Әл-Фараби атындағы Қазақ ұлттық университеті

Механика-математика факультеті

Қарапайым дифференциалдық теңдеу үшін Коши есебінің сандық шешуі.

Темирбеков Нурлан Муханович ф-м.ғ.д., профессор

Жоспар

1. Бірінші ретті дифференциалдық теңдеу.

2. Эйлер әдісі.

3. Рунге-Кутта әдістері.

4. Есепті шығару үлгісі.

Мақсаты

Бірінші ретті дифференциалдық теңдеулердің сандық шешімін табу және есептеу бағдарламасын жүзеге асыру.

Бірінші ретті дифференциалдық теңдеу

Бірінші ретті дифференциалдық теңдеудің жалпы түрі:

$$y' = f(x, y) \qquad (6.1\mathrm{a})$$

$$y(a) = \alpha \qquad (6.1\mathrm{b})$$

мұндағы $y' = dy/dx$ және $f(x, y)$ берілген функция.

n ретті қарапайым дифференциалдық теңдеуді

$$y^{(n)} = f\left(x, y, y', y'', \dots, y^{(n-1)}\right) \qquad (6.2)$$

$$y_0 = y, \qquad y_1 = y', \qquad y_2 = y'' \quad \dots \quad y_{n-1} = y^{(n-1)} \qquad (6.3)$$

эквиваленттті бірінші ретті теңдеулер мына түрде жазылады

$$y_0' = y_1, \qquad y_1' = y_2, \qquad y_2' = y_3 \quad \dots \quad y_n' = f(x, y_0, y_1, y_2, \dots, y_{n-1}) \qquad (6.4\mathrm{a})$$

$$y_0(a) = \alpha_0, y_1(a) = \alpha_1, y_2(a) = \alpha_2, \dots, y_{n-1}(a) = \alpha_{n-1} \qquad (6.4b)$$

$$y' = F(x, y) \qquad y(a) = \alpha \qquad (6.5a)$$

мұндағы $F(x, y) = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ f(x, y) \end{bmatrix}$ $\qquad (6.5b)$

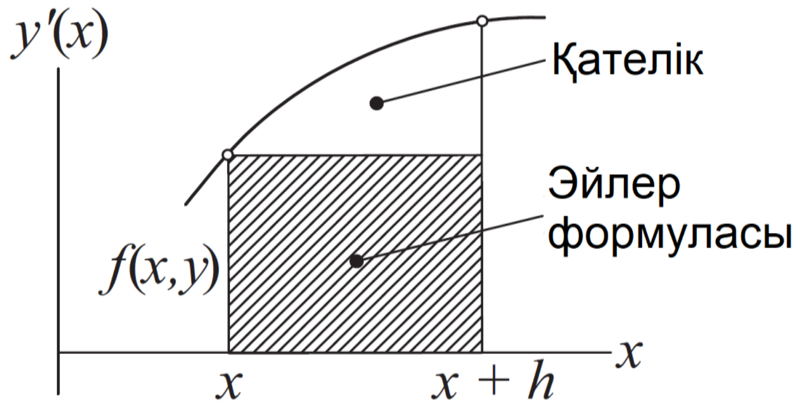
Эйлер әдісі

$$y(x+h) \approx y(x) + y'(x)h \qquad (6.6)$$

(6.6) теңдеудегі қателік

$$E = \frac{1}{2}y''(\xi)h^2 = O(h^2), \qquad x < \xi < x + h \quad (6.7)$$

$$E_{жин} = nE = \frac{x_n - x_0}{h}E = O(h) \qquad (6.8)$$



6.1-сурет. Эйлер формуласының графикалық көрінісі

Euler модулі

```
##module euler
import numpy as np
def integrate(F,x,y,xStop,h):
    X = []
    Y = []
    X.append(x)
    Y.append(y)
while x < xStop:
        h = min(h,xStop - x)
        y = y + h*F(x,y)
        x = x + h
        X.append(x)
        Y.append(y)
return np.array(X),np.array(Y)
```

Эйлер әдісі

МЫСАЛ 6.1

$$y'' = -0{,}1y' - x \qquad y(0) = 0 \qquad y'(0) = 1$$

бастапқы мән есебін Эйлер әдісімен x=0-ден 2-ге дейін h=0.05 қадаммен интегралдаңыз. Есептелген y мәнін аналитикалық шешіммен

$$y = 100x - 5x^2 + 990(e^{-0.1x} - 1)$$

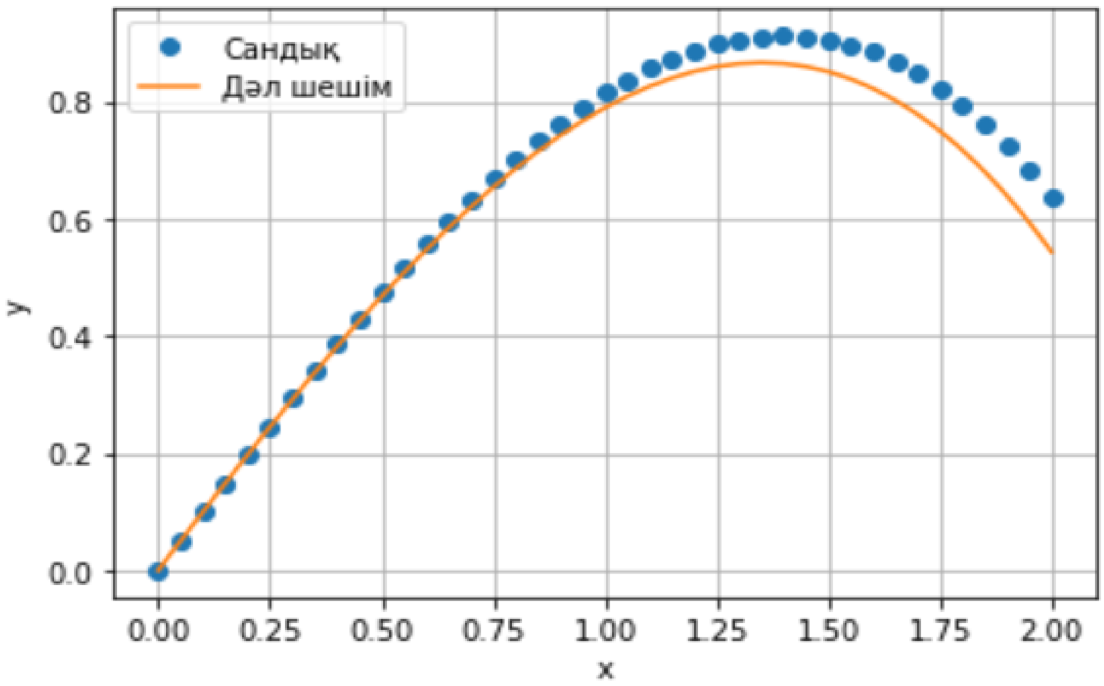
бірге сызыңыз.

Шешуі. $y_0 = y$ және $y_1 = y'$ белгілеуімен эквивалентті бірінші ретті теңдеулер мен бастапқы шарттар мына түрде болады

$$F(x,y) = \begin{bmatrix} y_0' \\ y_1' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 \\ -0{,}1y_1 - x \end{bmatrix} \qquad y(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Бағдарламалық код дәріс материалында келтірілген.

Сандық шешімінің графигі



Рунге-Кутта әдістері. Екінші ретті Рунге-Кутта әдісі

$$y(x+h) = y(x) + c_0 F(x,y)\cdot h + c_1 F\,[x+ph, y+qhF(x,y)]\cdot h \qquad (a)$$

$$y(x+h) = y(x) + y'(x)h + \frac{1}{2!}y''(x)h^2 = y(x) + F(x,y)h + \frac{1}{2}F'(x,y)h^2 \qquad (b)$$

$$y(x+h) = y(x) + F(x,y)h + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial F}{\partial x} + \sum_{i=0}^{n-1}\frac{\partial F}{\partial y_i}F_i(x,y)\right)h^2 \qquad \text{(c)}$$

$$F\,[x+ph, y+qhF(x,y)] = F(x,y) + \frac{\partial F}{\partial x}ph + qh\sum_{i=1}^{n-1}\frac{\partial F}{\partial y_i}F_i(x,y)$$

$$y(x+h) = y(x) + (c_0+c_1)F(x,y)\cdot h + c_1\left[\frac{\partial F}{\partial x}ph + qh\sum_{i=1}^{n-1}\frac{\partial F}{\partial y_i}F_i(x,y)\right]\cdot h \qquad (d)$$

$$\boldsymbol{c_0 + c_1 = 1, \qquad c_1 p = \frac{1}{2}, \qquad c_1 q = \frac{1}{2} \qquad (e)}$$

$c_0 = 0$	$c_1 = 1$	$p = 1/2$	$q = 1/2$	**Модификацияланған Эйлер әдісі**
$c_0 = 1/2$	$c_1 = 1/2$	$p = 1$	$q = 1$	**Хен әдісі**
$c_0 = 1/3$	$c_1 = 2/3$	$p = 3/4$	$q = 3/4$	**Ралстон әдісі**

Төртінші ретті Рунге-Кутта әдісі

$$K_0 = h \cdot F(x, y)$$

$$K_1 = h \cdot F\left(x + \frac{h}{2}, y + \frac{K_0}{2}\right)$$

$$K_2 = h \cdot F\left(x + \frac{h}{2}, y + \frac{K_1}{2}\right)$$

$$K_3 = h \cdot F(x + h, y + K_2)$$

$$y(x + h) = y(x) + \frac{1}{6}(K_0 + 2K_1 + 2K_2 + K_3)$$

run_kut4 модулі

```
## module run_kut4
import numpy as np
def integrate(F,x,y,xStop,h):
    def run_kut4(F,x,y,h):
        K0 = h*F(x,y)
        K1 = h*F(x + h/2.0, y + K0/2.0)
        K2 = h*F(x + h/2.0, y + K1/2.0)
        K3 = h*F(x + h, y + K2)
        return (K0 + 2.0*K1 + 2.0*K2 + K3)/6.0
    X = []
    Y = []
    X.append(x)
    Y.append(y)
    while x < xStop:
        h = min(h,xStop - x)
        y = y + run_kut4(F,x,y,h)
        x = x + h
        X.append(x)
        Y.append(y)
    return np.array(X),np.array(Y)
```

Есепті шығару үлгісі

МЫСАЛ 6.2

$y'' = -0{,}1y' - x \qquad y(0) = 0 \qquad y'(0) = 1$

бастапқы мән есебін төртінші ретті Рунге-Кутта әдісімен x=0-ден 2-ге дейін h=0.2 қадаммен интегралдаңыз. Есептелген y мәнін аналитикалық шешіммен

$$y = 100x - 5x^2 + 990(e^{-0.1x} - 1)$$

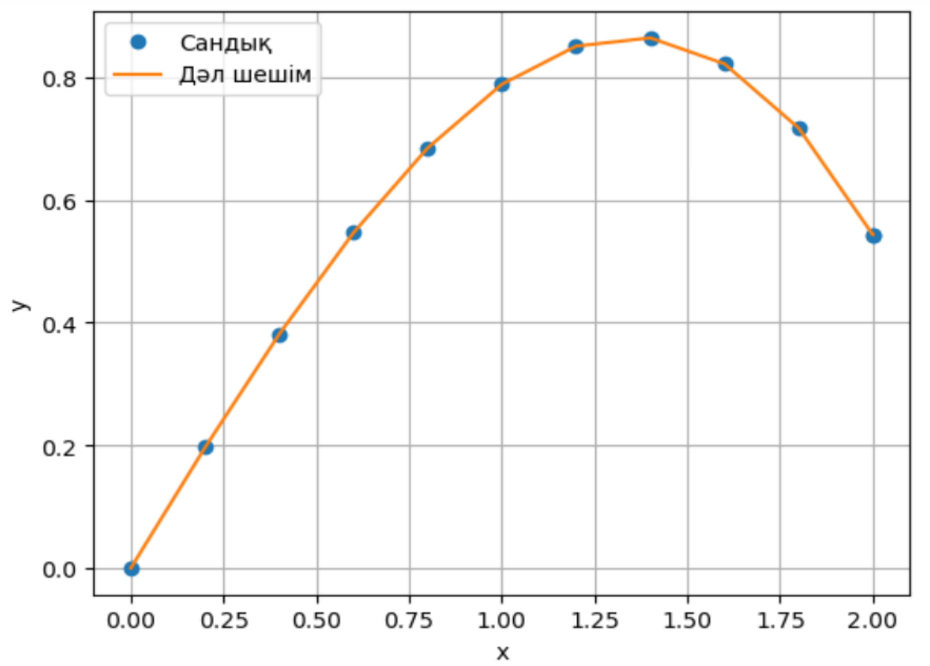
бірге сызыңыз.

Шешуі. $y_0 = y$ және $y_1 = y'$ белгілеуімен эквивалентті бірінші ретті теңдеулер мен бастапқы шарттар мына түрде болады

$$F(x,y) = \begin{bmatrix} y_0' \\ y_1' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 \\ -0{,}1y_1 - x \end{bmatrix} \qquad y(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Бағдарламалық код дәріс материалында келтірілген.

Сандық шешімінің графигі



Қорытынды

1. Бірінші ретті дифференциалдық теңдеу
   сандық шешімі.

2. Эйлер әдісі.

3. Рунге-Куттаның екінші, төртінші ретті әдістері.

4. Есепті шығарудың сандық үлгісі.

Пайдаланылған әдебиеттер тізімі

1. Jaan Kiusalaas. Numerical methods in engineering with Python. Cambridge University Press. ISBN 978-1-107-03385
2. Вабищевич П.Н. Численные методы: Вычислительный практикум. — М.: Книжный дом «ЛИБРОКОМ», 2010. — 320 с.
3. Киреев В. И., Пантелеев А. В. Численные методы в примерах и задачах: Учебное пособие. — СПб.: Издательство «Лань», 2015. — 448 с.