Дәріс 5. Голоморфты функцияны әртүрлі интерпретациясы

1 Голоморфты функцияның туындысының модулі мен аргументтінің геометриялық интерпретациясы

Алдымен мына сұрақты қарастырайық: «Голоморфты функцияның өсішесі голоморфтылық қасиеті жоқ функцияның өсішесінен айырмашылығы қандай?» Егер голоморфтылықты есептемесек,өсімще үшін мына теңдікті аламыз.

$$\Delta f = \Delta u + i\Delta v = \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_0 \Delta x + \left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_0 \Delta y + i\left(\left.\frac{\partial v}{\partial x}\right|_0 \Delta x + \left.\frac{\partial v}{\partial y}\right|_0 \Delta y\right) + \bar{\bar{o}}\left(\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}\right)$$

Мұндағы $\Delta z = \Delta x + i\Delta y, \bar{\Delta} z = \Delta x - i\Delta y$, онда $\Delta x = \dfrac{\Delta z + \bar{\Delta} z}{2}, \Delta y = \dfrac{\Delta z - \bar{\Delta} z}{2i}$. бұдан

$$\Delta f = A\Delta z + B\bar{\Delta} z + \bar{\bar{o}}(|\Delta z|),$$

Мұндағы

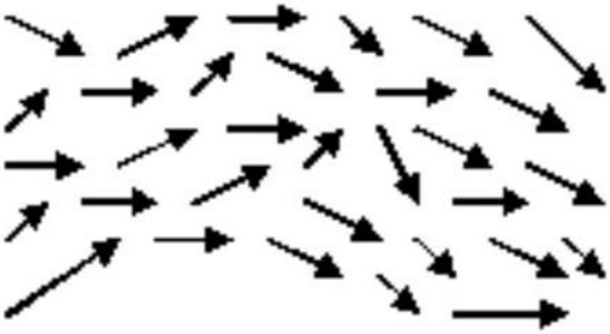
$$2A = \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_0 + \left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_0 + i\left.\frac{\partial v}{\partial x}\right|_0 + \left.\frac{\partial v}{\partial y}\right|_0, 2B = \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_0 + i\left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_0 + i\left.\frac{\partial v}{\partial x}\right|_0 - \left.\frac{\partial v}{\partial y}\right|_0.$$

Голоморфтылық жағдайда Коши-Риман қатынасынан функцияның өсімщесі мына түрде болады $\Delta f = A\Delta z + \bar{\bar{o}}(|\Delta z|)$. Осыдан

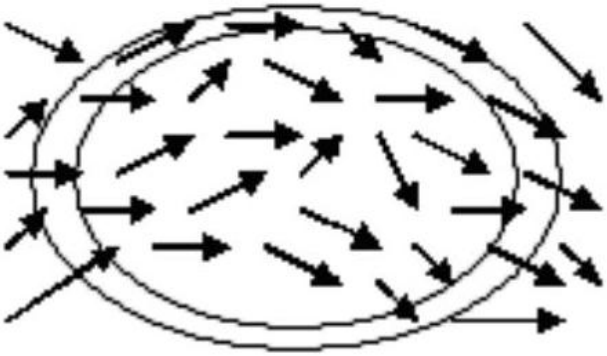
- Голоморфты функцияның өсімшесі z өсімшесіне «дерлік» пропорционал.
- Функцияның өсімшесі – $z, \bar{z}$ функцияның өсімшелерінің «дерлік» сызықты комбинациясы. Мұндағы $\bar{\bar{o}}(\sqrt{|\Delta z|})$ «дерлік» дейінгі дәлдікті білдіреді. $A = f'(z_0)$ болғандықтан, $\Delta f \approx f'(z_0)\,\Delta z$ тең болады. Соңғы жуықтауының екі модулъ койып,одан кейін комплекс санның аргументтін қойып аламыз:
- $|\Delta f| \approx |f'(z_0)|\,|\Delta z| = k|\Delta z|$ геометриялық магынада k рет, егер $k > 1$ локалдық созылу, егер $k < 1$ болганда сывылу болады.Туындының модулі сывылу немесе созылу коэффиценттін білдіреді.
- $\arg f'(z_0)$ бұрышын локалдық сағат тілінің бағытына қарсы бұрудың геометриялық мағынасы $\arg \Delta f \approx \arg f'(z_0) + \arg \Delta z$ явни z_0 нүктесінде басталатын әртурлі Δz векторлары бірдей бұрышқа бұрылады. Сонымен, $\arg f'(z_0)$ сәйкесінше Δf бағытын алу үшін Δz-ті қандай бұрышқа бұру керектігін көрсетеді.

2 Голоморфты функцияның гидродинамикалык интерпретациясы

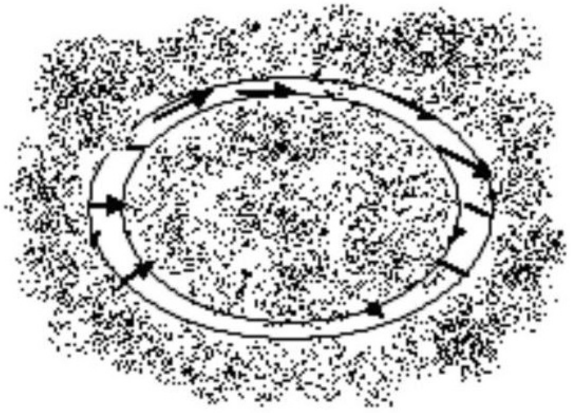
Сұйықтықтың орныққан жазық параллелъ ағынын қарастырайық. Әрбір нүктедегі сұйықтық ағысы оның жылдамдығымен сипатталатынын атап өтейік. Бұдан сұйықтық ағынының жылдамдықтар өрісі пайда болады. Егер жеткілікті ұзақ уақыт өткетде ағыстың пайда болу себебі ұмтылса,ондай ағыс орныққан деп саналады. Жазықпаралель әрбір ағыс жазық(горозонталь делік) қимада жылдамдықтар өрісі бірдей болуы және сұйықтықтың жазықтықтан көршілес жазықтыққа ағып кетпеуімен сипатталады.Басқаша айтқанда ағыс тереңдікке тәуелсіз. Сондықтан ағысыты бір горизонталь комплекс айнымалы $z = x + iy$. Жазықтығы ретінде қабылдаған қимада қарастырғанымыз жеткілікті.Бұл жағдайда жылдамдықтар өрісі жазық болады және екі компоненті векторлық өріспен сипатталады. Жылдамдықтар өрісі кез келген тұйық контор бойынша циркуляциясы нөлге тең болатындай қасиетке ие болсын (1, 2, 3 суреттері).



Сурет 1: Сұйықтықтағы жылдамдықтар өрісі



Сурет 2: Сұйықтықтағы түтік



Сурет 3: Құбырдағы сұйықтықты құбырдан басқа бөліктерін бірден суытқандағы көрініс

Егер құбырдағы сұйықтықты құбырдан басқа бөліктерін бірден суытса, онда құбырда айналым пайда болады. Векторлық өрістің тұйық қисық бойындағы айналымы орташа жанама жылдамдықпен қисықтың ұзындығының көбейтіндісіне тең.Векторлық өрістің тұйық қисық бойындағы айналымды Грин формуласы арқылы,сонымен қатар тұйық қисық бойынша қос интегралды табуға болатыны математикалық анализден физикалық түсіндірмелерсіз көрсетілеген.

$$\int_\gamma V_1 dx + V_2 dy = \iint_{\text{in } \gamma} \left(\frac{\partial V_2}{\partial x} - \frac{\partial V_1}{\partial y} \right) dxdy.$$

Ұйғарымымыз бойынша кез келген тұйық қисықтың өрісі 0-ге тең. Көрсетілген Грин формулысы бойынша келесі қатынасты аламыз.

$$\frac{\partial V_1}{\partial y} = \frac{\partial V_2}{\partial x}$$

Тұйық қисықтан алынған инртеграл 0-ге тең болғандықтан, екі нүктені қосатын қисық бойынмен алынған интеграл қисықтың шет нүктесінің функциясы болып табылады.

$$\int_{\gamma \cup \beta^-} V_1 dx + V_2 dy = 0 \Rightarrow \int_\gamma V_1 dx + V_2 dy = \int_\beta V_1 dx + V_2 dy$$

Мұндағы
γ, β - бірдей нүктелерді қосатын қисықтар,
β^--ориентациясының өзгерісін білдіреді.

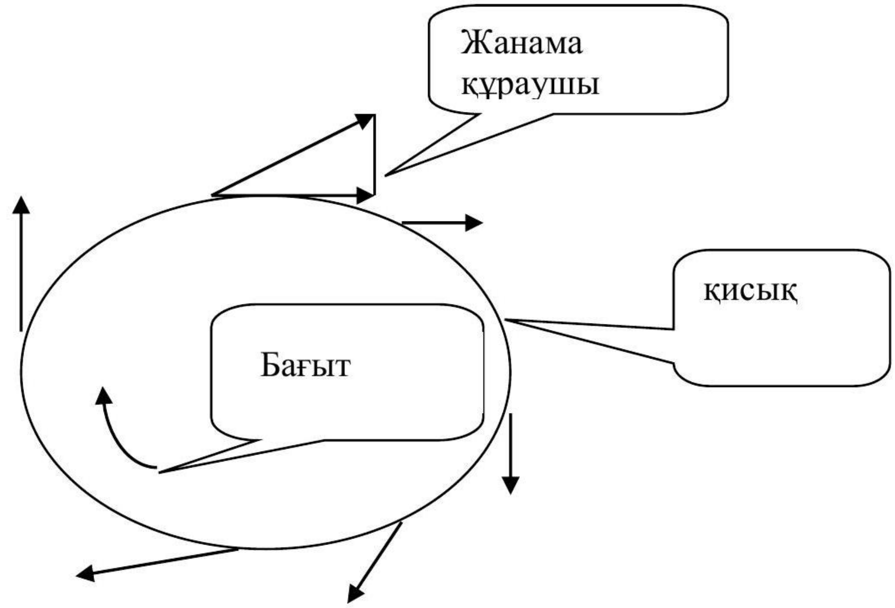
Интеграл тек қана интегралдық қисықтың шектік нүктелері ғана тәуелді болғандықтан,функцияны мына формула бойынша көрсетуге болады:

$$\Phi(x,y) = \int_{(x_0,y_0)}^{(x,y)} V_1 dx + V_2 dy,$$

сонымен қатар

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} = V_1(x,y), \frac{\partial \Phi}{\partial y} = V_2(x,y)$$

қатынасы орындалады, яғни $\text{grad}(\Phi) = \vec{V}$. Сондықтан, сұйықтағы жылдамдық өрісі Φ скаляр өрісі арқылы пайда болады деп айтады. Φ функциясы деп $\vec{V}$ өрісінің потенциалын атайды. Сонымен, үйірсіз өрісінің потенциалы болады. Сұйықтың ағыты туралы тағы бір ұйғарым жасайық.



Сурет 4: Векторлық ауданның айналымы

Әрбір тұйық қисық арқылы өтетін сұйық ағыны нөлге тең болсын, яғни тұйық қисыққа кіретін сұйықтың мәні одан шығатын сұйықтың мәніне тең.Демек,сұйықтың көзі және ағыны жоқ. Жоғарғы туынды үшін ағын орташа компанент мәнінде жылдамдығы (сырттан есептелетін) жоғарғы аудан көбейтіндісіне тең.Математикалық талдау курысында физикалық болмысын түсіндірмей ағын үшін жоғарғы интеграл түрінде формула қортып шығарылды. Гаусс формуласы бойынша ағынды үш еселі интеграл арқылы есептеуге болады.

$$\iint_S V_1 dy \wedge dz + V_2 dz \wedge dx + V_3 dx \wedge dy = \iiint_{\text{int } S} \left(\frac{\partial V_1}{\partial x} + \frac{\partial V_2}{\partial y} + \frac{\partial V_3}{\partial z} \right) dxdydz.$$

Біздің жағдайда жазық ағын $V_3 = 0$, сондықтан алдымыздағы формула мына түрде жазуға болады

$$\int_\gamma V_1 dy - V_2 dx = \iint_{\int\gamma} \left(\frac{\partial V_1}{\partial x} + \frac{\partial V_2}{\partial y} \right) dxdy.$$

Ұйғарым бойынша векторлық ағын тұйық қисық туынды арқылы нөлге тең (көзі және ағыны жоқ) сондықтан қатынас орындалады

$$\frac{\partial V_1}{\partial x} = -\frac{\partial V_2}{\partial y}.$$

Ф потенциалын пайымдағанымыздай скалярлық функцияны

$$\Psi(x, y) = \int_{(x_0,y_0)}^{(x,y)} -V_2 dx + V_1 dy$$

енгізуімізге болады.

$$\frac{\partial \Psi}{\partial x} = -V_2(x, y), \frac{\partial \Psi}{\partial y} = V_1(x, y)$$

қатынастын дұрыстығына көзіміз жеткен еді.

Ф функциясын сұйық бөліктерінің траекториясының тоқ функциясы деп атайды. Сонымен көзі мен ағыны жоқ жылдамдық аудандарында тоқ функциясы болады. Жазықтықтары паралель толқынсыз,үйірі және ағыны жоқ сұйық ағыны.

- Ф потенциалы,

  $$\frac{\partial \Phi}{\partial x} = V_1(x, y), \quad \frac{\partial \Phi}{\partial y} = V_2(x, y)$$

  болатындай;

- Ток функциясы

  $$\Psi, \frac{\partial \Psi}{\partial x} = -V_2(x, y), \quad \frac{\partial \Psi}{\partial y} = V_1(x, y)$$

  болатындай

Енді ауданның комплексті потенциалы деп аталады, $f = \Phi + i\Psi$, комплексті функциясын тұрғызайық.Комплекс потенциалы үшін Коши-Риманың

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} = \frac{\partial \Psi}{\partial y}, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial y} = -\frac{\partial \Psi}{\partial x}$$

қатынасы орынды.

Осыдан $f = \Phi + i\Psi$ комплекс потенциал голоморфты функция болады. Кері тұжырым да дұрыс. Функцияның голоморфтығы функцияның толқынсыз, қайнар көзсіз және ағыны жоқ жақтары паралель сұйық ағыны сияқты етуге болатынын көрсетеді.