



Әл-Фараби атындағы Қазақ ұлттық университеті  
Механика-математика факультеті



**Сандық интегралдау**

Темирбеков Нурлан Муханович ф-м.ғ.д., профессор

## Жоспар

1. Ньютон-Котес формулалары.
2. Трапеция формуласы.
3. Симпсон формуласы.
4. Есепті шығару үлгісі.

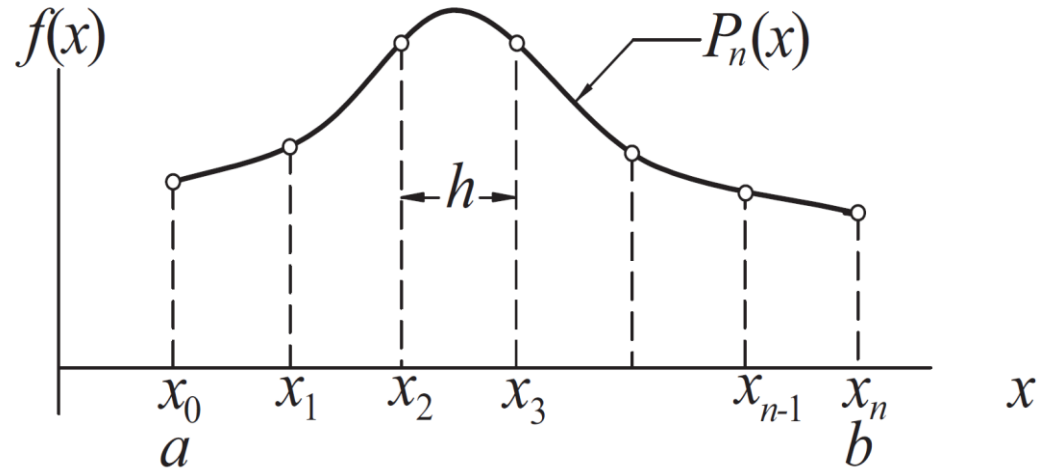
## Мақсаты

Интегралдау амалын сандық түрде шешу және есептеу бағдарламасын жүзеге асыру.

## Ньютон-Котес формулалары

Анықталған интеграл  $\int_a^b f(x)dx$  (1)

Көпмүшенің Лагранж формасы  $P_n(x) = \sum_{i=0}^n f(x_i)l_i(x)$



1-сурет.  $f(x)$ -тың көпмүшелік жуықтауы.  $h = (b - a)/n$

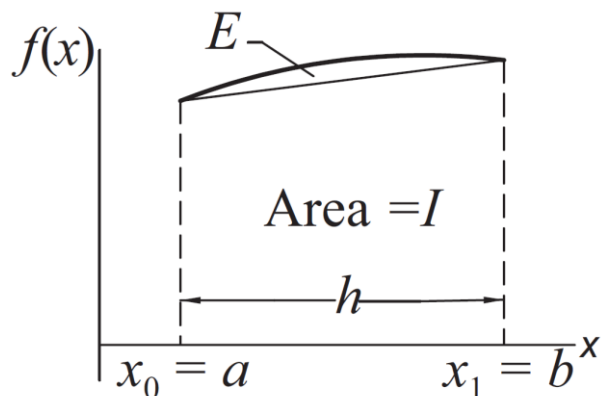
$$I = \int_a^b P_n(x)dx = \sum_{i=0}^n \left[ f(x_i) \int_a^b l_i(x)dx \right] = \sum_{i=0}^n A_i f(x_i) \quad (2a)$$

мұндағы

$$A_i = \int_a^b l_i(x)dx, i = 0, 1, \dots, n \quad (2b)$$

болып табылады.

## Трапеция формуласы



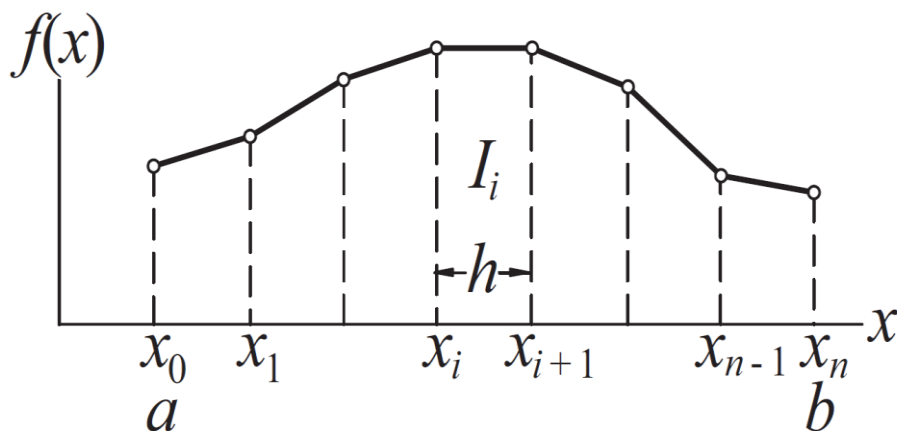
2-сурет. Трапеция

формуласының кескіні

(2a) теңдеуі трапеция ережесімен

$$I = [f(a) + f(b)] \frac{h}{2} \quad (3)$$

$$E = -\frac{h^3}{12} f''(\xi) \quad (4)$$



3-сурет. Құрама трапеция

формуласының кескіні.

$$I_i = [f(x_i) + f(x_{i+1})] \frac{h}{2} \quad (5a)$$

$$I = \sum_{i=0}^{n-1} I_i = [f(x_0) + 2f(x_1) + 2f(x_2) + \dots + 2f(x_{n-1}) + f(x_n)] \frac{h}{2} \quad (5)$$

$$E = -\frac{(b-a)h^2}{12} f''(\xi) \quad (6)$$

## Трапеция формуласы

### Рекурсивті трапеция формуласы

$k = 1$  (бір бөлік):

$$I_1 = [f(a) + f(b)] \frac{H}{2} \quad (8)$$

$k = 2$  (екі бөлік):

$$I_2 = \left[ f(a) + 2f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b) \right] \frac{H}{4} = \frac{1}{2}I_1 + f\left(a + \frac{H}{2}\right) \frac{H}{2}$$

Егер  $I_k$  шамасы  $n = 2^{k-1}$  бөліктер арқылы құралса, онда

$$I_k = \frac{1}{2}I_{k-1} + \frac{H}{2^{k-1}} \sum_{i=1}^{2^{k-2}} f\left[a + \frac{(2i-1)H}{2^{k-1}}\right], \quad k = 2, 3, \dots \quad (9a)$$

$$I(h) = \frac{1}{2}I(2h) + h \sum f(x_{\text{жаңа}}) \quad (9b)$$

мұндағы  $h = H/n$  - әрбір бөліктің ені.  $H = b - a$

### trapezoid модулі

```
## module trapezoid
```

```
def trapezoid(f,a,b,lold,k):
```

```
    if k == 1: lnew = (f(a) + f(b))*(b - a)/2.0
```

```
    else:
```

```
        n = 2**(k - 2) # Жаңа нүктелер саны
```

```
        h = (b - a)/n # Жаңа нүктелер аралығы
```

```
        x = a + h/2.0
```

```
        sum = 0.0
```

```
        for i in range(n):
```

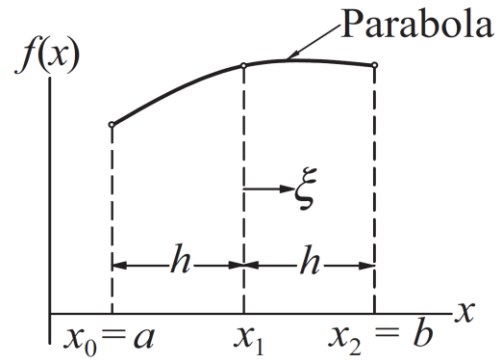
```
            sum = sum + f(x)
```

```
            x = x + h
```

```
        lnew = (lold + h*sum)/2.0
```

```
    return lnew
```

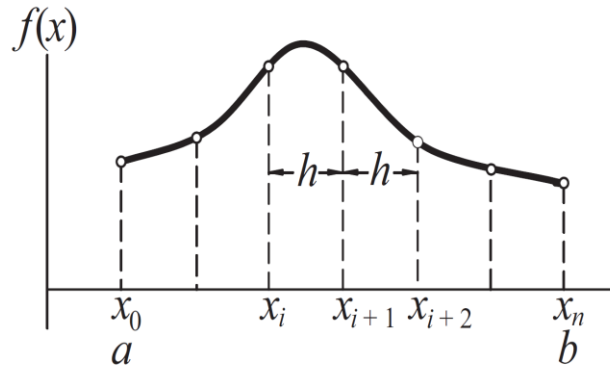
# Симпсон формуласы



$$I = \left[ f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b) \right] \frac{h}{3} \quad (a)$$

4-сурет. Симпсонның 1/3 формуласының кескіні

$$\int_{x_i}^{x_{i+2}} f(x) dx \approx [f(x_i) + 4f(x_{i+1}) + f(x_{i+2})] \frac{h}{3} \quad (b)$$



$$\int_a^b f(x) dx \approx I = [f(x_0) + 4f(x_1) + 2f(x_2) + 4f(x_3) + \dots + 2f(x_{n-2}) + 4f(x_{n-1}) + f(x_n)] \frac{h}{3} \quad (10)$$

5-сурет. Симпсонның 1/3 құрама формуласының кескіні.

$$E = \frac{(b-a)h^4}{180} f^{(4)}(\xi) \quad (11)$$

$$I = [f(x_0) + 3f(x_1) + 3f(x_2) + f(x_3)] \frac{3h}{8} \quad (12)$$

## Симпсон формуласы

$$I = \sum_{i=0}^2 A_i f(x_i) = \left[ f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b) \right] \frac{h}{3}$$

$$A_0 = \int_{-h}^h \frac{(\xi - 0)(\xi - h)}{(-h - 0)(-h - h)} d\xi = \frac{h}{3}$$

$$A_1 = \int_{-h}^h \frac{(\xi + h)(\xi - h)}{(0 + h)(0 - h)} d\xi = \frac{4h}{3}$$

$$A_2 = \int_{-h}^h \frac{(\xi + h)(\xi - 0)}{(h + h)(h - 0)} d\xi = \frac{h}{3}$$



## Есепті шығару үлгісі

### МЫСАЛ 1

Келесі деректерден

$x$	0	0.5	1.0	1.5	2.0	2.5
$f(x)$	1.5000	2.0000	2.0000	1.6364	1.2500	0.9565

$\int_0^{2.5} f(x) dx$  интеграл мәнін Симпсон формуласымен бағалаңыз.

**Шешуі:** Бөліктер саны тақ

$$I = [f(x_0) + 3f(x_1) + 3f(x_2) + f(x_3)] \frac{3h}{8} \qquad \int_{x_i}^{x_{i+2}} f(x) dx \approx [f(x_i) + 4f(x_{i+1}) + f(x_{i+2})] \frac{h}{3}$$

$$\begin{aligned} I &= [f(0) + 3f(0.5) + 3f(1.0) + f(1.5)] \frac{3 \cdot 0.5}{8} + [f(1.5) + 4f(2.0) + f(2.5)] \frac{0.5}{3} = \\ &= 2.8381 + 1.2655 = 4.1036 \end{aligned}$$

## Есепті шығару үлгісі

### МЫСАЛ 2

$\int_0^{\pi} \sqrt{x} \cos x \, dx$  мәнін алты ондық таңбаға дейін бағалау үшін қанша бөлік қажет?

```
import math
```

```
from trapezoid import *
```

```
def f(x): return math.sqrt(x)*math.cos(x)
```

```
lold = 0.0
```

```
for k in range(1,21):
```

```
    lnew = trapezoid(f,0.0,math.pi,lold,k)
```

```
    if (k > 1) and (abs(lnew - lold)) < 1.0e-6: break
```

```
    lold = lnew
```

```
print("Integral =",lnew)
```

```
print("нбөлік =",2**(k-1))
```

Егер біз  $t = \sqrt{x}$  қолданып, есептесек

$$\int_0^{\pi} \sqrt{x} \cos x \, dx = \int_0^{\sqrt{\pi}} 2t^2 \cos t^2 \, dt$$

интегралды бағалау **4096 бөлікпен** аяқталады.

### Бағдарламаның нәтижесі

Integral = -0.8948316648532865

нбөлік = 32768

## Қорытынды

1. Ньютон-Котес формулалары.
2. Трапеция формуласы және бағдарламасы.
3. Симпсон формуласы және қорытылуы.
4. Есепті шығарудың бағдарламалық үлгісі.

## Пайдаланылган әдебиеттер тізімі

1. Jaan Kiusalaas. Numerical methods in engineering with Python. Cambridge University Press.  
ISBN 978-1-107-03385
2. Вабищевич П.Н. Численные методы: Вычислительный практикум. — М.: Книжный дом «ЛИБРОКОМ», 2010. — 320 с.
3. Киреев В. И., Пантелеев А. В. Численные методы в примерах и задачах: Учебное пособие. — СПб.: Издательство «Лань», 2015. — 448 с.