Лекция 7. Непрерывность функции в точке. Точки разрыва функции и их классификация. Колебание функции на множестве и в точке. Свойства функций, непрерывных в точке. Свойства функций, непрерывных на множестве: Теорема (Больцано-Коши) о промежуточном значении, теорема (Вейерштрасса) о достижении точных границ непрерывной функцией. Непрерывность сложной функции. Непрерывность основных элементарных функций

Непрерывность функций

В этой лекции мы рассмотрим одно из самых важных свойств функций.

Непрерывность функции в точке

Определение 7.1. Пусть $x_0 \in D(f)$ - предельная точка области определения функции $f(x)$. Будем говорить, что функция $f(x)$ непрерывна в точке x_0, если $\lim\limits_{x \rightarrow x_0} f(x)=f\left(x_0\right)$.

Таким образом, функция $f(x)$ непрерывна в точке x_0, если

1. существует значение $f\left(x_0\right)$;
2. существует $\lim\limits_{x \rightarrow x_0} f(x)$;
3. предел функции в точке x_0 равен значению функции в этой точке: $\lim\limits_{x \rightarrow x_0} f(x)=f\left(x_0\right)$.

Используя определения предела, это определение можно перефразировать на языке окрестностей (или "$\varepsilon-\delta$ ") или на языке последовательностей:

1. функция $f(x)$ будет непрерывной в точке $x_0 \in D(f)$, если для любой окрестности $U_{\varepsilon}\left(f\left(x_0\right)\right)$ точки $f\left(x_0\right)$ можно найти окрестность $U_\delta\left(x_0\right)$ точки x_0 так, что из условия $x \in U_\delta\left(x_0\right) \cap D(f)$ следует $f(x) \in U_{\varepsilon}\left(f\left(x_0\right)\right)$.
2. функция $f(x)$ будет непрерьвной в точке $x_0 \in D(f)$, если для любой последовательности $\{x_n\}$ такой, что $x_n \in D(f)$ и $\lim\limits_{n \rightarrow \infty} x_n=x_0$, будет вьполнено $\lim\limits_{n \rightarrow \infty} f\left(x_n\right)=f\left(x_0\right)$. Если выполняется соотношение $\lim\limits_{x \rightarrow x_0+0} f(x)=f\left(x_0\right)$ или $\lim\limits_{x \rightarrow x_0-0} f(x)=f\left(x_0\right)$, то говорят о непрерывности в точке x_0, соответственно, справа или слева.

Сформулируем свойства непрерывных функций.

Свойство 1. Если функция непрерывна в точке x_0, то она ограничена в некоторой окрестности этой точки.

Свойство 2. Если для функций $f(x)$ и $g(x)$ в некоторой окрестности точки x_0 выполняется неравенство $f(x) \leq g(x)$ и обе эти функции непрерывны в точке x_0, то $f\left(x_0\right) \leq g\left(x_0\right)$.

Свойство 3. Если функция $f(x)$ непрерывна в точке x_0 и $f(x_0) > 0$, то существует окрестность этой точки такая, что для всех значений аргумента, взятых из этой окрестности, будет справедливо неравенство $f(x) > 0$. (Аналогично, если $f(x_0) < 0$, то для всех значений аргумента, взятых из некоторой окрестности точки x_0, выполнено $f(x) < 0$).
Свойство 4. Если функции $f(x)$ и $g(x)$ непрерывны в точке x_0, то в этой точке будут непрерывны
a) их сумма $f(x) + g(x)$;
b) их произведение $f(x) \cdot g(x)$;
c) если $g(x_0) \neq 0$, будет непрерывно их частное $\dfrac{f(x)}{g(x)}$.

Замечание. Это свойство легко распространяется на сумму и произведение любого фиксированного числа компонент.
Свойство 5. Для того чтобы функция $f(x)$ была непрерывной в точке $x_0 \in D(f)$ необходимо и достаточно, чтобы выполнялось равенство $f(x) = f(x_0) + \alpha(x)$, где $\alpha(x)$ - бесконечно малая в точке x_0 функция.

Свойства 1-5 очевидно следуют из свойств пределов функции.
Свойство 6. Если функция $\varphi(x)$ определена в некоторой окрестности точки x_0 и непрерывна в этой точке, а функция $f(t)$ определена в окрестности точки $t_0 = \varphi(x_0)$ и непрерывна в ней, то в некоторой окрестности точки x_0 определена сложная функция $f(\varphi(x))$, которая будет непрерывна в точке x_0.

- Возьмем $\varepsilon > 0$ и найдем $\sigma > 0$ такое, что $U_\sigma(t_0) \subset D(f)$ и если $t \in U_\sigma(t_0)$, то $f(t) \in U_\varepsilon(f(t_0))$. Для найденного числа σ можно указать число $\delta > 0$ такое, что если $x \in U_\delta(x_0)$, то $\varphi(x) \in U_\sigma(t_0)$.

Отсюда следует, что если $x \in U_\delta(x_0)$, то существует $f(\varphi(x))$ и $f(\varphi(x)) \in U_\varepsilon(f(t_0))$, а так как $f(t_0) = f(\varphi(x_0))$, это означает непрерывность функции $f(\varphi(x))$ в точке x_0.

Замечание. Если в свойстве 6 предположить непрерывность функции $f(t)$ и существование предела $\lim\limits_{x \to x_0} \varphi(x) = t_0$, при этом непрерывность $\varphi(x)$ не предполагать, то можно доказать, что $\lim\limits_{x \to x_0} f(\varphi(x)) = f\left(\lim\limits_{x \to x_0} \varphi(x)\right)$.

Точки разрыва

Определение 7.2. Если точка x_0 является предельной точкой области $D(f)$, но функция не является непрерывной в этой точке, то точка x_0 называется точкой разрыва функции $f(x)$.

Для исследования поведения функции вблизи точки разрыва полезно вспомнить, что предел функции в точке существует тогда и только тогда, когда существуют ее пределы справа и слева и они равны между собой. Поэтому определение 7.2 удобно сформулировать следующим образом:

Определение 7.1(a). Функция $f(x)$ непрерывна в точке x_0, если

1. Существует значение $f\left(x_0\right)$;
2. Существуют односторонние предельс $\lim\limits_{x \to x_0-0} f(x) \lim\limits_{x \to x_0+0} f(x)$;
3. Справедливо равенство $\lim\limits_{x \to x_0-0} f(x)=\lim\limits_{x \to x_0+0} f(x)=f\left(x_0\right)$.

Если нарушено хотя бы одно из условий 1) - 3), то точка x_0 будет точкой разрыва функции $f(x)$.

Классификация точек разрыва функции

а) Если односторонние предельь в точке x_0 существуют и равны между собой, но функция в этой точке не определена, или $f\left(x_0\right) \neq \lim\limits_{x \to x_0-0} f(x)=\lim\limits_{x \to x_0+0} f(x)$, то точка x_0 называется точкой устранимого разрыва.

Пример 1. $f(x)=\dfrac{4x^2-1}{2x-1}, x_0=\dfrac{1}{2}$.

Значение функции в точке $x_0=\dfrac{1}{2}$ не определено, но мы доказали в примере 1§2, что $\lim\limits_{x \to 1/2} \dfrac{4x^2-1}{2x-1}=2$. Значит $x_0=\dfrac{1}{2}$ - точка устранимого разрыва. Если ввести функцию $f_1(x)=\begin{cases} f(x), & x \neq \dfrac{1}{2}, \\ 2, & x=\dfrac{1}{2}, \end{cases}$ то эта функция будет непрерывной в точке $x_0=\dfrac{1}{2}$. ⊕

Пример 2. $f(x)=x \cdot \sin \dfrac{1}{x}, x_0=0$.

В точке $x_0=0$ функция не определена, но $\lim\limits_{x \to 0}\left(x \cdot \sin \dfrac{1}{x}\right)=0$, так как $\left|x \cdot \sin \dfrac{1}{x}\right| \leq |x|$.

Следовательно, функция $f_1=\begin{cases} x \sin \dfrac{1}{x}, & x \neq 0, \\ 0, & x=0 \end{cases}$ будет непрерывной.

б) Если существуют конечные односторонние предельи, но они не равны между собой, то точка x_0, называется точкой разрыва первого рода или точкой конечного разрыва.

Пример 3. $f(x)=\operatorname{sign} x, x_0=0$.

Как было доказано ранее, $\lim\limits_{x \to 0-0} \operatorname{sign} x=-1$ и $\lim\limits_{x \to 0+0} \operatorname{sign} x=1$. Следовательно, точка $x_0=0$ является точкой разрыва первого рода для функции $f(x)=\operatorname{sign} x$. Будем говорить, что в этой точке функция имеет скачок и величина скачка равна $f\left(x_0+0\right)-f\left(x_0-0\right)=2$.

в) Если в точке x_0 хотя бы один конечный односторонний предел не существует или существует и бесконечен, то эта точка называется точкой разрыва второго рода.

Пример 4. $f(x)=\sin \dfrac{1}{x}, x_0=0$.

Легко убедиться, что $\lim\limits_{x \to 0} \sin \dfrac{1}{x}$ не существует (Из доказательства ясно, что не существуют и односторонние пределы). Поэтому эта точка является точкой разрыва второго рода.

Пример 5. $f(x)=\dfrac{1}{x^2-1}, x_0=1$.

Легко заметить, что $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1}{x^2-1}=\infty$. Следовательно, точка $x_0=1$ является точкой разрыва второго рода. В этом случае также говорят, что это точка бесконечного разрыва.

Колебание функции на множестве и в точке

Пусть $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ ограничена для $E:E\subset\mathbb{R}$. Множество колебаний f на $E, x, y\in E$

$$\omega(f,E)=\sup|f(x)-f(y)|.$$

Утверждение. На множестве E

$$\omega(f,E)=\sup f-\inf f$$

□ Доказателъство. 1) $f(\alpha)-f(y)\le\sup f-\inf f\forall x,y\in E; f(y)-f(\alpha)\le\sup f-\inf f\forall x,y\in E$. Следовательно,

$$|f(x)-f(y)|\le\sup f-\inf f\quad\forall x,y\in E\Longrightarrow\omega(f,E)\le\sup f-\inf f$$

2) $\varepsilon>0$ Мы знаем, что $(\sup f-\varepsilon)$ – не верхняя грань $\Longrightarrow\exists x:$

$$\sup f-\varepsilon<f(x)$$

Кроме того, знаем, что $(\inf f+\varepsilon)$ – не точная нижняя грань $\Longrightarrow\exists y:\inf f+\varepsilon>f(y)$. Далее получаем, что

$$-\inf f-\varepsilon<-f(y)$$

Итого имеем:

$$1+2=\sup f+\inf f-2\varepsilon<f(x)-f(x)\le\omega(f,E)$$

Получили

$$\sup f+\inf f<2\varepsilon+\omega(f,E)\longrightarrow\omega(f,E)\text{ при }\varepsilon\longrightarrow 0.$$

■

Определение. Пусть $a\in\mathbb{R}$. Рассмотрим отображение

$$\sigma\mapsto\omega\left(f,U_\sigma(a)\right)$$

(амплитуда на $(a-\sigma;a+\sigma)$). Эта функция не убывает, $\omega\left(f,U_\sigma(a)\right)\ge 0$. Существует предел

$$\lim_{\sigma\to 0+}\omega\left(f,U_\sigma(a)\right)=\omega(f,a)$$

Называем предел $\omega(f,a)$ **колебанием в точке** a.

Утверждение. Функция f непрерывна в точке $a\Longrightarrow\omega(f,a)=0$.

□ Доказательство. $\Longrightarrow\forall\varepsilon>0\exists U_\sigma(a):\forall x\in U_\sigma(a)|f(\alpha)-f(a)|<\varepsilon\Longrightarrow\omega\left(f,U_\sigma(a)\right)\le 2\varepsilon$. Когда $\sigma\longrightarrow 0$ убывает, следовательно, $\omega(f,a)<\varepsilon\Longrightarrow\omega(f,a)=0$. $\Longleftarrow$ Равенство $\omega(f,a)=0$ означает, что $\lim_{\sigma\to 0+}\omega\left(f,U_\sigma(a)\right)=0$. Следовательно, $\forall\varepsilon>0\exists\sigma>0\omega\left(f,U_\sigma(a)\right)<\varepsilon\Longrightarrow$

$$|f(x)-f(a)|<\varepsilon\quad\forall x\in U_\sigma(a),$$

что и требовалось доказать. ■

Свойства функций, непрерывных в точке

Утверждение. Если f и н непрерывны в точке а на множестве D, mo $f+g$, $f \cdot g$, и, если $g \neq 0$ на D, то $\frac{f}{g}$ непрерывны в точке а по множеству D.

□ Доказательство. Пусть $x_n \longrightarrow a$, тогда по условию $f(x) \longrightarrow f(a), g(x) \longrightarrow g(a)$. По свойству пределов последовательности

$$f\left(x_n\right)+g\left(x_n\right) \longrightarrow f(a)+g(a)$$
$$f\left(x_n\right) g\left(x_n\right) \longrightarrow f(a) g(a)$$

Если $g=0$, то оно не равно нулю в точке a :

$$\frac{f\left(x_n\right)}{g\left(x_n\right)} \longrightarrow \frac{f(a)}{g(a)}.$$

■

Утверждение. Пусть $f: D \longrightarrow E$, $g: E \longrightarrow \mathbb{R}$, $a \in D$, f – непрерывная функиия в точке a на множестве D, g – непрерывная функиия в точке $f(a)$ на множестве E, тогда $g(f(x))$ непрерывна.

□ Доказательство. По условию $x_n \longrightarrow a \Longrightarrow f\left(x_n\right)$ (непрерывна) $\longrightarrow f(a), \Longrightarrow g\left(f\left(x_n\right)\right) \longrightarrow g(f(a))$. ■

Утверждение. 1) Если f непрерывна в точке а на множестве D, то существует $U(a)$ и $c>0$, что $|f(x)| \leq c \forall x \in U(a) \cap D$ 2) Если f непрерывна в точке а на множестве D и $f(a)>0$, то существует $U(a): \forall x \in U(a) \cap D$

$$f(x) \geq \frac{f(a)}{2}>0.$$

□ Доказателъство. 1) Пусть

$$\varepsilon=1, \exists \delta>0 \forall x \in D|x-a|<\delta \Longrightarrow|f(x)-f(a)|<\varepsilon$$
$$|f(x)| \leq|f(x)-f(a)|+|f(a)| \leq 1+f(a)=c, \quad x \in U_{\varepsilon}(a) \cap D$$

2) Пусть $\varepsilon=f(a) / 2, \exists \delta>0 \forall x \in U_\delta(a) \cap D$

$$|f(x)-f(a)|<\frac{f(a)}{2} \Longrightarrow f(x)>\frac{f(a)}{2}.$$

■

Критерий непрерывности функции

Возьмем точку $x_0 \in D(f)$, являющуюся предельной точкой области определения $D(f)$ и число Δx, которое будем называть приращением аргумента, такое, чтобы $x=x_0+\Delta x \in D(f)$.

Составим разность $\Delta f\left(x_0\right)=f\left(x_0+\Delta x\right)-f\left(x_0\right)$, которую будем называть приращением функции в точке x_0, соответствующим приращению аргумента Δx.

Теорема 7.1 (Критерий непрерывности функции в точке)

Функция $f(x)$ будет непрерывной в точке x_0 тогда и только тогда, когда ее приращение в этой точке будет стремиться к нулю, если приращение аргумента стремится к нулю.

- Пусть функция $f(x)$ непрерывна в точке x_0. Тогда в некоторой окрестности точки x_0 будет справедливо равенство $f(x) = f(x_0) + \alpha_1(x)$, где $\alpha_1(x)$ - бесконечно малая в точке x_0 функция. Обозначим $\Delta x = x - x_0$ и $\alpha(\Delta x) = \alpha_1(x)$. Следовательно,

$$f(x_0 + \Delta x) = f(x_0) + \alpha(\Delta x)$$

откуда $\Delta f(x_0) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) == \alpha(\Delta x)$ - бесконечно малая функция при Δx, стремящемся к нулю.

Докажем обратное утверждение. Пусть $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \Delta f(x_0) = 0$. По критерию существования предела в точке получим $\Delta f(x_0) = \alpha(\Delta x)$, следовательно, $f(x_0 + \Delta x) = f(x_0) + \alpha(\Delta x)$. Если положить $x_0 + \Delta x = x$ и $\alpha(\Delta x) = \alpha_1(x)$, то последнее равенство примет вид $f(x) = f(x_0) + \alpha_1(x)$, где функция $\alpha_1(x)$ - бесконечно малая при x, стремящемся к x_0, а это означает, что $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$, т.е. функция непрерывна в точке x_0. ■

Пример 6. Функция $f(x) = c$ - непрерывна в каждой точке вещественной оси. Для доказательства достаточно составить приращение функции в произвольной точке: $\Delta f(x) = c - c = 0$. Функция, тождественно равная нулю - бесконечно малая, следовательно, $f(x) = c$ - непрерывна.

Пример 7. Функция $f(x) = x$ непрерывна в каждой точке.
Составим приращение функции $\Delta f(x) = (x + \Delta x) - x = \Delta x$. Если $\Delta x \to 0$, то $\Delta f(x) \to 0$.

Пример 8. Функция $f(x) = x^n, n \in \mathbb{N}$ непрерывна в каждой точке вещественной оси. Это следует из предыдущего примера и теоремы о непрерывности произведения непрерывных функций.

Свойства функций, непрерывных на множестве

Определение 7.3. Будем говорить, что функция $f(x)$ непрерывна на множестве $G \subset D(f)$, если она непрерывна в каждой точке этого множества.

При этом если $G = [a, b]$ - отрезок, то функция должна быть непрерывна справа в точке a и непрерывна слева в точке b.

Теорема 7.3. Если функция $f(x)$ непрерывна на множестве G, и множество G компактно, то множество $f(G)$ - компактно.

Докажем, что множество $f(G)$ - замкнуто, т.е. содержит все свои предельные точки. Пусть y_0 - предельная точка множества $f(G)$. Тогда существует последовательность различных точек $\{y_n\}$ таких что $\forall n \in \mathbb{N} \quad y_n \in f(G)$, $y_n \neq y_0$ и $\lim\limits_{n \to \infty} y_n = y_0$. Рассмотрим прообраз этой последовательности $f^{-1}(\{y_n\})$, который состоит из бесконечного множества точек $x_n \in G$. По теореме о компактном множестве в $\mathbb{R}^1$ можно выделить подпоследовательность $\{x_{n_k}\}$, сходящуюся к некоторой точке $x_0 \in G$ (так как G - замкнуто). Тогда, с одной стороны $\lim\limits_{k\to\infty} f\left(x_{n_k}\right) = f\left(x_0\right)$, так как функция $f(x)$ непрерывна, с другой стороны $\lim\limits_{k\to\infty} f\left(x_{n_k}\right) = \lim\limits_{k\to\infty} y_{n_k} = y_0$, так как $\{y_{n_k}\}$ - подпоследовательность сходящейся к y_0 последовательности. Следовательно, $y_0 = f\left(x_0\right)$, т.е. $y_0 \in f(G)$.

Теперь докажем ограниченность множества $f(G)$. Так как функция $f(x)$ непрерывна в каждой точке множества G, то для каждой точки можно найти окрестность, в пределах которой функция будет ограничена. Рассмотрим систему этих окрестностей $\{U(x), x \in G\}$. Очевидно, она образует открытое покрытие множества G и в силу его компактности из нее можно выбрать конечный набор окрестностей, который также будет являться покрытием множества G. Пусть это будет система $U\left(x_1\right), U\left(x_2\right), \ldots U\left(x_m\right)$, причем для $x \in U\left(x_i\right), i = 1, 2, \ldots m$ выполняется неравенство $m_i \leq f(x) \leq M_i$. Обозначим че рез $M = \max_{1\leq i\leq m} M_i$ и $m = \min_{1\leq i\leq m} m_i$. Тогда на всем множестве G будет выполняться неравенство $m \leq f(x) \leq M$. ■

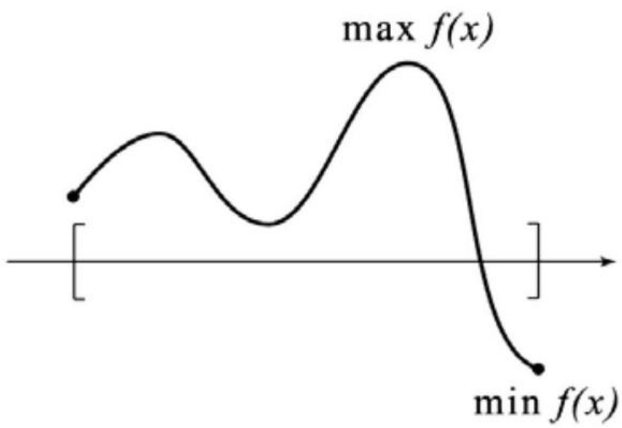
Следствиями из этой теоремы являются две теоремы Вейерштрасса:

Теорема 7.4 (Первая теорема Вейерштрасса)

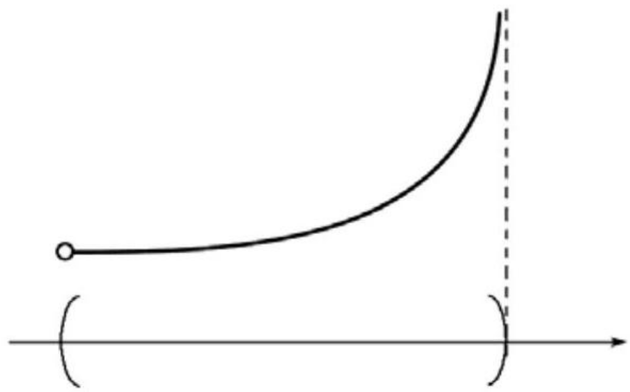
Функция, непрерывная на отрезке ограничена.

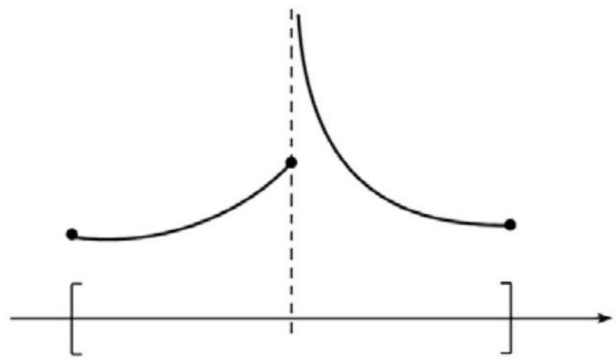
Теорема 7.5 (Вторая теорема Вейерштрасса)

Если функция непрерывна на отрезке, то на этом отрезке она достигает своих наибольшего и наименьшего значений.



Первая из этих теорем очевидна, а вторая следует из замкнутости множества $f(G)$.
Замечание. Если условия теоремы 7.3 не выполнены, то функция может быть неограниченной. Некоторые случаи изображены на рисунках:





Теорема 7.6 (Первая теорема Больцано-Коши о промежуточном значении непрерывной на отрезке функции) Пусть функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$ и на кониах этого отрезка принимает значения разных знаков. Тогда внутри отрезка найдется, по крайней мере, одна точка, в которой $f(x) = 0$.

- Предположим, что такой точки не существует. Тогда для любого $x \in [a, b] f(x) \neq 0$ и, следовательно, у каждой точки промежутка найдется окрестность, в пределах которой функция будет сохранять знак. Эти окрестности образуют открытое покрытие промежутка $[a, b]$ и в силу компактности этого промежутка из него можно выделить конечное покрытие, т.е. конечный набор окрестностей $U(x_1), U(x_2), \ldots U(x_m), x_1 \leq x_2 \leq \ldots \leq x_m$, объединение которых содержит данный отрезок, и в каждой из которых все значения функции имеют один и тот же знак.

Тогда допустив, что $f(a) > 0$, получим, что $f(x) > 0$ в $U(x_1)$, а так как окрестности $U(x_1)$ и $U(x_2)$ пересекаются, то $f(x) > 0$ и в $U(x_2)$. Таким образом, за конечное число шагов мы можем дойти до последней окрестности
$U(x_m)$, которая содержит точку b, но в которой $f(x) > 0$, что противоречит тому, что в точке b должно быть $f(b) < 0$.

Следствие 1 (Вторая теорема Больцано-Коши о промежуточном значении непрерывной на отрезке функции) Пусть функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$ и $A = \max\limits_{x\in[a,b]} f(x)$, $B = \min\limits_{x\in[a,b]} f(x)$. Тогда для любого значения C такого, что $A < C < B$ на промежутке $[a, b]$ найдется по крайней мере одна точка x_0, в которой $f(x_0) = C$.

- Для доказательства достаточно взять функцию $(f(x) - C)$ и применить к ней первую теорему Коши о промежуточном значении.

■

Замечание. Данные теоремы часто применяются для доказательства существования на заданном промежутке корней уравнений вида $f(x) = 0$ или $f(x) = C$.

Пример 9. Рассмотрим уравнение $x^3 - 3x + 1 = 0$.
Обозначим $x^3 - 3x + 1 = f(x)$. Так как $f(0) = 1 > 0$, а $f(1) = -1 < 0$, то можно утверждать, что на промежутке $[0, 1]$ лежит по крайней мере один корень данного уравнения.

Следствие 2. Если функция непрерывна на отрезке $[a, b]$, то $f([a, b])$ - отрезок.

Это следует из второй теоремы Вейерштрасса и второй теоремы Коши.

Следствие 3 (Теорема об обратной функции) Пусть функция $f(x)$ задана, строго возрастает и непрерывна на отрезке $[a, b]$, причем $f(a) = c$ и $f(b) = d$. Тогда существует функция $f^{-1}(y)$, обратная к функции $f(x)$, заданная и непрерывная на промежутке $[c, d]$, которая также строго возрастает.

- Так как $f(x)$ возрастает, то $\min_{[a,b]} f(x) = c = f(a) < f(b) = d = \max_{[a,b]} f(x)$. Таким образом, по теореме Коши о промежуточном значении непрерывной функции, областью значений данной функции будет промежуток $[c, d]$, т.е. для каждого $y \in [c, d]$ уравнение $f(x) = y$ имеет хотя бы одно решение. Чтобы доказать существование обратной функции, нужно доказать, что это решение единственно.

- Допустим, что это уравнение имеет два решения x_1 и x_2, причем $x_1 < x_2$. В силу строгого возрастания функции получим неравенство $f(x_1) < f(x_2)$, которое противоречит тому, что $f(x_1) = f(x_2) = y$. Следовательно, наше предположение неверно, уравнение $f(x) = y$ имеет ровно одно решение, и на промежутке $[c, d]$ существует функция $x = f^{-1}(y)$, обратная к данной.

- Докажем, что функция $f^{-1}(y)$ строго возрастает. Допустим противное, т.е. допустим, что существуют значения $y_1, y_2 \in [c, d]$ такие, что $y_1 < y_2$, но

  $$x_1 = f^{-1}(y_1) \geq f^{-1}(y_2) = x_2.$$

  Тогда, используя монотонность функции $f(x)$, получим неравенство

  $$f(x_1) = y_1 \geq y_2 = f(x_2)$$

  которое противоречит неравенству $y_1 < y_2$. Следовательно, предположение неверно и обратная функция строго возрастает.

- Докажем непрерывность обратной функции. Сначала напомним, что областью значений обратной функции будет промежуток $[a, b]$. Так как обратная функция монотонна, то в любой точке $y_0 \in [c, d]$ будет выполняться неравенство $f^{-1}(y_0 - 0) \leq f^{-1}(y_0) \leq f^{-1}(y_0 + 0)$, и для доказательства непрерывности функции в точке y_0 нужно доказать, что последнее неравенство является равенством. Допустим противное.

Например, допустим, что $f^{-1}(y_0-0)<f^{-1}(y_0)$. Тогда никакое число из промежутка $\left(f^{-1}(y_0-0)\,;f^{-1}(y_0)\right)\subset(a,b)$ не будет являться значением функции, что противоречит тому, что любое число из промежутка $[a,b]$ является значением обратной функции.

- Теорема полностью доказана. ■

Замечания

1. Теорема будет верна и в случае, когда функция $f(x)$ строго убывает. Тогда $f^{-1}(y)$ тоже будет строго убывающей.

2. Аналогично формулируется и доказывается теорема о существовании функции, обратной к монотонной и непрерывной функции, заданной на интервале (конечном или бесконечном).

Пример 10. Рассмотрим функцию $f(x)=x^n$.
Если n нечетно, то эта функция возрастает и непрерывна на всей вещественной оси, причем ее область значений - $\mathbb{R}$. Следовательно, обратная к ней функция $\sqrt[n]{y}$ существует на $\mathbb{R}$, непрерывна и монотонно возрастает.

Если n четно, то функция x^n будет возрастающей на промежутке $[0,+\infty)$ и убывающей на промежутке $(-\infty,0]$, причем ее область значений будет $[0,+\infty)$. Существуют две обратные функции

$$f_+^{-1}(y)=\sqrt[n]{y},\quad D\left(f_+^{-1}\right)=[0,+\infty),\quad E\left(f_+^{-1}\right)=[0,+\infty)$$

и

$$f_-^{-1}(y)=-\sqrt[n]{y},\quad D\left(f_-^{-1}\right)=[0,+\infty),\quad E\left(f_-^{-1}\right)=(-\infty,0].$$

Обе эти функции непрерывны, но первая возрастает, а вторая убывает.

Непрерывность сложной функции

Пусть аргумент t функции $y=f(t)$ является не независимой переменной, а функцией некоторой переменной $x: t=\varphi(x)$. Тогда говорят, что переменная y является сложной функцией переменной x (или суперпозицией функций f и φ) и пишут $y=f(\varphi(x))$.
Пример. $y=\sin\left(x^2\right)-$ сложная функция: $y=\sin t$, где $t=x^2$.
Теорема. Пусть функция $t=\varphi(x)$ непрерывна в точке $x=a$, $\varphi(a)=b$, а функция $y=f(t)$ непрерывна в точке b. Тогда сложная функция $y=f(\varphi(x))$ непрерывна в точке $x=a$.

□ Доказательство. Нужно доказать, что

$$\lim_{x\to a}f(\varphi(x))=f(\varphi(a))$$

т.е. $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0$, такое, что

$$|f(\varphi(x)) - f(\varphi(a))| < \varepsilon \text{ при } |x - a| < \delta.$$

Зададим произвольное $\varepsilon > 0$. Так как функция $f(t)$ непрерывна в точке b, то $\exists \gamma > 0$, такое, что $|f(t) - f(b)| < \varepsilon$ при $|t - b| < \gamma$, откуда следует, что

$$|f(\varphi(x)) - f(\varphi(a))| < \varepsilon \quad \text{при} \quad |\varphi(x) - \varphi(a)| < \gamma. \tag{7.1}$$

В свою очередь, в силу непрерывности функции $\varphi(x)$ в точке a для указанного γ существует $\delta > 0$, такое, что

$$|\varphi(x) - \varphi(a)| < \gamma \quad \text{при} \quad |x - a| < \delta. \tag{7.2}$$

Из (7.1) и (7.2) следует, что если

$$|x - a| < \delta, \text{ то } |f(\varphi(x)) - f(\varphi(a))| < \varepsilon,$$

что и требовалось доказать. ■

Непрерывность основных элементарных функций

Докажем непрерывность некоторых основных элементарных функций.

1) $\boldsymbol{y} = \sin \boldsymbol{x}$ (определение этой функции было дано в школьном курсе математики). Ранее было доказано, что

$$\lim_{x \to 0} \sin x = \sin 0 = 0,$$

откуда следует непрерывность $\sin x$ в точке $x = 0$.
Докажем непрерывность функции $y = \sin x$ в произвольной точке $x = a \in \mathbb{R}$.

Нужно доказать, что $\sin x \to \sin a$ при $x \to a$, или, что то же самое, $\sin x - \sin a \to 0$ при $x \to a$. Имеем:

$$\sin x - \sin a = 2 \sin \frac{x - a}{2} \cos \frac{x + a}{2} \to 0 \text{ при } x \to a,$$

поскольку первый сомножитель представляет собой бесконечно малую функцию при $x \to a$, а второй – ограниченную функцию.

Рассмотрим функцию $y = \sin x$ на отрезке $[-\pi/2, \pi/2]$. Она непрерывна и возрастает на этом отрезке (возрастание следует из формулы

$$\sin x_2 - \sin x_1 = 2 \sin \frac{x_2 - x_1}{2} \cos \frac{x_2 + x_1}{2}\Bigg)$$

Множеством значений функции является сегмент

$$Y = \left[\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right), \sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right] = [-1, 1]$$

на сегменте Y существует обратная функция (она обозначается $\boldsymbol{x} = \arcsin y$) и эта функция возрастает и непрерывна на сегменте $[-1,1]$.

2) Вопрос о непрерывности функции $\boldsymbol{y} = \mathbf{cos}\boldsymbol{x}$ и обратной по отношению к ней функции $\boldsymbol{x} = \arccos \boldsymbol{y}$ рассмотрите самостоятельно.

3) $\boldsymbol{y} = \operatorname{tg} \boldsymbol{x}$. Поскольку $\operatorname{tg} x = \sin x / \cos x$ (где $x \neq \pi/2 + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$), то данная функция непрерывна во всех точках ее области определения как частное двух непрерывных функций.

Рассмотрим функцию $y = \operatorname{tg} x$ на отрезке $[-\pi/2 + \delta, \pi/2 - \delta]$, где $\delta > 0$ - произвольно малое число. Возрастание функции $\operatorname{tg} x$ на этом отрезке вытекает из формулы

$$\operatorname{tg} x_2 - \operatorname{tg} x_1 = \frac{\sin (x_2 - x_1)}{\cos x_1 \cdot \cos x_2}$$

Множеством значений данной функции является сегмент $Y = [\operatorname{tg}(-\pi/2+\delta), \operatorname{tg}(\pi/2-\delta)]$, на сегменте Y существует обратная функция (она обозначается $\boldsymbol{x} = \operatorname{arctg} \boldsymbol{y}$), возрастающая и непрерывная.

Поскольку

$$\operatorname{tg}(-\pi/2 + \delta) \to -\infty \text{ и } \operatorname{tg}(\pi/2 - \delta) \to +\infty \text{ при } \delta \to +0,$$

то $\forall y \in \mathbb{R} \exists \delta > 0$, такое, что

$$y \in [\operatorname{tg}(-\pi/2 + \delta), \operatorname{tg}(\pi/2 - \delta)]$$

Поэтому функция $x = \operatorname{arctg} y$ определена, возрастает и непрерывна на всей числовой прямой ($-\infty, +\infty$).

4) Вопрос о непрерывности функции $\boldsymbol{y} = \mathbf{ctg}\, \boldsymbol{x}$ и обратной по отношению к ней функции $\boldsymbol{x} = \mathbf{arcctg}\, \boldsymbol{y}$ рассмотрите самостоятельно.

5) Степенная функция $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{x}^{\boldsymbol{n}}$, где n - натуральное число. Она непрерывна в каждой точке как произведение n непрерывных функций, равных x.

Рассмотрим данную функцию на сегменте $[0, a]$, где $a > 0-$ произвольное фиксированное число. Эта функция непрерывна и возрастает на этом сегменте. По теореме 5 множеством ее значений является сегмент $Y = [0, a^n]$, на сегменте Y существует обратная функция (она обозначается $\boldsymbol{x} = \sqrt[n]{\boldsymbol{y}}$ или $x = y^{1/n}$), возрастающая и непрерывная.

Поскольку $\forall y > 0$ $\exists a$ такое, что $y \in [0, a^n]$, то функция $x = \sqrt[n]{y}$ определена, возрастает и непрерывна на полупрямой $[0, +\infty)$.

Итак, $\forall x \geqslant 0$ определена дробная степень $x^{1/n}$. Далее, по определению положим $x^{m/n} = \left(x^{1/n}\right)^m$, где $m-$ любое целое число.

6) Показательная функция $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{a}^{\boldsymbol{x}} (a > 0, a \neq 1)$. Для рациональных $x = m/n$ показательная функция определена выше в п. 5). Из школьного курса алгебры известно, что для

рациональных показателей степени $r = m/n$ функция a^r обладает следующими свойствами:
а) если $r_1 > r_2$, то $a^{r_1} > a^{r_2}$ при $a > 1$ и $a^{r_1} < a^{r_2}$ при $0 < a < 1$;
б) $a^{r_1} \cdot a^{r_2} = a^{r_1+r_2}$;
в) $(a^{r_1})^{r_2} = a^{r_1 r_2}$;
г) $a^0 = 1$ (по определению);
д) $a^{-r} = 1/a^r$ (по определению);
е) $a^r b^r = (ab)^r$;
ж) $\forall r : a^r > 0$.

Определим теперь a^x для любого вещественного числа x.

Пусть $a > 1, x$ - произвольное вещественное число. Рассмотрим множество $\{a^r\}$, где r - любое рациональное число, не превосходящее x. Это множество ограничено сверху, например, числом $a^{\bar{r}}$, где $\bar{r}$ - любое рациональное число, большее x. Следовательно, существует $\sup\{a^r\}$. Положим по определению

$$a^x = \sup_{\substack{r\in\mathbb{Q}\\ r\leqslant x}}\{a^r\}$$

Можно определить a^x иначе:

$$a^x = \inf_{\substack{R\in\mathbb{Q}\\ R\geqslant x}}\{a^R\}$$

Задание. Докажите, что оба определения дают один и тот же результат.

Если $0 < a < 1$, то $1/a > 1$, и для любого x положим $a^x = (1/a)^{-x}$.

Итак, функция a^x определена для любого x. Можно доказать, что a^x обладает свойствами а)-ж) для любых вещественных чисел x, в частности, функция a^x строго монотонна.

Докажем непрерывность функции a^x в произвольной точке c.

Пусть $a > 1$. Докажем сначала непрерывность функции a^x в точке c слева. Для этого нужно доказать, что $\forall\varepsilon > 0$ существует левая полуокрестность точки c, в которой $a^c - a^x < \varepsilon$. По определению

$$a^c = \sup_{\substack{r\in\mathbb{Q}\\ r\leqslant c}}\{a^r\}$$

Возьмем произвольное $\varepsilon > 0$ и рассмотрим число $a^c - \varepsilon$. Так как оно меньше a^c, то согласно определению точной верхней грани $\exists\widetilde{r} < c$, такое, что $a^{\widetilde{r}} > a^c - \varepsilon$. В силу возрастания a^x справедливо неравенство $a^x > a^{\widetilde{r}}$ при $\widetilde{r} < x \leqslant c$. Поэтому $a^x > a^c - \varepsilon$ при $\widetilde{r} < x \leqslant c$, или, что то же самое, $a^c - a^x < \varepsilon$ при $\widetilde{r} < x \leqslant c$, что и доказывает непрерывность функции a^x в точке c слева.

Аналогично доказывается непрерывность функции a^x в точке с справа. Из непрерывности слева и справа следует непрерывность функции a^x в точке c.

Рассмотрим теперь функцию $y = a^x$ на произвольном сегменте $[b, c]$. По теореме 5 множеством ее значений является сегмент $Y = \left[a^b, a^c\right]$, на сегменте Y существует обратная функция (она обозначается $\boldsymbol{x} = \log_a \boldsymbol{y}$), строго монотонная и непрерывная.

Поскольку $\forall y > 0 \exists b$ и c, такие, что $y \in \left[a^b, a^c\right]$, то функция $x = \log_a y$ определена, строго монотонна и непрерывна на полупрямой $(0, +\infty)$.

Если $a = e$, то $\log_e y := \ln y$ называется натуральным логарифмом, а функция e^x называется экспонентой.

7) Степенная функция с произвольным вещественным показателем: $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{x}^{\boldsymbol{\alpha}}$, где $\boldsymbol{x} > \mathbf{0}$, $\boldsymbol{\alpha} \in \mathbb{R}$. Поскольку $x^\alpha = e^{\alpha \ln x}$, то данная функция непрерывна как суперпозиция непрерывных функций $y = e^t$ и $t = \alpha \ln x$.

Рассмотренные функции 1)-7) называются основными элементарными функциями. Любая функция, которая получается из основных элементарных функций с помощью конечного числа арифметических операций и суперпозиций, называется просто элементарной функцией, а множество всех элементарных функций называется классом элементарных функций. Из непрерывности основных элементарных функций следует, что любая элементарная функция непрерывна в каждой точке, в окрестности которой она определена.