphi_n(x), \dots$ арқылы сызықты өрнектеледі.

Бұл ортогональдау үдерісі мына Шмидт алгоритмі бойынша іске асады:

$$\varphi_1(x) = \frac{\psi_1(x)}{\|\psi_1(x)\|}, \quad \varphi_2(x) = \frac{g_2(x)}{\|g_2(x)\|}, \quad g_2(x) = \psi_2(x) - (\psi_1, \varphi_1)\varphi_1, \dots, \varphi_n(x) = \frac{g_n(x)}{\|g_n(x)\|},$$

$$g_n(x) = \psi_n(x) - \sum_{k=1}^{n-1} (\psi_n, \varphi_k)\varphi_k, \dots$$

міне, бұл алгоритмнен біз $\{\varphi_k(x)\}$ жүйесі ортонормаланған және әрбір $\varphi_n(x)$ $(\psi_1(x), \psi_2(x), \dots, \psi_n(x), \dots)$ арқылы сызықты өрнектелгенін көреміз.

Өзара түйіндес сызықтық операторлар. H -гильберттік кеңістік, ал $A^* \in L(H, H)$ шенелген сызықтық оператор болсын. $A^* \in L(H, H)$ операторы және $\forall x, y \in H$ үшін

$$(Ax, y) = (x, A^*y) \quad (16)$$

теңдігі орындалса, онда A^* операторы A -ның түйіндес операторы деп аталады. Егер A -сызықтық оператор болса, онда A^* операторы да сызықтық оператор болады. Бұл мына

$$\begin{aligned}(Ax, \alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2) &= \overline{\alpha_1} (Ax, y_1) + \overline{\alpha_2} (Ax, y_2) = \\ &= \alpha_1 (x, A^* y_1) + \alpha_2 (x, A^* y_2) = (x, A^* (\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2))\end{aligned}$$

қатынастан шығады. A операторы үшін жалғыз ғана түйіндес A^* операторы бар болады, оның үстіне:

$$\begin{aligned}(A^*)^* &= A, (A_1 + A_2)^* = A_1^* + A_2^*, \\ (A_1 A_2)^* &= A_1^* A_2^*, (\lambda A)^* = \overline{\lambda} A^*.\end{aligned}$$

Егер A шенелген оператор болса, онда A^* шенелген оператор және олардың нормалары бірдей болатынын көрсету қиын емес.

Расында (16) теңдігінде $x = A^* y$ деп алмастырсақ, $(A^* y, A^* y) = \|A^* y\|^2 = (AA^* y, y)$. Міне, бұдан Коши-Буняковский теңсіздігі бойынша $\|A^* y\|^2 \leq \|AA^* y\| \cdot \|y\| = \|A\| \cdot \|A^* y\| \cdot \|y\|$ немесе $\|A^* y\| \leq \|A\| \cdot \|y\|$. Бұл теңсіздік A^* операторының шенелгенін, яғни $\|A^*\| \leq \|A\|$ екенін көрсетеді. Егер де (16) теңдігіне $y = Ax$ деп ауыстырсақ, онда $\|A\| \leq \|A^*\|$ екенін көреміз. Демек, $\|A\| = \|A^*\|$.

Егер $A \in L(H, H)$ операторы үшін $A = A^*$ шарты орындалса, онда A операторын өзіне-өзі түйіндес оператор деп атайды. Мысалы, $L_2(a, b)$ кеңістігінде Фредгольм операторы $A\varphi = \int_a^b K(x, s)\varphi(s)ds$, ал түйіндес оператор $A^*\varphi = \int_a^b \overline{K}(x, s)\varphi(s)ds$ болады.

3. ҚЫСЫП БЕЙНЕЛЕУ ӘДІСІ ЖӘНЕ ОНЫ ҚОЛДАНУ

§3.1. Қысып бейнелеу әдісі

Алгебралық, дифференциалдық, интегралдық және функционалдық теңдеулердің шешімдері бар және олар жалғыз болуын дәлелдеуге біртіндеп жуықтау әдісі, яғни қысып бейнелеу әдісі қолданылады. Қысып бейнелеу әдісінің мазмұнын төмендегі тұжырымнан білуге болады.

1 теорема (Банахтікі). Толық метрикалық X кеңістігінің кез келген элементін сол кеңістіктің өзіне бейнелейтін A операторы берілсін: яғни $X \xrightarrow{A} X$. Оның үстіне $\forall x, y \in X$ элементтері

$$\rho(Ax, Ay) \leq \alpha \rho(x, y) \quad (17)$$

теңсіздігін қанағаттандыратын (мұндағы, α саны x пен y элементтерінен тәуелсіз және $0 < \alpha < 1$). Сонда X кеңістігінде жалғыз ғана элементі табылып, ол

$$Ax_0 = x_0 \quad (18)$$

теңдеуін қанағаттандырады.

(17) теңсіздігін қанағаттандыратын A операторын қысу операторы деп, ал (18) теңдеуін қанағаттандыратын $x_0 \in X$ нүктесін A операторының қозғалмайтын жалғыз нүктесі деп атайды.

Дәлелдеуі. $\forall \bar{x} \in X$ элемент алып, мынадай тізбек құрайық: $x_1 = A\bar{x}$, $x_2 = Ax_1, \dots, x_n = Ax_{n-1}, \dots$. Осы $\{x_n\}$ тізбегінің іргелі өзіне жинақты екенін көрсетейік. Алдымен

$$\rho(x_1, x_2) = \rho(A\bar{x}, Ax_1) \leq \alpha \rho(\bar{x}, x_1) = \alpha \rho(\bar{x}, A\bar{x}),$$

$$\rho(x_2, x_3) = \rho(Ax_1, Ax_2) \leq \alpha^2 \rho(\bar{x}, A\bar{x}), \dots, \rho(x_n, x_{n+1}) \leq \alpha^n \rho(\bar{x}, A\bar{x})$$

екенін байқаймыз. Егер үшбұрыш теңсіздігін пайдалансақ,

$$\begin{aligned} \rho(x_n, x_{n+p}) &\leq \rho(x_n, x_{n+1}) + \rho(x_{n+1}, x_{n+2}) + \dots + \rho(x_{n+p-1}, x_{n+p}) \leq \\ &\leq \alpha^n (1 + \alpha + \dots + \alpha^{p-1}) \rho(\bar{x}, A\bar{x}) = \frac{\alpha^n - \alpha^{n+p}}{1 - \alpha} \rho(\bar{x}, A\bar{x}). \end{aligned}$$

Осыдан $0 < \alpha < 1$ болғандықтан

$$\rho(x_n, x_{n+p}) \leq \frac{\alpha^n}{1 - \alpha} \rho(\bar{x}, A\bar{x}). \quad (19)$$

Соңғы теңсіздіктен $\forall p$ үшін $n \rightarrow \infty$, $\rho(x_n, x_{n+p}) \rightarrow 0$. Демек, $\{x_n\}$ тізбегі іргелі тізбек. X кеңістігінің толықтығынан $\{x_n\}$ тізбегінің шегі $x_0 \in X$ болады:

$$x_0 = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n.$$

Енді $Ax_0 = x_0$ екенін көрсетейік. Расында

$$\rho(x_0, Ax_0) \leq \rho(x_0, x_n) + \rho(x_n, Ax_0) = \rho(x_0, x_n) + \rho(Ax_{n-1}, Ax_0) \leq \rho(x_0, x_n) + \alpha \rho(x_{n-1}, x_0),$$

элементі $x_0 = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ болғандықтан, $\forall \varepsilon > 0$ санына сәйкес $N(\varepsilon)$ нөмірі табылып, $\rho(x_0, x_n) < \frac{\varepsilon}{2}$, $\rho(x_0, x_{n-1}) < \frac{\varepsilon}{2}$, $\forall n > N(\varepsilon)$ болады. Демек, $\rho(x_0, Ax_0) < \varepsilon$. Мұндағы, ε кез келген сан болғандықтан $\rho(x_0, Ax_0) = 0$ яғни $x_0 = Ax_0$ теңдігі орынды.

Қысу операторының қозғалмайтын нүктесінің жалғыз екенін дәлелдейік. Ондай нүктелер екеу (x_0 және y_0), яғни $Ax_0 = x_0$, $Ay_0 = y_0$ теңдігі орындалады деп ұйғарайық. Ол жағдайда $\rho(x_0, y_0) = \rho(Ax_0, Ay_0) \leq \alpha \rho(x_0, y_0)$. Егер $\rho(x_0, y_0) > 0$ болса, онда $\alpha \geq 1$ болады. Бұл теорема шартына қайшы, демек, $\rho(x_0, y_0) = 0$, яғни $x_0 \equiv y_0$.

Ескерту. (19) теңсіздіктен $\rho \rightarrow \infty$ жағдайда n – жуық шешімдегі қателік

$$\rho(x_n, x_0) \leq \frac{\alpha^n}{1 - \alpha} \rho(\bar{x}, A\bar{x})$$

шартымен анықталады. Бұл теңсіздік екінші жағынан тізбектің жинақтылық жылдамдығын көрсетеді.

§3.2. Қысып бейнелеу әдісін Фредгольмнің интегралдық

теңдеуіне қолдану

1. Интегралдық теңдеудің ядросы $K(x, s)$ үзіліссіз функция болсын. Фредгольмнің біртекті емес

$$\varphi(x) = \lambda \int_a^b K(x, s) \varphi(s) ds + f(x) \quad (20)$$

теңдеуінің шешімі бар және шешімнің жалғыз екенін дәлелдеуге қысып бейнелеу әдісін қолданайық. $K(x, s)$ ядросы $D = \{a \leq x, s \leq b\}$ облысында үзіліссіз болғандықтан шенелген, яғни $|K(x, s)| \leq M$. Ал бос мүше $f(x) \in C[a, b]$ (20) интегралдық теңдеу шешімін $C[a, b]$ класынан іздейміз. Операторды

$$K\varphi \equiv \lambda \int_a^b K(x,s)\varphi(s)ds$$

деп белгілейік.

1 лемма. $K\varphi$ интегралдық операторы толық және $C[a,b]$ кеңістігін сол кеңістіктің өзіне бейнелейді.

Дәлелдеуі. $\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_a^b K(x,s)\varphi(s)ds$ және $N = \max |\varphi(x)|$ деп белгілейік, $x, x + \Delta x \in [a,b]$ болсын. Ол кезде

$$\begin{aligned} |\varphi(x + \Delta x) - \varphi(x)| &= \left| \lambda \int_a^b K(x + \Delta x, s)\varphi(s)ds + f(x + \Delta x) - \lambda \int_a^b K(x, s)\varphi(s)ds - f(x) \right| \leq \\ &\leq |\lambda| N \int_a^b |K(x + \Delta x, s) - K(x, s)|ds + |f(x + \Delta x) - f(x)|. \end{aligned}$$

$f(x) \in C[a,b]$ және $K(x,s) \in C(Q)$ болғандықтан $\forall \varepsilon > 0$ үшін $\delta > 0$ саны табылып, $|\Delta x| < \delta$ болғанда

$$|f(x + \Delta x) - f(x)| < \varepsilon, \quad |K(x + \Delta x, s) - K(x, s)| < \frac{\varepsilon}{2N(b-a)}$$

теңсіздіктері орындалады. Егер осы теңсіздіктерді алдыңғы өрнектің оң жағына пайдалансақ, $|\varphi(x + \Delta x) - \varphi(x)| < \varepsilon$, $\forall \Delta x: |\Delta x| < \delta$ екенін көреміз, яғни $\varphi(x)$ функциясы $[a,b]$ кесіндісінің кез келген нүктесінде үзіліссіз. Демек, K операторы кез келген $\varphi(x) \in C[a,b]$ функциясын сол кеңістіктегі үзіліссіз функцияға бейнелейді екен.

Енді K қысу операторы болатын шартты анықтайық.

$$\begin{aligned} \rho(K\varphi_1, K\varphi_2) &= \max_{a \leq x \leq b} |K\varphi_1 - K\varphi_2| = \max_{a \leq x \leq b} \left| \lambda \int_a^b K(x,s)[\varphi_1 - \varphi_2]ds \right| \leq \\ &\leq |\lambda| M(b-a) \max_{a \leq x \leq b} |\varphi_1 - \varphi_2| = |\lambda| M(b-a) \rho(\varphi_1, \varphi_2). \end{aligned}$$

Міне, бұдан

$$|\lambda| < \frac{1}{M(b-a)}$$

шарты орындалғанда K қысу операторы болатынын көреміз. Жоғарыда дәлелденген қысып бейнелеу әдісінен, егер λ саны осы теңсіздікті қанағаттандырса, онда (20) теңдеуінің бір ғана үзіліссіз шешімі болады. Ол шешімге жуықтайтын функциялар тізбегі $\varphi_0(x), \varphi_1(x), \dots, \varphi_n(x), \dots$

$$\varphi_{n+1}(x) = \lambda \int_a^b K(x,s) \varphi_n(s) ds + f(x), \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

рекурентті теңдіктермен анықталады, мұндағы, $\varphi_0(x)$ функциясы $[a, b]$ кесіндіде анықталған кез келген үзіліссіз функция.

Мысал. Біртіндеп жуықтау әдісімен

$$\varphi(x) = \lambda \int_0^1 x \varphi(s) ds + x$$

интегралдық теңдеуін шешу керек.

Шешуі. Нөлдік жуықтау ретінде бос мүшені, яғни $\varphi_0(x) = x$ деп алсақ, онда

$$\varphi_1(x) = x \left(1 + \frac{\lambda}{2} \right), \quad \varphi_2(x) = x \left[1 + \frac{\lambda}{2} + \left(\frac{\lambda}{2} \right)^2 \right], \dots, \varphi_n(x) = x \left[1 + \frac{\lambda}{2} + \left(\frac{\lambda}{2} \right)^2 + \dots + \left(\frac{\lambda}{2} \right)^n \right], \dots$$

Бұл табылған жуық шешімдер тізбегі λ параметрі $\left| \frac{\lambda}{2} \right| < 1$ шартын қанағаттандырса, ақырлы шегі болады. Ол шек

$$\varphi(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_n(x) = \frac{2x}{2 - \lambda}$$

берілген интегралдық теңдеудің шешімі болады.