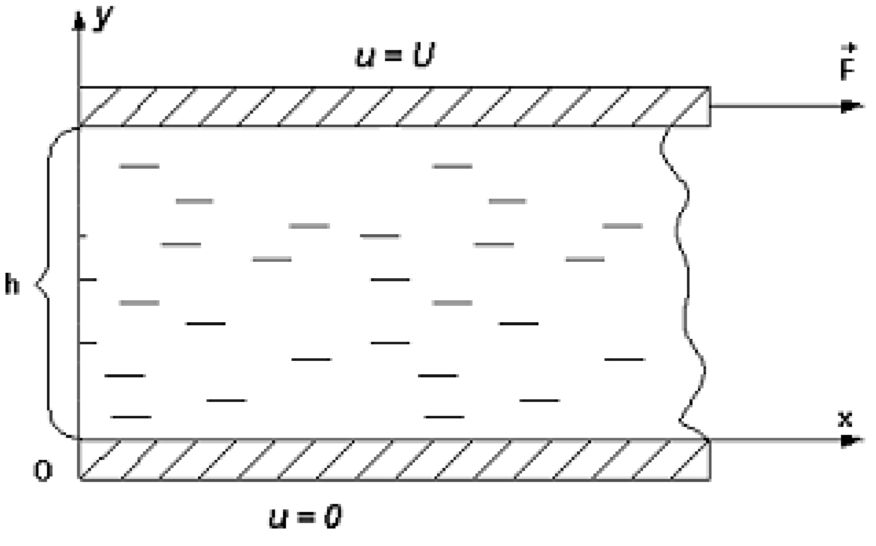
ТЕЧЕНИЕ КУЭТТА



Скорость нижней пластины *u=0*

Скорость верхней пластины *u=U*

Расстояние между пластинами *y=h*

Течение плоско параллельное

$$\vec{\upsilon}(u,0,0);\quad \frac{\partial}{\partial x}=0;\quad \frac{\partial}{\partial z}=0$$

Динамическая задача

Уравнение движения для слоистого течения:

$$\frac{dp}{dx}=\mu\frac{d^2u}{dy^2}$$

С граничными условиями:

⇒ При *y=0, u=0*

⇒ При *y=h, u=U*

Проинтегрируем уравнение движения: $$\frac{d^2u}{dy^2}=\frac{1}{\mu}\frac{dp}{dx}$$

$$u=\frac{1}{\mu}\frac{dp}{dx}\frac{y^2}{2}+C_1y+C_2$$

Найдем постоянные интегрирования C_1 и C_2

При $y=0$, $u=0$ $\Rightarrow$ $0=C_2$

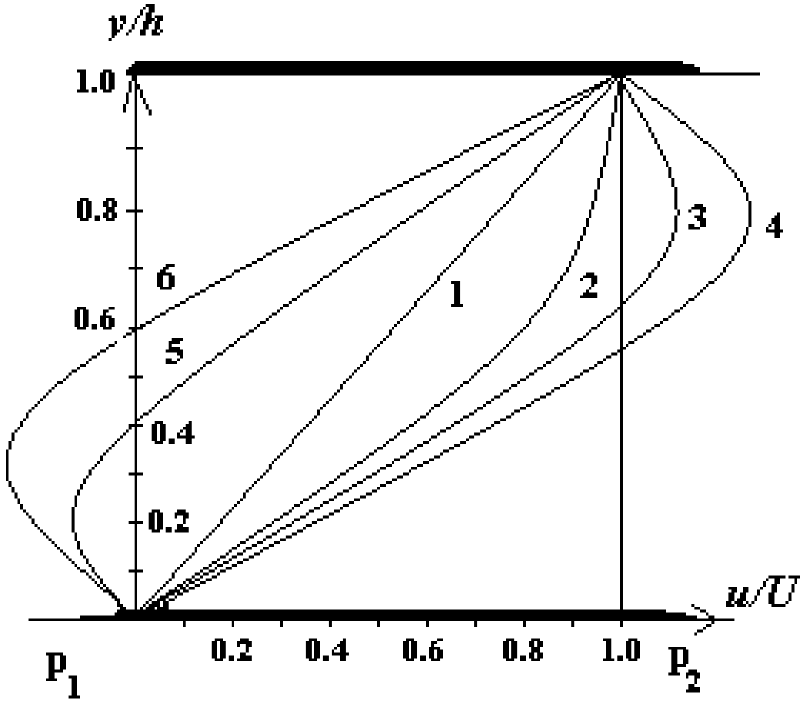
При $y=h$, $u=U$ $\Rightarrow$ $U=\frac{1}{\mu}\frac{dp}{dx}\frac{h^2}{2}+C_1h$ $\Rightarrow$ $C_1=\frac{U}{h}-\frac{1}{2\mu}h\frac{dp}{dx}$

$$u=\frac{1}{\mu}\frac{dp}{dx}\frac{y^2}{2}+\left(\frac{U}{h}-\frac{1}{2\mu}h\frac{dp}{dx}\right)y=\frac{1}{\mu}\frac{dp}{dx}\frac{y}{2}\frac{y}{h}\frac{h}{h}+\frac{U}{h}y-\frac{1}{2\mu}h\frac{dp}{dx}y$$

$$u=\frac{U}{h}y-\frac{1}{2\mu}\frac{dp}{dx}h\cdot y\cdot\frac{h}{h}\left(1-\frac{y}{h}\right)\Rightarrow u=\frac{U}{h}y-\frac{h^2}{2\mu}\frac{dp}{dx}\frac{y}{h}\left(1-\frac{y}{h}\right)$$

$$u=\frac{U}{h}y-\frac{h^2}{2\mu}\frac{dp}{dx}\frac{y}{h}\left(1-\frac{y}{h}\right)$$ - профиль скорости в течении Куэтта.

- $\frac{dp}{dx}=0 \Rightarrow u=\frac{y}{h}U$ - Линия 1
- $\frac{dp}{dx}\prec 0 \Rightarrow p_2 \prec p_1$ - Линии 2,3,4
- $\frac{dp}{dx}\succ 0 \Rightarrow p_2 \succ p_1$ - Линии 5,6



Расход жидкости через поперечное сечение канала при $\frac{dp}{dx} = 0$:

$$Q = \int_0^h u dy = \int_0^h \frac{U}{h} y dy = \frac{U}{h} \frac{y^2}{2}\Big|_0^h = \frac{Uh}{2}$$

$$\boxed{Q = \frac{Uh}{2}}$$

Найдем трение на нижней пластине для случая $\frac{dp}{dx} = 0$:

$$\tau_w = \mu \frac{du}{dy}\Big|_{y=0} = \mu \frac{d}{dy}\left(\frac{U}{h} y\right)\Big|_{y=0} = \mu \frac{U}{h}$$

$$\boxed{\tau_w = \mu \frac{U}{h}}$$

Тепловая задача

Найдем распределение температуры по течению Куэтта.

Примем $\dfrac{dp}{dx} = 0 \;\Rightarrow\; u = \dfrac{U}{h} y$

Запишем уравнение движения $\;\Rightarrow\; \dfrac{dp}{dx} = \mu \dfrac{d^2u}{dy^2} \;\Rightarrow\; \mu \dfrac{d^2u}{dy^2} = 0 \;\Rightarrow\; \dfrac{d^2u}{dy^2} = 0$

Запишем уравнение энергии для слоистого течения: $\dfrac{1}{\Pr}\dfrac{d^2 i}{dy^2} + \cancel{u\dfrac{d^2u}{dy^2}} + \left(\dfrac{du}{dy}\right)^2 = 0$

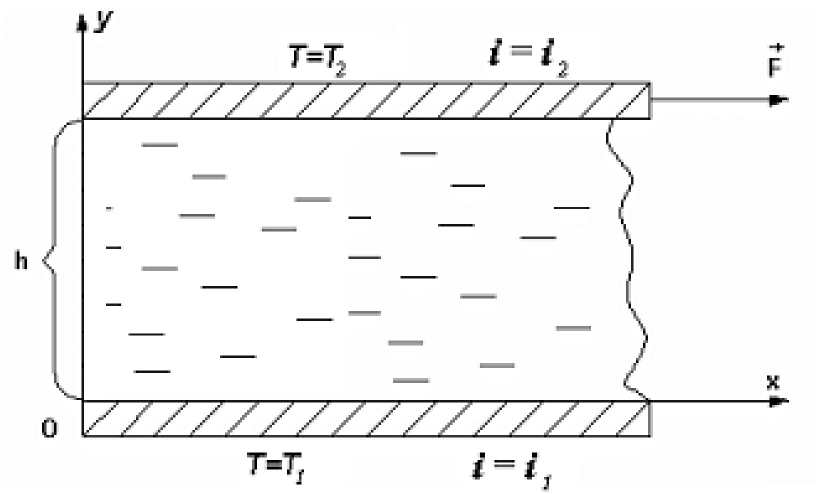
0

$$\frac{1}{\Pr}\frac{d^2 i}{dy^2} + \left(\frac{du}{dy}\right)^2 = 0$$

- Уравнение энергии для течения Куэтта

тепло-проводность

трение



$$y = 0 \Rightarrow T = T_1;\; i = i_1$$

$$y = h \Rightarrow T = T_2;\; i = i_2$$

Из решения динамической задачи $\Rightarrow u = \dfrac{U}{h} y \Rightarrow \dfrac{du}{dy} = \dfrac{U}{h}$

$$\frac{d^2 i}{dy^2} = -\Pr\left(\frac{U}{h}\right)^2$$

$$\frac{di}{dy} = -\Pr\frac{U^2}{h^2} y + C_1$$

$$i = -\Pr\frac{U^2}{2h^2} y^2 + C_1 y + C_2$$

$$\boxed{\boldsymbol{i = C_p T}}$$

$$i = -\mathrm{Pr}\frac{U^2}{2h^2}y^2 + C_1 y + C_2$$

$$y = 0 \quad \Rightarrow \quad i_1 = C_2$$

$$y = h \quad \Rightarrow \quad i_2 = -Pr\frac{U^2}{2h^2}h^2 + C_1 h + C_2 = -Pr\frac{U^2}{2} + C_1 h + i_1$$

$$C_1 h = \frac{Pr\,U^2}{2} + i_2 - i_1 \quad \Rightarrow \quad C_1 = \frac{1}{h}\left(\frac{Pr\,U^2}{2} + i_2 - i_1\right)$$

$$i = -\frac{Pr}{2}\frac{U^2}{h^2}y^2 + \frac{Pr\,U^2}{2h}y + \frac{i_2 - i_1}{h}y + i_1 \qquad (1)$$

Введем обозначение: $\frac{y}{h} = \eta \quad \Rightarrow \quad 0 < \eta < 1$

$$i = -\frac{Pr}{2}U^2\eta^2 + \frac{PrU^2}{2}\eta + i_1 + (i_2 - i_1)\eta$$

$$i - i_1 = \frac{Pr}{2}U^2\eta(1-\eta) + (i_2 - i_1)\eta$$

$$\frac{i - i_1}{i_2 - i_1} = \eta + \frac{\Pr U^2}{2(i_2 - i_1)}\eta(1-\eta)$$

$$\boxed{\frac{U^2}{i_2 - i_1} = E_c}$$ **- число Эккерта**

$$E_c = \frac{\text{кинетическая энергия ед. массы жидкости}}{\text{перепад теплосодержания}}$$

$$\boxed{\frac{i-i_1}{i_2-i_1}=\eta+\frac{\Pr E_c}{2}\eta(1-\eta)}$$ **- температурное поле в течении Куэтта**

Если трение отсутствует, т.е теплотой за счет трения пренебрегаем

$$\frac{U^2}{i_2-i_1}=E_c=0 \qquad Pr=\frac{\nu}{a}\neq 0$$

$$E_c\cdot\Pr=0\Rightarrow\frac{i-i_1}{i_2-i_1}=\eta$$ **- линейная зависимость**

Если учесть теплоту трения $\Rightarrow \Pr\cdot E_c\neq 0$ причем $\frac{\Pr\cdot E_c}{2}\eta(1-\eta)\succ 0$

Линейное распределение + параболическое

Рассчитаем тепловой поток на стенку для случая, когда верхняя пластина нагрета сильнее. $i_2 \succ i_1 \quad T_2 \succ T_1$

(1) $\Rightarrow$ $$i = -\frac{Pr}{2}U^2\frac{y^2}{h^2} + \frac{Pr\,U^2}{2}\frac{y}{h} + i_1 + (i_2 - i_1)\frac{y}{h}$$

$$i = i_1 + \frac{y}{h}(i_2 - i_1) + \Pr\frac{U^2}{2}\left(\frac{y}{h} - \frac{y^2}{h^2}\right)$$ **где** $\frac{y}{h} = \eta$

$$i = i_1 + \eta(i_2 - i_1) + \frac{\Pr U^2}{2}(\eta - \eta^2)$$

$$q = -\lambda\frac{\partial T}{\partial y}\Big|_{y=h} = -\lambda\frac{\partial T}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial y}\Big|_{\eta=1} = \left|\frac{\partial i}{\partial \eta} = C_p\frac{\partial T}{\partial \eta}\right| = -\frac{\lambda}{C_p}\frac{\partial i}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial y}\Big|_{\eta=1}$$

$$\frac{\partial i}{\partial \eta}\Big|_{\eta=1} = i_2 - i_1 + \frac{Pr\,U^2}{2}(1-2) = i_2 - i_1 - \frac{Pr\,U^2}{2}$$

$$\frac{\partial \eta}{\partial y}\Big|_{\eta=1} = \frac{1}{h}$$

$$q = -\frac{\lambda}{C_p}\left(i_2 - i_1 - \frac{PrU^2}{2}\right)\frac{1}{h} = -\frac{\lambda}{h}\left(T_2 - T_1 - \frac{PrU^2}{2C_p}\right)$$

$$\boxed{q = -\frac{\lambda}{h}\left(T_2 - T_1 - \frac{\Pr U^2}{2C_p}\right)}$$

Если $T_2 - T_1 \succ \dfrac{\Pr U^2}{2C_p}$ **, то** $q \prec 0$, **а так как** $T_2 > T_1$

тепловой поток
направлен от горячей верхней пластины к холодной жидкости,
т.е. происходит охлаждение верхней пластины

Если $T_2 - T_1 \prec \dfrac{\Pr U^2}{2C_p}$ **, то** $q > 0$

тепловой поток
направлен от холодной жидкости к горячей верхней пластине,
т.е. происходит нагревание верхней пластины

за счет трения

Рассчитаем скорость движения верхней пластины, при которой тепловой поток сменит свое направление:

(1) $\Rightarrow$

$$i = -\frac{Pr}{2}U^2\frac{y^2}{h^2} + \frac{Pr\,U^2}{2}\frac{y}{h} + i_1 + (i_2 - i_1)\frac{y}{h}$$

$$\left(\frac{\partial T}{\partial y}\right)_{y=h} = \frac{1}{C_p}\left(\frac{\partial i}{\partial y}\right)_{y=h} = 0$$

$$\frac{1}{C_p}\left(\frac{\partial i}{\partial y}\right)\Bigg|_{y=h} = -\frac{Pr}{2}U^2\frac{2h}{h^2} + \frac{Pr\,U^2}{2}\frac{1}{h} + (i_2 - i_1)\frac{1}{h} = -\frac{Pr\,U^2}{2}\frac{1}{h} + (i_2 - i_1)\frac{1}{h}$$

$$\frac{1}{h}\left(-\frac{Pr\,U^2}{2} + (i_2 - i_1)\right) = 0 \Rightarrow T_2 - T_1 = \frac{Pr\,U^2}{2C_p} \Rightarrow U^2 = \frac{2C_p(T_2 - T_1)}{\mathrm{Pr}}$$

$$\downarrow$$

$$Ec \cdot Pr = 2$$

Если *EcPr* > 2, то q > 0, верхняя пластина будет нагреваться.