Әл-Фараби атындағы Қазақ ұлттық университеті

Механика-математика факультеті

Кубтық сплайнмен интерполяция

Темирбеков Нурлан Муханович ф-м.ғ.д., профессор

Жоспар

1. Кубтық сплайн көмегімен интерполяция.
2. Негізгі формуласының қорытылуы.
3. Кубтық сплайн модулі.
4. Интерполяция әдісі бойынша есеп шығару.

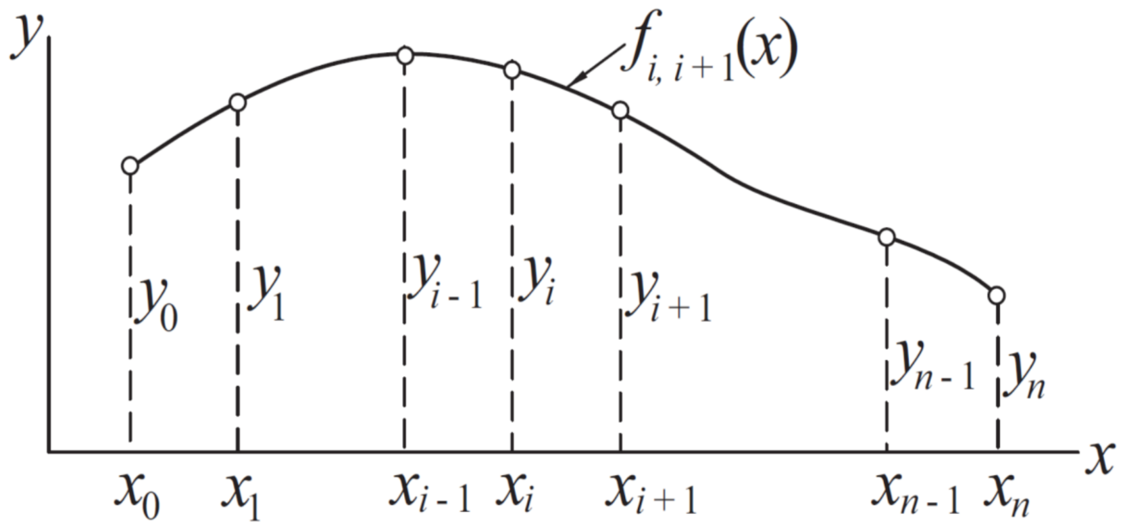
Мақсаты

Интерполяция есебіне кубтық сплайн әдісін қолдану

және есептеу алгоритмдерін құру.

Кубтық сплайн көмегімен интерполяция

Егер деректердің бірнеше көбірек нүктелері бар болса, кубтық сплайнды жалпы интерполянт ретінде қолдану тиімді.



1-сурет. Кубтық сплайн

i және $i+1$ түйіндері арасындағы кесіндіні қамтитын кубтық көпмүше үшін $f_{i,i+1}(x)$ деп белгілейміз.

Сплайн бөлік кубтық қисықтан біріктірілген n көпмүшеден $f_{0,1}(x), f_{1,2}(x), \dots, f_{n-1,n}(x)$ тұрады.

Негізгі формуласының қорытылуы

i түйініндегі сплайнның екінші туындысын k_i арқылы белгілей отырып, екінші туындылардың үзіліссіздігі мынаны талап етеді: $f''_{i-1,i}(x_i) = f''_{i,i+1}(x_i) = k_i$ **(1)** $\boldsymbol{k_0 = k_n = 0}$

$f''_{i,i+1}(x)$ – сызықты $$f''_{i,i+1}(x) = \frac{k_i(x - x_{i+1}) - k_{i+1}(x - x_i)}{x_i - x_{i+1}} \quad \textbf{(2)}$$

Екі рет интегралдасақ $$f_{i,i+1}(x) = \frac{k_i(x - x_{i+1})^3 - k_{i+1}(x - x_i)^3}{6(x_i - x_{i+1})} + A(x - x_{i+1}) - B(x - x_i) \quad \textbf{(3)}$$

$f_{i,i+1}(x_i) = y_i$ шартынан,

$$f_{i,i+1}(x) = \frac{k_i}{6}\left[\frac{(x - x_{i+1})^3}{x_i - x_{i+1}} - (x - x_{i+1})(x_i - x_{i+1})\right]$$

$$-\frac{k_{i+1}}{6}\left[\frac{(x - x_i)^3}{(x_i - x_{i+1})} - (x - x_i)(x_i - x_{i+1})\right] + \frac{y_i(x - x_{i+1}) - y_{i+1}(x - x_i)}{(x_i - x_{i+1})} \quad \textbf{(4)}$$

Негізгі формуласының қорытылуы

Ішкі түйіндердегі сплайнның k_i екінші туындылары көлбеудің $f'_{i-1,i}(x_i) = f'_{i,i+1}(x_i)$ үзіліссіздік шарттарынан алынған, мұндағы $i = 1, 2, \ldots, n-1$. Түрлендіруден кейін мына теңдеулер пайда болады.

$$k_{i-1}(x_{i-1} - x_i) + 2k_i(x_{i-1} - x_{i+1}) + k_{i+1}(x_i - x_{i+1}) = 6\left(\frac{y_{i-1} - y_i}{x_{i-1} - x_i} - \frac{y_i - y_{i+1}}{x_i - x_{i+1}}\right) \qquad \mathbf{(5)}$$

Бұл теңдеулер үш диагональды коэффициентті матрица, оларды **LU жіктеу** әдісі арқылы шешуге болады.

Егер деректер нүктелері h аралықта біркелкі орналасса, онда $x_{i-1} - x_i = x_i - x_{i+1} = -h$ және (5) теңдеулерді мына түрде ықшамдаймыз

$$k_{i-1} + 4k_i + k_{i+1} = \frac{6}{h^2}(y_{i-1} - 2y_i + y_{i+1}), \qquad i = 1, 2, \ldots, n-1 \qquad \mathbf{(6)}$$

Кубтық сплайн әдісі бойынша cubicSpline модулі

```
## module cubicSpline
import numpy as np
from LUdecomp3 import *
def curvatures(xData,yData):
    n = len(xData) - 1, c = np.zeros(n), d = np.ones(n+1)
    e = np.zeros(n), k = np.zeros(n+1)
    c[0:n-1] = xData[0:n-1] - xData[1:n]
    d[1:n] = 2.0*(xData[0:n-1] - xData[2:n+1])
    e[1:n] = xData[1:n] - xData[2:n+1]
    k[1:n] = 6.0*(yData[0:n-1] - yData[1:n])/(xData[0:n-1] - xData[1:n]) \
          - 6.0*(yData[1:n] - yData[2:n+1])/(xData[1:n] - xData[2:n+1])
    LUdecomp3(c,d,e)
    LUsolve3(c,d,e,k)
    return k

def evalSpline(xData,yData,k,x):
i = findSegment(xData,x)
    h = xData[i] - xData[i+1]
    y = ((x - xData[i+1])**3/h - (x - xData[i+1])*h)*k[i]/6.0 \
        - ((x - xData[i])**3/h - (x - xData[i])*h)*k[i+1]/6.0 \
        + (yData[i]*(x - xData[i+1])- yData[i+1]*(x - xData[i]))/h
    return y
```

Интерполяция әдісі бойынша есеп шығару

$x = 1,5$ кезінде **у**-ті анықтау үшін кубтық сплайнды пайдаланыңыз. Деректер нүктелері

x	1	2	3	4	5
y	0	1	0	1	0

Шешуі. Бес түйін $h = 1$ бірдей қашықтықта орналасқан.

$k_0 = k_4 = 0$

$0 + 4k_1 + k_2 = 6(0 - 2 \cdot 1 + 0) = -12$

$k_1 + 4k_2 + k_3 = 6(1 - 2 \cdot 0 + 1) = 12$

$k_2 + 43 + 0 = 6(0 - 2 \cdot 1 + 0) = -12$

Шешімі $k_1 = k_3 = -30/7\,,\ \ k_2 = 36/7.$

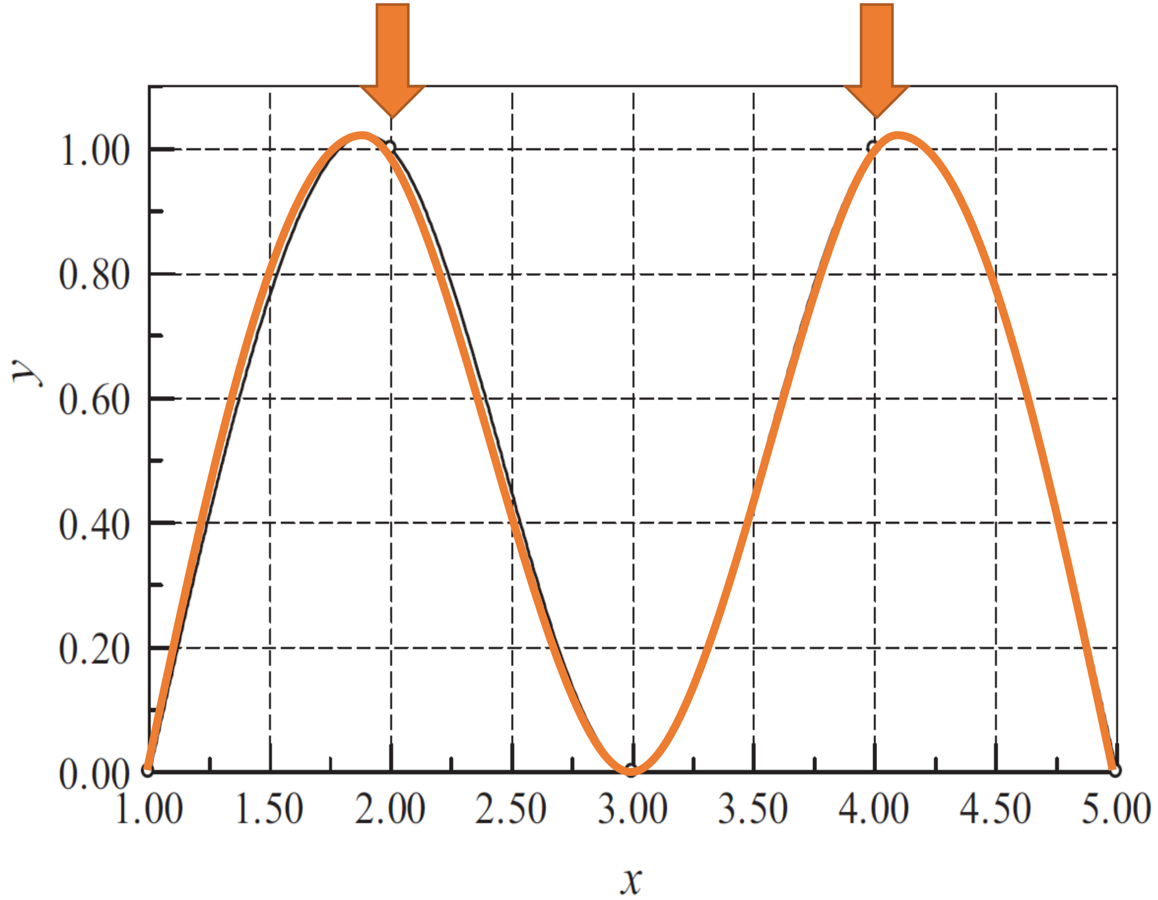
$$f_{0,1}(x) = -\frac{k_0}{6}[(x - x_1)^3 - (x - x_1)] + \frac{k_1}{6}[(x - x_0)^3 - (x - x_0)]$$

$$-[y_0(x - x_1) - y_1(x - x_0)]$$

$$y(1.5) = f_{0,1}(1.5) = 0.7679$$

Интерполяция әдісі бойынша есеп шығару

Кубтық көпмүшеден құралған интерполянттың графигі-симметриялы.



Жоғарыдағы мысал бойынша бағдарлама жазу.

Есепті шешу коды

```python
import numpy as np
from cubicSpline import *
xData = np.array([1,2,3,4,5],float)
yData = np.array([0,1,0,1,0],float)
k = curvatures(xData,yData)
while True:
    try: x = eval(input("\nx ==> "))
    except SyntaxError: break
    print("y =",evalSpline(xData,yData,k,x))
input("Done. Press return to exit")
```

```python
from LUdecomp3 import *
```

```python
def LUdecomp3(c,d,e):
    n  =  len(d)
    for  k  in  range(1,n):
        lam  =  c[k-1]/d[k-1]
        d[k]  =  d[k]  - lam*e[k-1]
        c[k-1] = lam
    return c,d,e
```

```python
def LUsolve3(c,d,e,b):
    n  = len(d)
    for  k  in  range(1,n):
        b[k]  =  b[k]  - c[k-1]*b[k-1]
    b[n-1]   =   b[n-1]/d[n-1]
    for  k  in  range(n-2,-1,-1):
        b[k]  =  (b[k]  - e[k]*b[k+1])/d[k]
    return b
```

Нәтижесі:

```
x ==> 1.5
y = 0.767857142857

x ==> 4.5
y = 0.767857142857
```

Қорытынды

1. Кубтық сплайн интерполяциясы.
2. Кубтық сплайн формуласы.
3. Кубтық сплайн модул бағдарламасы.
4. Python тілінде кубтық сплайн мысалы.

Пайдаланылған әдебиеттер тізімі

1. Jaan Kiusalaas. Numericalmethods in engineering with Python. Cambridge University Press. ISBN 978-1-107-03385
2. Вабищевич П.Н. Численные методы: Вычислительный практикум. — М.: Книжный дом «ЛИБРОКОМ», 2010. — 320 с.
3. Киреев В. И., Пантелеев А. В. Численные методы в примерах и задачах: Учебное пособие. — СПб.: Издательство «Лань», 2015. — 448 с.