Дәріс 6. Комплекс айнымалы функцияларды интегралдау. Кошидің интегралдық теоремасы

1 Комплекс айнымалы функцияларды интегралдау

γ қисығы және осы қисықта анықталған үзіліссіз $f(z)$ функциясы берілсін.

γ қисығын $a = z_0, z_1, z_2, \ldots, z_{n-1}, z_n = b$ нүктелері арқылы n бөлікке бөлеміз (11-сурет). Әр $[z_{k-1}, z_k]$ аралығынан ζ_k нүктесін таңдап алып, $\sum_{k=1}^{n} f(\zeta_k)\Delta z_k$ интегралдық қосындысын құрамыз, мұнда $\Delta z_k = z_k - z_{k-1}$.

Егер $z_{k-1}z_k$ доғаларының ең үлкенінің ұзындығы нөлге ұмтылғанда интегралдық қосындының шегі табылса, онда ол $f(z)$ функциясының γ қисығының бойымен алынған интегралы деп аталады және $\int_\gamma f(z)dz$ арқылы белгіленеді.

Демек,

$$\int_\gamma f(z)dz = \lim_{\substack{\max|\Delta z_k|\to 0\\ (n\to\infty)}} \sum_{k=1}^{n} f(\zeta_k)\Delta z_k. \tag{1}$$

Егер γ – тегіс қисық, ал $f(z)$ - үзіліссіз функция болса, онда (1) интегралдық қосындының табылатынын көрсетейік. Егер төмендегі белгілеулерді ескерсек,

$$\begin{gathered} f(z) = u(x,y) + iv(x,y), z = x + iy, z_k = x_k + iy_k, \\ \Delta z_k = (x_k + iy_k) - (x_{k-1} + iy_{k-1}) = \Delta x_k + i\Delta y_k, \\ \zeta_k = \xi_k + i\eta_k, u(\xi_k, \eta_k) = u_k, v(\xi_k, \eta_k) = v_k \end{gathered}$$

онда

$$\begin{gathered} \sum_{k=1}^{n} f(\zeta_k)\Delta z_k = \sum_{k=1}^{n} (u_k + iv_k)(\Delta x_k + i\Delta y_k) = \\ = \sum_{k=1}^{n} (u_k\Delta x_k - v_k\Delta y_k) + i\sum_{k=1}^{n} (u_k\Delta y_k + v_k\Delta x_k) \end{gathered}$$

Соңғы теңдіктің оң жағындағы қосындылар сәйкес қисық сызықты интегралдар үшін интегралдық қосындылар болып табылады.

γ қисығы тегіс және $f(z)$ функциясы үзіліссіз болғанда бұл косындылар табылады. Соңғы қосындыда $\max|\Delta z_k|$ нөлге ұмтылғанда шекке көшсек, келесі теңдікке келеміз:

$$\int_\gamma f(z)dz = \int_\gamma udx - vdy + i\int_\gamma vdx + udy \tag{2}$$

(2) формуладан көретініміз: комплекс айнымалы функцияның интегралын есептеу нақты айнымалы функциядан қисық сызықты интеграл есептеуге келіп тіреледі.

(2) формуланы келесі ыңғайлы түрде жазуға болады:

$$\int_\gamma f(z)dz = \int_\gamma (u+iv)(dx+idy) \tag{3}$$

Егер γ кисығы $x = x(t), y = y(t), \alpha \le t \le \beta$ параметрлік теңдеуімен берілсе, онда $z = z(t) = x(t) + iy(t)$ теңдеуі $L-$ қисығының комплекс параметрлік теңдеуі деп аталады және (3) –формула келесі түрде жазылады:

$$\int_\gamma f(z)dz = \int_\alpha^\beta (u+iv)\left(x'(t)+iy'(t)\right)dt == \int_\alpha^\beta f(z(t))\cdot z'(t)dt \tag{4}$$

Енді комплекс айнымалы функцияның интегралының негізгі касиеттерін келтірейік:

1. $\displaystyle\int_a^b dz = b-a,$

$$\sum_{k=1}^{n} \Delta z_k = \sum_{k=1}^{n} (z_k - z_{k-1}) = z_1 - z_0 + z_2 - z_1 + \ldots + z_n - z_{n-1} =$$
$$= z_n - z_0 = b - a$$

олай болса

$$\int_\gamma dz = b-a$$

Берілген интеграл γ қисығының алғашқы және соңғы нүктесіне ғана тәуелді, демек интегралдау жолына тәуелсіз.

Егер $a = b$ болса,онда $\int_\gamma dz = 0$, яғни тұйык контур бойымен интеграл нөлге тең.

2. $\displaystyle\int_{AB} f(z)dz = -\int_{BA} f(z)dz$ (интегралдау бағыты өзгергенде интегралдың таңбасы өзгереді)

3. $\displaystyle\int_\gamma (af_1(z)+bf_2(z))\,dz = a\int_\gamma f_1(z)dz + a\int_\gamma f_2(z)dz$, мұнда $a, b-$ комплекс сандар.

4. $\displaystyle\int_\gamma f(z)dz = \int_{\gamma_1} f(z)dz + \int_{\gamma_2} f(z)dz$, мұнда $\gamma = \gamma_1 + \gamma_2$; γ_1 мен γ_2 қисықтарының ортақ нүктелері жоқ.

5. Егер γ қисығының барлық нүктелерінде $|f(z)| \le M$ теңсіздігі орындалса, онда $\left|\int_\gamma f(z)dz\right| \le M\ell$, мұнда $M = \mathrm{const}$, ℓ дегеніміз γ қисығының ұзындығы.

Қисық сызықты интегралдар үшін математикалық талдау курсынан белгілі келесі **теореманы** келтірейік: *Егер $P(x,y)$ және $Q(x,y)$ функциялары және олардың $\frac{\partial P}{\partial y}, \frac{\partial Q}{\partial x}$ дербес туындылары L қисығымен шектелген D облысында үзіліссіз болса, онда*

$$\iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy = \oint_\gamma Pdx + Qdy \tag{5}$$

Соңғы формуланы Остроградский-Грин формуласы деп атайды.

2 Коши интегралдық теоремасы

Енді негізгі теоремаға көшейік.

Коши интегралдық теоремасы. *Егер $f(z)$ функциясы γ қисығымен шектелген бірбайланысты D облысында аналитикалық жәнетұйық $\bar{D}$ облысында үзіліссіз болса, онда*

$$\oint_\gamma f(z)dz = 0. \tag{6}$$

Дәлелдеу. (2) формула бойынша

$$\oint_\gamma f(z)dz = \int_\gamma udx - vdy + i\int_\gamma vdx + udy$$

$f(z)$ функциясы γ кисығымен шенелген D облысында аналитикалык болғандықтан, u және v функцияларының дербес туындылары бар және Коши-Риман шарты орындалады. (5) формуласын және Коши-Риман шартын ескерсек, онда

$$\int_\gamma udx - vdy = \iint_D \left(-\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right) dxdy = 0$$
$$\int_\gamma vdx + udy = \iint_D \left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y}\right) dxdy = 0$$

Демек, теорема дәлелденді.

Жоғарыдағы теореманы көпбайланысты облысқа дәлелдеуге болады.

Теорема. *Егер $f(z)$ функциясы $\gamma_0,\gamma_1,\gamma_2,\ldots,\gamma_n$ қисықтарымен шектелген көпбайланысты D облысында аналитикалық және тұйық $\bar{D}$ облысында үзіліссіз болса, онда*

$$\int_\gamma f(z)dz = 0.$$

Мұнда γ дегеніміз $\gamma_0,\gamma_1,\gamma_2,\ldots,\gamma_n$ қисықтарынан тұратын D облысының толық шекарасы, $\gamma = \gamma_0 + \gamma_1 + \gamma_2 + \ldots + \gamma_n$.

Салдар.*Егер $f(z)$ функциясы бірбайланысты D облысында аналитикалық болса, онда бұл функцияның интегралы интегралдау жолына тәуелсіз, тек бастапқы z_0 және соңғы z_1 нүктесіне ғана тәуелді.*

Дәлелдеуі жоғарыдағы теоремадан шығады.

Теорема. Егер $f(z)$ функциясы бірбайланысты D облысында аналитикалық, ал тұйық $\bar{D}$ облысында үзіліссіз болса, онда $F(z) = \int_0^z f(\zeta)d\zeta$ функциясын D облысында дифференциалдауға болады және $F'(z) = f(z)$.

Дәлелдеу. Өсімшелердің қатынасын аламыз:

$$\frac{F(z+\Delta z) - F(z)}{\Delta z} = \frac{1}{\Delta z}\left(\int_{z_0}^{z+\Delta z} f(\zeta)d\zeta - \int_{z_0}^{z} f(\zeta)d\zeta\right) = $$
$$= \frac{1}{\Delta z}\int_{z}^{z+\Delta z} f(\zeta)d\zeta$$

Жоғарыдағы салдарды ескердік. Интегралдың 1-қасиеті бойынша $\displaystyle\int_z^{z+\Delta z} d\xi = \Delta z$, демек

$$f(z) = \frac{f(z)}{\Delta z}\cdot\Delta z = \frac{f(z)}{\Delta z}\int_z^{z+\Delta z} d\xi = \frac{1}{\Delta z}\int_z^{z+\Delta z} f(z)d\xi.$$

Төмендегі өрнекті бағалаймыз:

$$\left|\frac{F(z+\Delta z) - F(z)}{\Delta z} - f(z)\right| \le \frac{1}{|\Delta z|}\int_z^{z+\Delta z} |f(\zeta) - f(z)|d\zeta \le$$
$$\le \frac{1}{\Delta z}\max_{z\xi z, z+\Delta z]} |f(\zeta) - f(z)|\cdot|\Delta z| = \max_{\zeta\in[z,z+\Delta z]} |f(\zeta) - f(z)|$$

Егер $f(z)$ функциясының үзіліссіз екенін ескерсек, $\forall\varepsilon > 0$ саны үшін $\exists\delta > 0 :$ $|\Delta z| < \delta$ болғанда

$$\max_{\zeta\in[z,z+\Delta z]} |f(\zeta) - f(z)| < \varepsilon$$

теңсіздігі орындалады, демек

$$\left|\frac{F(z+\Delta z)-F(z)}{\Delta z}-f(z)\right|<\varepsilon.$$

Бұл теңсіздіктен

$$\lim_{\Delta z\to 0}\frac{F(z+\Delta z)-F(z)}{\Delta z}=F'(z)=f(z)$$

теңдігі шығады.

Дәлелденген теорема бойынша комплекс айнымалы функция үшін анықталмаған интеграл ұғымын енгізуге болады.

Егер D облысында $f(z)$ функциясы үшін $F'(z)=f(z)$ теңдігі орындалса, онда аналитикалық $F(z)$ функциясы $f(z)$ функциясының алғашқы функциясы деп, ал алғашқы функциялар жиыны анықталмаған интеграл деп аталады да,

$$\int f(z)dz=F(z)+c$$

арқылы белгіленеді.

Бұдан Ньютон-Лейбниц формуласы шығады:

$$\int_{z_0}^{z} f(\zeta)d\xi=F(z)-F\left(z_0\right)$$

Аналитикалық функциялар үшін математикалық талдау курсындағы интегралдар кестесі өзгеріссіз қалады.

Егер $f(z)$ және $g(z)$ функциялары бірбайланысты D облысында аналитикалық болса және $z_0\in D, z_1\in D$, онда бөліктеп интегралдау формуласы орындалады:

$$\int_{z_0}^{\pi_0} f(z)\varphi'(z)dz=f(z)\cdot\varphi(z)\Big|_{z_0}^{\pi_0}-\int_{z_0}^{\tilde{n}} f'(z)\varphi(z)dz$$