

Дәріс 10
Интегралдаудың жуық әдістері.
Меншіксіз интегралдар. Жазық
фигуралардың ауданын есептеу

Тлеулесова А.М.

Анықталған интегралдың қолданылуы

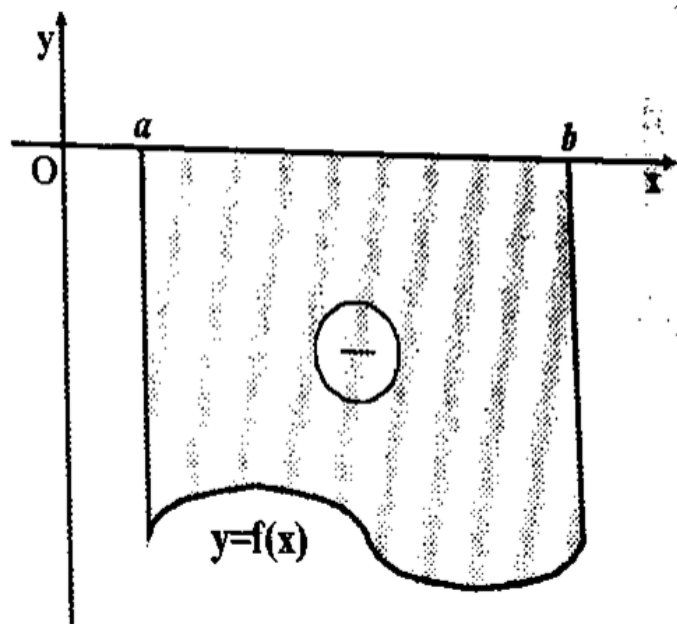
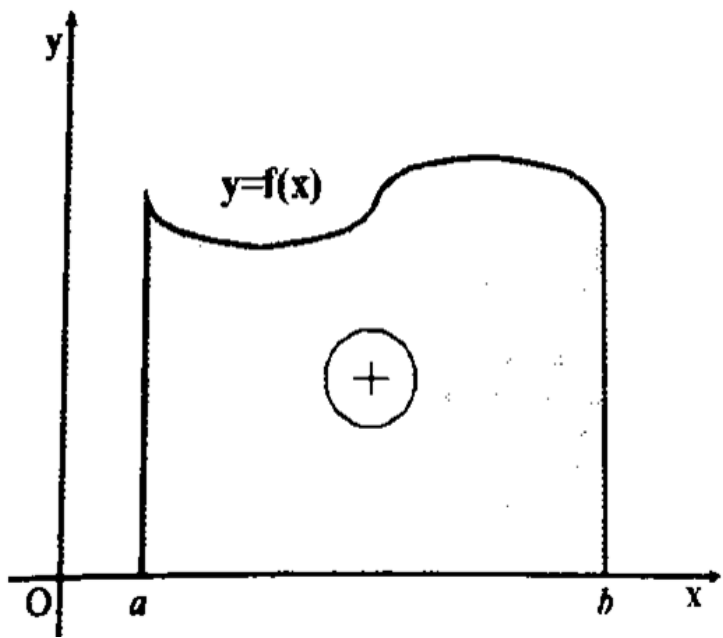
Жазық фигура ауданы

1) Егер $f(x) \geq 0, \forall x \in [a, b]$ болса, онда $x = a, x = b$ түзулермен және Ox осімен, $y = f(x)$ қисығымен шенелген қисықсызқты трапецияның ауданы (1-сурет) мына анықталған интеграл арқылы есептеленеді:

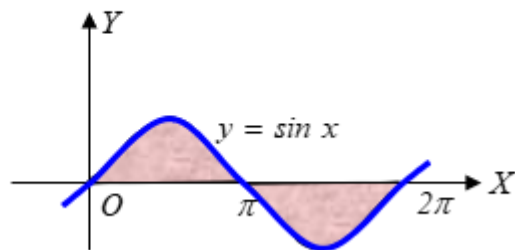
$$S = \int_a^b f(x) dx = \int_a^b y dx, \quad S \geq 0 \quad (1)$$

2) Егер $f(x) \leq 0, \forall x \in [a, b]$ болса, $\left(\int_a^b f(x) dx \leq 0\right)$, онда 78-суреттегі қисықсызқты трапецияның ауданы

$$S = \left| \int_a^b f(x) dx \right| = - \int_a^b f(x) dx \quad (2)$$



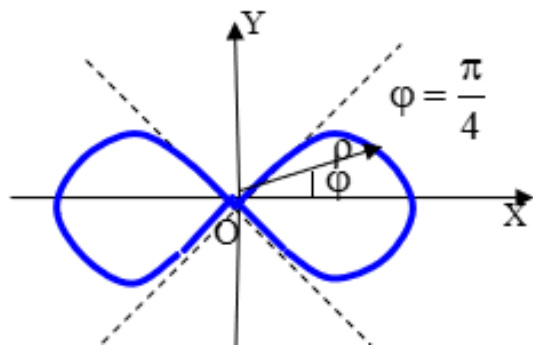
1-мысал. $y = \sin x$ синусоидасымен және Ox осімен шектелген фигураның ауданын табу керек ($0 \leq x \leq 2\pi$).



$$S = \int_0^{\pi} \sin x dx - \int_{\pi}^{2\pi} \sin x dx = -\cos x \Big|_0^{\pi} + \cos x \Big|_{\pi}^{2\pi} =$$
$$-\cos \pi + \cos 0 + \cos 2\pi - \cos \pi = 4.$$

Поляр координаттарындағы аудан

$$S = \frac{1}{2} \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} f^2(\varphi) d\varphi$$



$$\rho = a\sqrt{\cos 2\varphi}$$

$$S = 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot \int_0^{\pi/4} (a\sqrt{\cos 2\varphi})^2 d\varphi = 2a^2 \int_0^{\pi/4} \cos 2\varphi d\varphi = a^2 \sin 2\varphi \Big|_0^{\pi/4} = a^2 \sin \frac{\pi}{2} - a^2 \sin 0 = a^2$$

Параметрлік функция

$$x = a \cos t, \quad y = b \sin t, \quad 0 \leq t \leq \pi$$

$$S = 2 \int_{\pi}^0 b \sin t (a \cos t)' dt = 2ab \int_0^{\pi} \sin^2 t dt = 2ab \int_0^{\pi} \frac{1 - \cos 2t}{2} dt = ab \left(t - \frac{\sin 2t}{2} \right) \Big|_0^{\pi} = ab \left(\pi - \frac{\sin 2\pi}{2} \right) - ab \cdot 0 = \pi ab$$

Жазықтықтағы доғаның ұзындығы

1) Жазықтықтағы декарт координат жүйесінде $y = f(x)$ қисығы берілсін

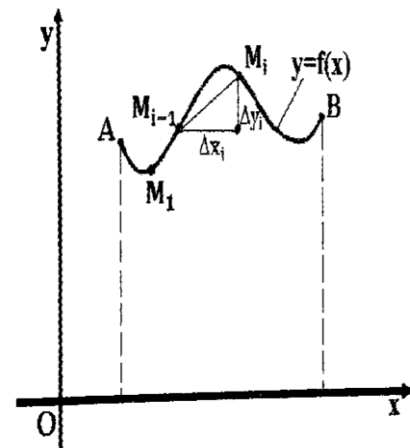
$x = a$, $x = b$ түзулермен шектелген AB доғаның ұзындығын табу керек. Абсциссалары $a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b$ болатын AB доғаның нүктелерінен $AM_1, M_1M_2, \dots, M_{n-1}B$ хордаларын жүргіземіз, олардың ұзындығын $\Delta l_1, \Delta l_2, \dots, \Delta l_n$ деп белгілейміз. Онда AB доғаның ұзындығын $\Delta l_1, \Delta l_2, \dots, \Delta l_n$ сынығын аламыз. Бұл сынықтың ұзындығы

$$L_n = \sum_{i=1}^n \Delta l_i$$

тең. Онда AB доғаның ұзындығы

$$L = \lim_{\max(\Delta l_i) \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \Delta l_i \quad (8)$$

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(\xi_i))^2} dx = \int_a^b \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx.$$



2) Егер қисықтың теңдеуі параметрлі түрде берілсе $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$, $t \in [\alpha, \beta]$, мұндағы $\varphi(t)$ және $\psi(t)$ функциялары және олардың туындылары $[\alpha, \beta]$ кесінді де үзіліссіз болса, онда қисықтың ұзындығын мына формуламен табамыз

$$L = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{1 + \left(\frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}\right)^2} \varphi'(t) dt = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{(\varphi'(t))^2 + (\psi'(t))^2} dt \quad (14)$$

Бұл формула (13) теңдеуге $\frac{dy}{dx} = \frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}$ және $x = \varphi(t)$, $dx = \varphi'(t)dt$ қойғаннан шығады.

Мысал 1: $x^2 + y^2 = R^2$ шеңбердің ұзындығын табындар.

Шешімі: АВ доғаның теңдеуі $y = \sqrt{R^2 - x^2}$. Осыдан $y' = \frac{-x}{\sqrt{R^2 - x^2}}$.

$$\begin{aligned} L &= 4 \int_0^R \sqrt{1 + \frac{x^2}{R^2 - x^2}} dx = 4 \int_0^R \frac{R dx}{\sqrt{R^2 - x^2}} = 4R \arcsin \frac{x}{R} \Big|_0^R = 4R \cdot \arcsin 1 = \\ &= 4R \cdot \frac{\pi}{2} = 2\pi R. \end{aligned}$$

3) Полярлық координат жүйесінде берілген доғаның ұзындығы. Полярлық координаттағы AB қисықтың тендеуі

$$r = f(\varphi), \quad t \in [\alpha, \beta] \quad (15)$$

болсын. Полярлық координаттар мен декарт координаттар арасындағы байланыс мынаған тең

$$x = r \cos \varphi, \quad y = r \sin \varphi \quad (16)$$

(15) тендеуді (16)-ға қойып.

$$x = f(\varphi) \cos \varphi, \quad y = f(\varphi) \sin \varphi \quad (17)$$

тендіктерін аламыз. Бұл тендеулерді қисық доғаның параметрлі түрдегі тендеулері деп қарастырып (14) формуланы қолдануға болады.

$$\frac{dx}{d\varphi} = f'(\varphi) \cos \varphi - f(\varphi) \sin \varphi, \quad \frac{dy}{d\varphi} = f'(\varphi) \sin \varphi + f(\varphi) \cos \varphi.$$

Онда

$$\begin{aligned}\left(\frac{dx}{d\varphi}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\varphi}\right)^2 &= [f'(\varphi)\cos\varphi - f(\varphi)\sin\varphi]^2 + [f'(\varphi)\cos\varphi + f(\varphi)\sin\varphi]^2 = \\ &= [f'(\varphi)]^2 + [f(\varphi)]^2.\end{aligned}$$

Сондықтан

$$L = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{(r')^2 + r^2} d\varphi = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{[f'(\varphi)]^2 + [f(\varphi)]^2} d\varphi. \quad (18)$$

Мысал 1: $r = a(1 + \cos\varphi)$ кардиондтың ұзындығын табу керек.

Шешімі: кардиондтың ұзындығын табу үшін (18) формуланы пайдаланымыз

$$L = 2 \cdot \int_0^{\pi} \sqrt{a^2 \sin^2 t + a^2 (1 + \cos\varphi)^2} d\varphi = 8a.$$

Параллель қималардың ауданы арқылы көлемді есептеу

Бізге дене Ох осыне перпендикуляр әрбір қимасының ауданы $S = S(x)$ белгілі болсын. Осы дененің табу керек. Денені $x = x_0 = a, x = x_1, \dots, x = x_n = b$ жазықтармен бірнеше бөліктерге бөлейік. Әрбір $[x_{i-1}, x_i]$ бөліктен ξ_i нүктені тандап алайық та, әрбір ξ_i -дің мәніне цилиндр тұрғызайық. Бұл цилиндрдің жасаушысы Ох осыне параллель, ал оның бағыттаушысы $x = \xi_i$ жазықтықтың денедегі қимасы. Табанының ауданы $S(\xi_i)$ -ге тең элементарлы цилиндрдің көлемі $S(\xi_i)\Delta x_i$ -ге тең. Ал барлық цилиндрдің көлемі

$$V_n = \sum_{i=1}^n S(\xi_i)\Delta x_i \quad (19)$$

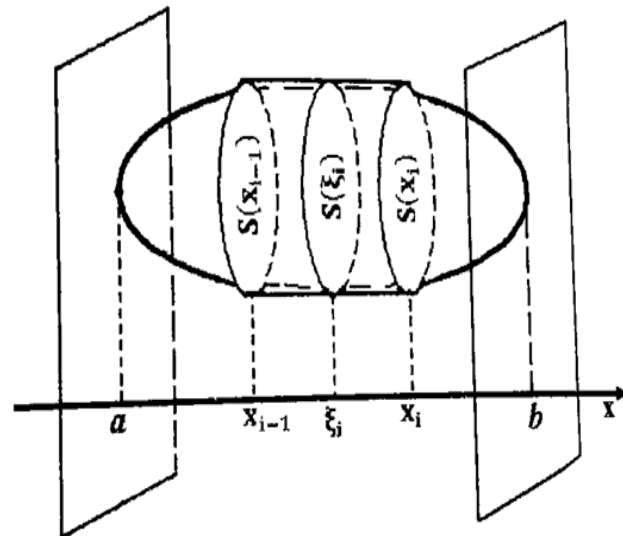
$\max\{\Delta x_i\} \rightarrow 0$ ұмтылдырып, дененің көлемінн табамыз.

$$V = \lim_{\max\{\Delta x_i\} \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n S(\xi_i)\Delta x_i = \int_a^b S(x)dx$$

Сонымен дененің көлемі

$$V = \int_a^b S(x)dx \quad (20)$$

формуламен табылады.



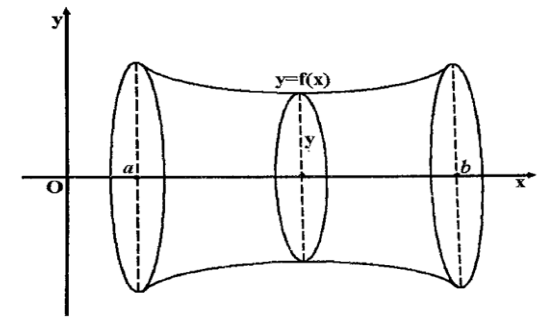
Айналу дененің көлемі

$y = f(x)$ қисықпен Ox осьмен, $x = a$ және $x = b$ түзулермен шенелген қисықсызықты трапеция Ox осьмен айналғанда шыққан денені қарастырайық. Бұл дененің Ox осьне перпендикуляр жазықтықпен қиғандағы қимасы дөңгелек болады. Ол қиманың ауданы

$$S(x) = \pi y^2 = \pi [f(x)]^2.$$

(20) формуланы қолданып

$$V = \pi \int_a^b y^2 dx = \pi \int_a^b [f(x)]^2 dx.$$



Егер қисықсызықты трапеция $x = \varphi(y)$ функциямен және $y = c$, $y = d$ түзулермен, Oy осьмен шенелсе, онда бұл трапецияның Oy осьмен айналғанда шыққан дененің көлемі мына формуламен есептелінеді:

$$V = \pi \int_c^d x^2 dy = \pi \int_c^d [\varphi(y)]^2 dy.$$

Мысал 1: $y = \frac{a}{2} \left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}} \right) = a \operatorname{ch} \frac{x}{a}, \quad x = a, \quad x = b, \quad y = 0$

сызықтармен шенелген қисықсызықты трапеция Ox осьмен айналғанда шыққан дененің көлемін табу керек.

Шешімі:

$$\begin{aligned}
 V &= \pi \int_a^b y^2 dx = \pi a^2 \int_a^b \operatorname{ch}^2 \frac{x}{a} dx = \pi a^2 \int_a^b \frac{1 + \operatorname{ch} 2x}{2} dx = \frac{\pi a^2}{2} \left[\int_a^b dx + \int_a^b \operatorname{ch} \frac{2x}{a} dx \right] \\
 &= \frac{\pi a^2}{2} \left(x \Big|_a^b + \frac{a}{2} \operatorname{sh} \frac{2x}{a} \Big|_a^b \right) = \frac{\pi a^2}{4} \left[2(b - a) + a \left(\operatorname{sh} \frac{2b}{a} - \operatorname{sh} 2 \right) \right].
 \end{aligned}$$

Бекіту сұрақтары

- ▶ Анықталған интеграл. Анықталған интегралдың геометриялық және физикалық мағыналары.
- ▶ Анықталған интегралдың қасиеттері.
- ▶ Анықталған интегралды есептеу. Ньютон-Лейбниц формуласы