КОМПЬЮТЕРНОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ТЕХНИЧЕСКИХ ЗАДАЧ

Лектор: Болегенова Салтанат Алихановна
+7 701 386 97 55
e-mail.: Saltanat.Bolegenova@kaznu.kz

ЯВНЫЕ И НЕЯВНЫЕ КОНЕЧНО-РАЗНОСТНЫЕ СХЕМЫ

Цель лекции - Методы явные и неявные конечно-разностные схемы

8.1 Явные схемы

Рассмотренная в предыдущих главах конечно-разностная схема с разностями вперед по времени и с центральными разностями по пространственной переменной является явной, т.к. значение искомой функции в определенной момент времени явно выражается через значения решения в предыдущий момент времени.

Как было показано, для того, чтобы явная конечно-разностная схема была устойчивой, необходимо наложить определенные ограничения на размеры ячейки сетки, т.е. на шаги Δx, Δt.

Рассмотрим конкретную задачу, для корректной постановки которой необходимо кроме данного уравнения задать граничные условия.

Пусть необходимо определить распределение температуры среды в трубе, движущейся с постоянной скоростью *u*. Начальная температура среды T_0 , на концах трубы температура подержаться соответственно T_1 и T_2.

Математически эта задача формулируется следующим образом:

$$\frac{df}{dt} + u\frac{df}{dt} = a\frac{d^2 f}{dx^2}$$

$t=0,\quad 0<x<l:\quad f=f_0;$
$t\geq 0,\quad x=0:\quad f=f_1;$
$x=l:\quad f=f_2$

В конечно-разностном виде эта задача запишется следующим образом:

$$\frac{f_{i,n+1} - f_{i,n}}{\Delta t} + u\frac{f_{i+1,n} - f_{i-1,n}}{2\Delta x} = a\frac{f_{i+1,n} + f_{i-1,n} - 2f_{i,n}}{\Delta x^2} \ ;$$

$T_{i,1}=T_0,\ i=2,\ L-1$
$T_{1,n}=T_1,\ n=1,2,\ldots$
$T_{L,n}=T_2,\ n=1,2,\ldots$

Необходимо оценить величину шагов Δx и Δt.

1) Ограничение для шага Δx для этой схемы имеет вид, $\Delta x \leq \frac{2a}{u}$

Пусть $u=0,1$ м/с (т.к. течение ламинарное), $a=2\cdot 10^{-5}$ (для воздуха).

$$\Delta x \leq \frac{2\cdot 2\cdot 10^{-5}}{10^{-1}} = 4\cdot 10^{-4}(м) = 0,4мм$$

Пусть $\Delta x=4\cdot 10^{-4}$ *м* (по максимуму).
Если шаг по x выберем равномерным, то общее число шагов по x (если $l=1$ *м*):

$$L=\frac{l}{\Delta x}=\frac{1}{4\cdot 10^{-4}}=\frac{10^4}{4}=2500$$

$$2)\ \Delta t\le\frac{\Delta x}{u}\ \text{(из условии Куранта: c} \le 1\text{)}$$

$$\Delta t\le\frac{4\cdot 10^{-4}}{10^{-1}}=4\cdot 10^{-3}\quad (c)=4\ \textit{мс}$$

Если Δt также равномерен, то общее число шагов по времени (при максимальном Δt):

$$t=1c:\ N=\frac{1}{4\cdot 10^{-3}}=250$$

$$t=10\ c:\ N=\frac{10}{4\cdot 10^{-3}}=2500$$

Т.о. отношение шагов $\frac{\Delta t}{\Delta x}$ образом пропорционально u: чем больше u , тем меньше $\frac{\Delta t}{\Delta x}$.

8.1.1 Алгоритм вычислений по явной схеме

1) Выразим явно значение $f_{i,n+1}$ из конечно-разностного уравнения:

$$f_{i,n+1}=f_{i,n}-\frac{u\Delta t}{2\Delta x}\left(f_{i+1,n}-f_{i-1,n}\right)+\frac{a\Delta t}{\Delta x^2}\left(f_{i+1,n}+f_{i-1,n}-2f_{i,n}\right)$$

$i=2,L-1$
$n=2,3,4,...$

или

$$f_{i,n+1}=f_{i,n}-\frac{c}{2}\left(f_{i+1,n}-f_{i-1,n}\right)+d\left(f_{i+1,n}+f_{i-1,n}-2f_{i,n}\right)$$

2) $n=1,\ i=2,L-1$ $f_{i,1}=f_0$ - заданы значения во всех узлах $n=1$

3) $i=1,\ n=1,2,...$ $f_{1,n}=f_1$ - заданы значения во всех узлах $i=1$

4) $i=L,\ n=1,2,...$ $f_{L,n}=f_2$ - заданы значения во всех узлах $i=L$

Т.о. заданы значения во всех граничных узлах.

5) Значение искомой функции в узлах на следующем временном слое получается из конечно-разностных формул следующим образом:

6)

$$f_{2,2}=f_{2,1}-\frac{u\Delta t}{2\Delta x}\left(f_{3,1}-f_{1,1}\right)+\frac{a\Delta t}{\Delta x^2}\left(f_{3,1}+f_{1,1}-2f_{2,1}\right),$$

$$f_{3,2} = f_{3,1} - \frac{u\Delta t}{2\Delta x}\left(f_{4,1} - f_{2,1}\right) + \frac{a\Delta t}{\Delta x^2}\left(f_{4,1} + f_{2,1} - 2f_{3,1}\right),$$

$$f_{L-1,2} = f_{L-1,1} - \frac{u\Delta t}{\Delta x^2}\left(f_{L,1} - f_{L-2,1} - 2f_{L-1,1}\right).$$

Т.о. получено решение на следующем временном слое $n=2$. Затем находится решение для $n=3$ и т.д. до тех пор, пока не получим необходимое значение t.

8.1.2 Явная схема “чехарда”

Применительно к используемому нами модельному уравнению эта схема имеет следующий вид: производная по времени заменяется центральными разностями, а в конечно-разностных аппроксимациях значение второй производной $f_{i,n}$ заменяется средними арифметическими $f_{i,n+1}$ и $f_{i,n-1}$:

$$\frac{f_{i,n+1} - f_{i,n-1}}{2\Delta t} + u\frac{f_{i+1,n} - f_{i-1,n}}{2\Delta x} = a\frac{f_{i+1,n} + f_{i-1,n} - f_{i,n+1} - f_{i,n-1}}{\Delta x^2},$$

шаблон имеет следующий вид: четырехточечный шаблон, трехслойная одношаговая схема. Одношаговая – т.к. значение на $n+1$ слое вычисляется за 1 шаг. Здесь в правую часть входит искомое значение $f_{i,n+1}$. Однако это уравнение можно явно разрешить относительно $f_{i,n+1}$:

$$f_{i,n+1} = f_{i,n-1} - \frac{u\Delta t}{\Delta x}\left(f_{i+1,n} - f_{i-1,n}\right)$$
$$+ \frac{2a\Delta t}{\Delta x^2}\left(f_{i+1,n} + f_{i-1,n} - f_{i,n-1}\right) - \frac{2a\Delta t}{\Delta x^2} f_{i,n+1}$$

$$f_{i,n+1} = \frac{f_{i,n+1} - \frac{u\Delta t}{\Delta x}\left(f_{i+1,n} - f_{i-1,n}\right) + \frac{2a\Delta t}{\Delta x^2}\left(f_{i+1,n} + f_{i-1,n} - f_{i,n-1}\right)}{1 + \frac{2a\Delta x}{\Delta x^2}}$$

или

$$f_{i,n+1} = \left[f_{i,n+1} - c\left(f_{i+1,n} - f_{i-1,n}\right) + 2d\left(f_{i+1,n} + f_{i-1,n} - f_{i,n-1}\right)\right]/\left(1 + 2d\right)$$

8.1.3 Схема “Явный уголок” для уравнения конвективного переноса

Рассмотрим модельное уравнение только с конвективным членом:

$$\frac{\partial T}{\partial t} + u\frac{\partial T}{\partial x} = 0$$

Когда мы рассматривали явление неустойчивости, то видели, что конвективный член (если его записывать через центральные разности) приводит к неустойчивости. Поэтому для пространственных переменных используют односторонние разности следующим образом:

$$\frac{f_{i,n+1} - f_{i,n}}{\Delta t} = \quad -u\frac{f_{i,n} - f_{i-1,n}}{\Delta x} \quad \text{при } u \succ 0$$

$$-u\frac{f_{i+1,n} - f_{i,n}}{\Delta x} \text{ при } u \prec 0$$

Рассмотрим случай $u \succ 0$:

$$\frac{f_{i,n+1} - f_{i,n}}{\Delta t} + \frac{f_{i,n} - f_{i-1,n}}{\Delta x} = 0$$

или

$$f_{i,n+1} = f_{i,n} - c\left(f_{i,n} - f_{i-1,n}\right). \qquad (*)$$

Воспользуемся разложением Тейлора, чтобы привести это конечно-разностное уравнение к данному уравнению:

$$f_{i,n+1} = f_{i,n} + \frac{\partial f}{\partial t}\Delta t + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial t^2}\Delta t^2 ,$$

$$f_{i,n+1} - f_{i,n} = \Delta t\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{1}{2}\Delta t^2\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} ,$$

$$f_{i-1,n} = f_{i,n} - \frac{\partial f}{\partial t}\Delta x + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial t^2}\Delta x^2,$$

$$f_{i,n} - f_{i-1,n} = \Delta x\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{1}{2}\Delta x^2\frac{\partial^2 f}{\partial t^2},$$

подставим полученные выражения в уравнение (*):

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{1}{2}\Delta t\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} + u\frac{\partial f}{\partial x} - \frac{1}{2}u\Delta x\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 0,$$

$$\frac{\partial f}{\partial t} + u\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{1}{2}u\Delta x\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - \frac{1}{2}\Delta t\frac{\partial^2 f}{\partial t^2}.$$

Выразим $\frac{\partial^2 f}{\partial t^2}$ через $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$, воспользовавшись уравнением

$$\frac{df}{dt} = 0 \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial t} = -u\frac{\partial f}{\partial x} ,$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial f}{\partial t}\right) = \frac{\partial}{\partial t}\left(-u\frac{\partial f}{\partial x}\right) =$$
$$-u\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial t}\right) = -u\frac{\partial}{\partial x}\left(-u\frac{\partial f}{\partial x}\right) = u^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2},$$

$$\frac{\partial f}{\partial t} + u\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{1}{2}u\Delta x\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - \frac{1}{2}\Delta t u^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2},$$

$$\frac{\partial f}{\partial t} + u\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{1}{2}u\Delta x(1-c)\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}.$$

Обозначим $a_c = \frac{1}{2}u\Delta x(1-c)$:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + u\frac{\partial f}{\partial x} = a_c\frac{\partial^2 f}{\partial x^2},$$

$$\alpha_\Delta = a_c\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}.$$

Т.о. мы видим, что полученное по схеме “явный уголок” конечно-разностное уравнение эквивалентно не исходному данному уравнению, а уравнению с дополнительным диффузионным членом.

Коэффициент a_c при второй производной называется схемной искусственной диффузией (или схемной искусственной вязкостью), ее называют также аппроксимационным коэффициентом диффузии (или аппроксимация вязкости).

Из выражения a_c следует, что при $c=1$ (предельное условие устойчивости) $a_c=0$.

Уменьшение Δt приводит к увеличению a_c, следовательно, увеличивается ошибка аппроксимации.

Для схемы с $u \prec 0$:

$a_c = \frac{1}{2}u\Delta x(1+c)$ - в этом случае $a_c \neq 0$ ни при каком *c,* т.е. эта схема обладает более сильным диссипативным действием.

Существует еще очень большое количество явных схем. Их выбор зависит от вида конкретной дифференциальной задачи.

8.2 Неявные схемы

Если при аппроксимации пространственных производных брать значение функций не на *n*-ном временном слое, а на *n+1*, то получим полностью неявную схему:

$$\frac{f_{i,n+1} - f_{i.n}}{\Delta t} + u\frac{f_{i+1,n+1} - f_{i-1,n+1}}{2\Delta x} = a\frac{f_{i+1,n+1} + f_{i-1,n+1} - 2f_{i,n+1}}{\Delta x^2}.$$

Теперь уже нельзя выразить значение $f_{i,n+1}$ явно через значения на предыдущих временных слоях. Для определения $f_{i,n+1}$ необходимо решить систему уравнений.

8.2.1 Алгоритм вычислений по неявной схеме

Перепишем конечно-разностное уравнение следующим образом:

$$f_{i,n+1} - f_{i,n} + \frac{u\Delta t}{2\Delta x}\left(f_{i+1,n+1} - f_{i-1,n+1}\right) =$$
$$= \frac{a\Delta t}{\Delta x^2}\left(f_{i+1,n+1} + f_{i-1,n+1} - 2f_{i,n+1}\right)$$

$$(1+2d)f_{i,n+1} + \left(\frac{c}{2} - d\right)f_{i+1,n+1} - \left(\frac{c}{2} + d\right)f_{i-1,n+1} = f_{i,n}.$$

Это уравнение можно переписать следующим образом:

$$\left[\mathrm{A}_i \mathrm{T}_{i-1} + \mathrm{B}_i \mathrm{T}_i + C_i \mathrm{T}_{i+1}\right]_{n+1} = D_{i,n}.$$

Это уравнение решается прогонкой. Напомним ее основные этапы.

1.Прямая прогонка: вычисляются прогоночные коэффициенты по формулам:

$$\mathrm{P}_{i,n+1} = \left[\frac{-C_i}{\mathrm{B}_i + \mathrm{A}_i \mathrm{P}_{i-1}}\right]_{n+1}.$$

$$Q_{i,n+1} = \left[\frac{D - A_i Q_{i-1}}{\mathrm{B}_i + A_i P_{i-1}}\right]_{n+1}, \quad i = 2, L-1.$$

2. Обратная прогонка: вычисление f_i по формуле:

$$f_{i,n} = \left[P_i \quad f_{i+1} + Q_i\right]_{n+1}, \quad i = L-1, 2.$$

Контрольные вопросы:

1. Как находят ошибку аппроксимации?
2. Какая КРС называется аппроксимирующей?
3. Какая КРС называется сходящейся?
4. Из-за чего возникает неустойчивость?
5. Напишите число Куранта.
6. Напишите диффузионное число.
7. Напишите условие устойчивости КРС.