Әл-Фараби атындағы Қазақ ұлттық университеті

Механика-математика факультеті

Ньютон – Котес квадратуралық формуласы. Анықталған интегралды есептеудің Гаусс әдісі.

Темирбеков Нурлан Муханович ф-м.ғ.д., профессор

Жоспар

1. Ньютон-Котес формулалары.

2. Трапеция формуласы.

3. Симпсон формуласы.

4. Есепті шығару үлгісі.

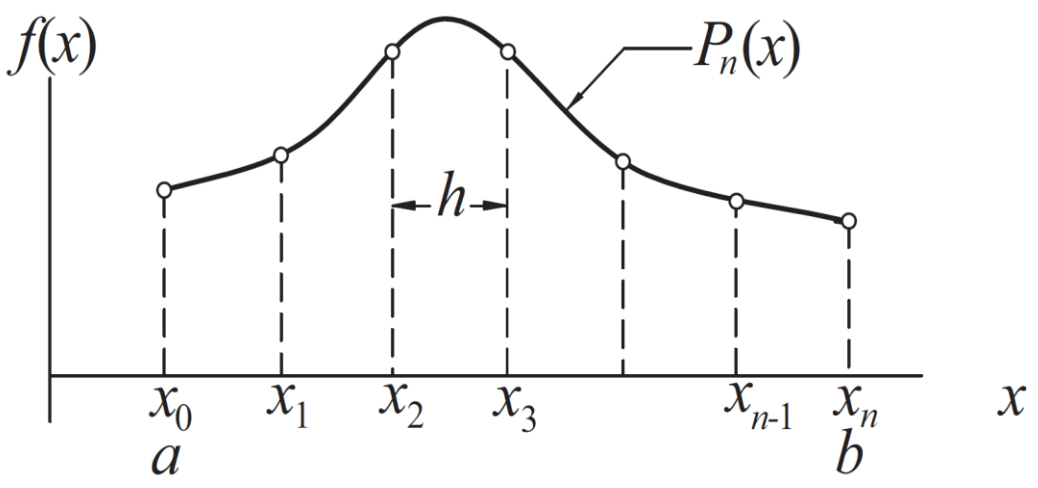
Мақсаты

Интегралдау амалын сандық түрде шешу және есептеу бағдарламасын жүзеге асыру.

Ньютон-Котес формулалары

Анықталған интеграл $\int_a^b f(x)dx \qquad (1)$

Көпмүшенің Лагранж формасы $P_n(x) = \sum_{i=0}^{n} f(x_i) l_i(x)$



1-сурет. $f(x)$-тың көпмүшелік жуықтауы. $h = (b-a)/n$

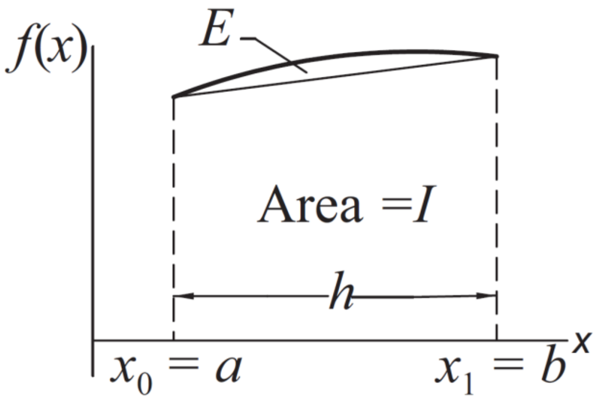
$$I = \int_a^b P_n(x)dx = \sum_{i=0}^{n} \left[f(x_i) \int_a^b l_i(x)dx \right] = \sum_{i=0}^{n} A_i f(x_i) \qquad (2a)$$

мұндағы

$$A_i = \int_a^b l_i(x)dx \,, i = 0,1, \dots , n \qquad (2b)$$

болып табылады.

Трапеция формуласы

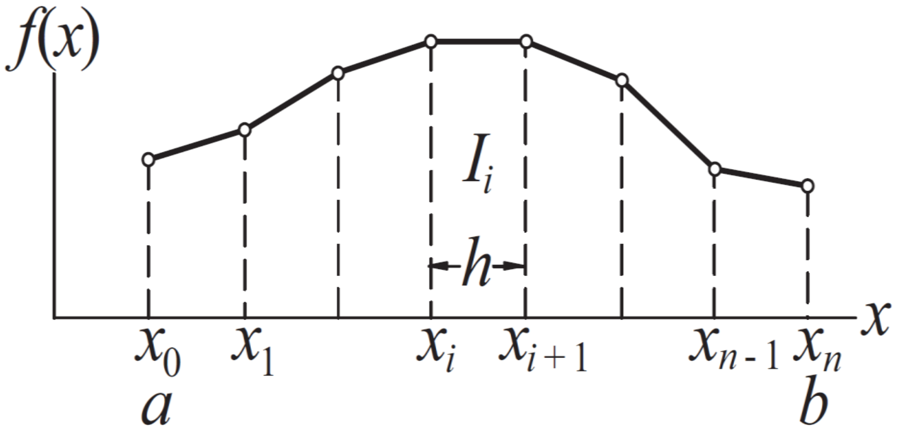


2-сурет. Трапеция формуласының кескіні

(2а) теңдеуі трапеция ережесімен

$$I = [f(a) + f(b)]\frac{h}{2} \qquad (3)$$

$$\mathrm{E} = -\frac{h^3}{12} f''(\xi) \qquad (4)$$



3-сурет. Құрама трапеция формуласының кескіні.

$$I_i = [f(x_i) + f(x_{i+1})]\frac{h}{2} \quad (5a)$$

$$I = \sum_{i=0}^{n-1} I_i = [f(x_0) + 2f(x_1) + 2f(x_2) + \cdots + 2f(x_{n-1}) + f(x_n)]\frac{h}{2} \qquad (5)$$

$$E = -\frac{(b-a)h^2}{12} f''(\xi) \qquad (6)$$

Трапеция формуласы

Рекурсивті трапеция формуласы

k = 1 (бір бөлік):

$$I_1 = [f(a) + f(b)]\frac{H}{2} \qquad (8)$$

k = 2 (екі бөлік):

$$I_2 = \left[f(a) + 2f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b)\right]\frac{H}{4} = \frac{1}{2}I_1 + f\left(a + \frac{H}{2}\right)\frac{H}{2}$$

Егер I_k шамасы $n = 2^{k-1}$ бөліктер арқылы құралса, онда

$$I_k = \frac{1}{2}I_{k-1} + \frac{H}{2^{k-1}}\sum_{i=1}^{2^{k-2}} f\left[a + \frac{(2i-1)H}{2^{k-1}}\right], \qquad k = 2,3,\ldots \quad (9a)$$

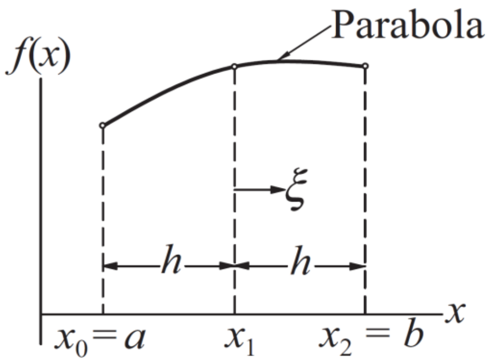
$$I(h) = \frac{1}{2}I(2h) + h\sum f(x_{\text{жаңа}}) \qquad (9b)$$

мұндағы $h = H/n$ - әрбір бөліктің ені. $H = b - a$

trapezoid модулі

```
## module trapezoid
def trapezoid(f,a,b,Iold,k):
    if k == 1:Inew = (f(a) + f(b))*(b - a)/2.0
    else:
        n = 2**(k -2 ) # Жаңа нүктелер саны
        h = (b - a)/n # Жаңа нүктелер аралығы
        x = a + h/2.0
        sum = 0.0
        for i in range(n):
            sum = sum + f(x)
            x = x + h
        Inew = (Iold + h*sum)/2.0
    return Inew
```

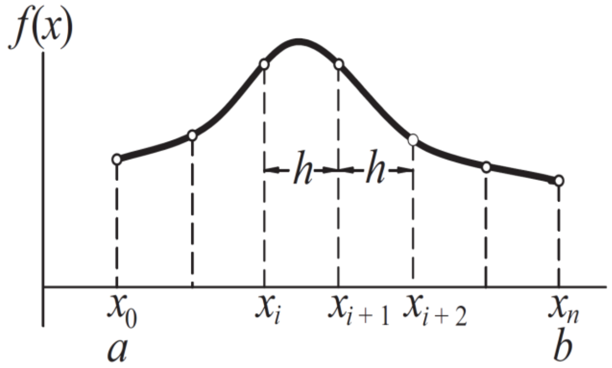
Симпсон формуласы



4-сурет. Симпсонның 1/3 формуласының кескіні

$$I = \left[f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b)\right]\frac{h}{3} \qquad (a)$$

$$\int_{x_i}^{x_{i+2}} f(x)dx \approx [f(x_i) + 4f(x_{i+1}) + f(x_{i+2})]\frac{h}{3} \qquad (b)$$



5-сурет. Симпсонның 1/3 құрама формуласының кескіні.

$$\int_a^b f(x)dx \approx I = [f(x_0) + 4f(x_1) + 2f(x_2) + 4f(x_3) + \cdots$$

$$\ldots + 2f(x_{n-2}) + 4f(x_{n-1}) + f(x_n)]\frac{h}{3} \qquad (10)$$

$$E = \frac{(b-a)h^4}{180} f^{(4)}(\xi) \qquad (11)$$

$$I = [f(x_0) + 3f(x_1) + 3f(x_2) + f(x_3)]\frac{3h}{8} \qquad (12)$$

Симпсон формуласы

$$I = \sum_{i=0}^{2} A_i f(x_i) = \left[f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b)\right]\frac{h}{3}$$

$$A_0 = \int_{-h}^{h} \frac{(\xi - 0)(\xi - h)}{(-h - 0)(-h - h)} d\xi = \frac{h}{3}$$

$$A_1 = \int_{-h}^{h} \frac{(\xi + h)(\xi - h)}{(0 + h)(0 - h)} d\xi = \frac{4h}{3}$$

$$A_2 = \int_{-h}^{h} \frac{(\xi + h)(\xi - 0)}{(h + h)(h - 0)} d\xi = \frac{h}{3}$$

Есепті шығару үлгісі

МЫСАЛ 1

Келесі деректерден

x	0	0.5	1.0	1.5	2.0	2.5
$f(x)$	1.5000	2.0000	2.0000	1.6364	1.2500	0.9565

$\int_0^{2.5} f(x)\,dx$ интеграл мәнін Симпсон формуласымен бағалаңыз.

Шешуі: Бөліктер саны тақ

$$I = [f(x_0) + 3f(x_1) + 3f(x_2) + f(x_3)]\frac{3h}{8}$$

$$\int_{x_i}^{x_{i+2}} f(x)dx \approx [f(x_i) + 4f(x_{i+1}) + f(x_{i+2})]\frac{h}{3}$$

$$I = [f(0) + 3f(0.5) + 3f(1.0) + f(1.5)]\frac{3 \cdot 0.5}{8} + [f(1.5) + 4f(2.0) + f(2.5)]\frac{0.5}{3} =$$

$$= 2.8381 + 1.2655 = 4.1036$$

Есепті шығару үлгісі

МЫСАЛ 2

$\int_0^{\pi} \sqrt{x}\cos x\,dx$ мәнін алты ондық таңбаға дейін бағалау үшін қанша бөлік қажет?

```
import math
from trapezoid import *
def f(x): return math.sqrt(x)*math.cos(x)
 Iold = 0.0
for k in range(1,21):
      Inew = trapezoid(f,0.0,math.pi,Iold,k)
      if (k > 1) and (abs(Inew - Iold)) < 1.0e-6: break
      Iold = Inew
print("Integral =",Inew)
print("nбөлік =",2**(k-1))
```

Егер біз $t = \sqrt{x}$ қолданып, есептесек

$$\int_0^{\pi} \sqrt{x}\cos x\,dx = \int_0^{\sqrt{\pi}} 2t^2 \cos t^2\,dt$$

интегралды бағалау **4096 бөлікпен** аяқталады.

Бағдарламаның нәтижесі

Integral = -0.8948316648532865

nбөлік = 32768

Қорытынды

1. Ньютон-Котес формулалары.
2. Трапеция формуласы және бағдарламасы.
3. Симпсон формуласы және қорытылуы.
4. Есепті шығарудың бағдарламалық үлгісі.

Пайдаланылған әдебиеттер тізімі

1. Jaan Kiusalaas. Numerical methods in engineering with Python. Cambridge University Press. ISBN 978-1-107-03385
2. Вабищевич П.Н. Численные методы: Вычислительный практикум. — М.: Книжный дом «ЛИБРОКОМ», 2010. — 320 с.
3. Киреев В. И., Пантелеев А. В. Численные методы в примерах и задачах: Учебное пособие. — СПб.: Издательство «Лань», 2015. — 448 с.