

КОМПЬЮТЕРНОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ТЕХНИЧЕСКИХ ЗАДАЧ

Лектор: Болегенова Салтанат Алихановна
+7 701 386 97 55
e-mail.: Saltanat.Bolegenova@kaznu.kz

МЕТОД СПОЛДИНГА

Цель лекции – расчетной сетки метод Сполдинга

11.1 Преобразование уравнений

Одним из методов, позволяющих решить проблему расширяющейся расчетной сетки, является метод Сполдинга, в котором одним из основных моментов является переход к новым переменным, который осуществляется в 2 этапа.

Осуществим сначала переход от декартовых переменных x, y к переменным ξ, ψ , где $\xi \equiv x$, а ψ - функция тока.

Применение этого метода позволяет перейти от прямолинейной конечно-разностной сетки к модифицированной криволинейной сетке, которая автоматически «подстраивается» под область течения. Такая сетка особенно удобна при расчете расширяющихся свободных течений, так как не требует добавления в процессе счета дополнительных узлов конечно-разностной сетки.

Перейдем от прямоугольных переменных x, y к новым переменным Мизеса ξ, ψ . Здесь $\xi = x$, а ψ - функция тока, которая определяется из уравнения неразрывности:

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y}; \quad v = -\frac{\partial \psi}{\partial x}. \quad (11.1)$$

Тогда частные производные по реальным координатам будут иметь вид:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} &= \frac{\partial}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial \psi} \frac{\partial \psi}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial \xi} - v \frac{\partial}{\partial \psi}, \\ \frac{\partial}{\partial y} &= \frac{\partial}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial \psi} \frac{\partial \psi}{\partial y} = u \frac{\partial}{\partial \psi}. \end{aligned} \quad (11.2)$$

Используя эти формулы перехода, в новых переменных ξ, ψ уравнение (11.1) превращается в тождество, а (11.2) приводится к виду:

$$\Phi \frac{\partial \Phi}{\partial \xi} - \Phi v \frac{\partial \Phi}{\partial \psi} + \Phi u \frac{\partial \Phi}{\partial \psi} = \Phi \frac{\partial}{\partial \psi} \left(v \Phi \frac{\partial \Phi}{\partial \psi} \right). \quad (11.3)$$

После простых преобразований получим:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial \psi} \left(v \Phi \frac{\partial \Phi}{\partial \psi} \right). \quad (11.4)$$

Полученная система уравнений (11.4) имеет более простой вид и не содержит уравнения неразрывности, но расчетная область является более неудобной, чем в координатах x, y , так как имеет неправильную форму и по-прежнему для расширяющихся течений требует введения в ходе расчета дополнительных узлов конечно-разностной сетки.

Чтобы преодолеть эти трудности, необходимо перейти к другим переменным x, ω , где x – продольная координата, причем $x = \xi$, ω – безразмерная функция тока, которая определяется следующим образом:

$$\omega = \frac{\Psi - \Psi_I}{\Psi_E - \Psi_I},$$

где Ψ_I, Ψ_E – значения функции тока на нижней и верхней границах расчетной области соответственно.

Переменная ω удобна тем, что ее область изменения всегда лежит в следующих пределах:

$$0 \leq \omega \leq 1,$$

следовательно, $\omega_I = 0, \omega_E = 1$. Индексы I и E соответствуют нижней и верхней границам расчетной области. В переменных x, ω конечно-разностная сетка всегда автоматически «подстраивается» под расчетную область.

Формулы перехода в данном случае будут иметь следующий вид:

$$\frac{\partial}{\partial \xi} = \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \xi} + \frac{\partial}{\partial \omega} \frac{\partial \omega}{\partial \xi} = \frac{\partial}{\partial x} + \left(\frac{v_I}{\Psi_E - \Psi_I} + \frac{v_E - v_I}{\Psi_E - \Psi_I} \right) \frac{\partial}{\partial \omega},$$

$$\frac{\partial}{\partial \Psi} = \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \Psi} + \frac{\partial}{\partial \omega} \frac{\partial \omega}{\partial \Psi} = \frac{1}{\Psi_E - \Psi_I} \frac{\partial}{\partial \omega}.$$

Тогда уравнение (5.4) в новых переменных x, ω примет вид:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} + \left(\frac{v_I}{\Psi_E - \Psi_I} + \frac{v_E - v_I}{\Psi_E - \Psi_I} \omega \right) \frac{\partial \Phi}{\partial \omega} = \frac{1}{\Psi_E - \Psi_I} \frac{\partial}{\partial \omega} \left(\frac{\Gamma_\Phi \Phi}{\Psi_E - \Psi_I} \frac{\partial \Phi}{\partial \omega} \right) + \frac{S_\Phi}{\rho u}. \quad (11.5)$$

Введем обозначения:

$$a = \frac{v_I}{\Psi_E - \Psi_I}, \quad b = \frac{v_E - v_I}{\Psi_E - \Psi_I}, \quad c = \frac{\Gamma_\Phi \Phi}{(\Psi_E - \Psi_I)^2}, \quad d = \frac{S_\Phi}{\rho u}.$$

С учетом введенных обозначений уравнение (5.5) примет следующий вид:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} + (a + b\omega) \frac{\partial \Phi}{\partial \omega} = \frac{\partial}{\partial \omega} \left(c \frac{\partial \Phi}{\partial \omega} \right) + d. \quad (11.6)$$

Решение этого уравнения получается в переменных x, ω , а затем по необходимости осуществляется обратный переход от ω к переменной y по следующей формуле:

$$y = \int_0^{\omega} \frac{\Psi_E - \Psi_I}{\rho \Phi} d\omega.$$

11.2 Конечно – разностная схема

Конечно-разностный аналог уравнения (5.6) получим методом интегрирования по контрольному объему. Для этого выберем следующую двумерную область интегрирования:

$$x_i \leq x \leq x_{i+1}, \quad \omega_{j-1/2} \leq \omega \leq \omega_{j+1/2} \quad (\text{см. рисунок 6}).$$

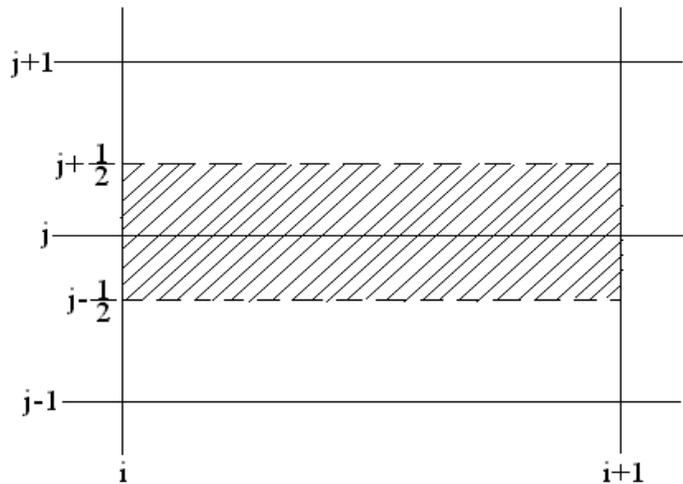


Рис. 6. Фрагмент конечно-разностной сетки. Заштрихованная область – контрольный объем

Проинтегрируем уравнение (5.6) от x_i до x_{i+1} и от $\omega_{j-1/2}$ до $\omega_{j+1/2}$.

Поскольку x и ω независимые переменные, то порядок интегрирования не имеет значения:

$$\int_{j-\frac{1}{2}}^{j+\frac{1}{2}} \int_i^{i+1} \frac{\partial \Phi}{\partial x} dx d\omega + \int_i^{i+1} \int_{j-\frac{1}{2}}^{j+\frac{1}{2}} (a + b\omega) \frac{\partial \Phi}{\partial \omega} d\omega dx = \int_i^{i+1} \int_{j-\frac{1}{2}}^{j+\frac{1}{2}} \frac{\partial}{\partial \omega} \left(c \frac{\partial \Phi}{\partial \omega} \right) d\omega dx + \int_i^{i+1} \int_{j-\frac{1}{2}}^{j+\frac{1}{2}} d\omega dx. \quad (5.7)$$

I_1

I_2

I_3

I_4

Рассмотрим каждый интеграл отдельно.

$$I_1 \approx \int_{j-\frac{1}{2}}^{j+\frac{1}{2}} (\Phi_{i+1} - \Phi_i) d\omega \approx (\Phi_{i+1,j} - \Phi_{i,j}) \Delta\omega. \quad (11.8)$$

Здесь при интегрировании по ω была использована теорема о среднем; при этом в качестве средней точки выбрана точка ω_j и введено обозначение:

$$\Delta\omega = \omega_{j+\frac{1}{2}} - \omega_{j-\frac{1}{2}}$$

Интеграл, обозначенный I_2 , проинтегрируем по частям, используя, где необходимо, теорему о среднем. При этом, интегрируя по ω , в качестве средней точки также будем использовать узел j , а при интегрировании по x обозначим среднюю точку индексом i^* , смысл которого будет пояснен ниже:

$$\begin{aligned} I_2 &= \int_i^{i+1} \int_{j-\frac{1}{2}}^{j+\frac{1}{2}} (a+b\omega) \frac{\partial\Phi}{\partial\omega} d\omega dx = \int_i^{i+1} \left[(a+b\omega)\Phi \Big|_{j-\frac{1}{2}}^{j+\frac{1}{2}} - \int_{j-\frac{1}{2}}^{j+\frac{1}{2}} b\Phi\omega dx \right] \approx \\ &\approx \int_i^{i+1} \left[(a+b\omega)\Phi \Big|_{j+\frac{1}{2}} - \left(a+b\omega_{j-\frac{1}{2}} \right) \Phi \Big|_{j-\frac{1}{2}} \right] dx - b_i \int_i^{i+1} (b\Phi)_j \Delta\omega dx \approx \\ &\approx \left[\left(a+b\omega_{j+\frac{1}{2}} \right) \Phi \Big|_{j+\frac{1}{2}} \right]_{i^*} \Delta x - \left[\left(a+b\omega_{j-\frac{1}{2}} \right) \Phi \Big|_{j-\frac{1}{2}} \right]_{i^*} \Delta x - (b\Phi)_{i^*,j} \Delta\omega \Delta x \quad (5.9) \end{aligned}$$

Для получения линейного конечно-разностного уравнения необходимо, чтобы коэффициенты при неизвестных Φ были записаны на известном слое. Поэтому в последних выражениях уравнения (5.9) коэффициенты при Φ запишем в узле i , а сами значения Φ – в узле $i+1$:

$$I_2 \approx \left(a+b\omega_{j+\frac{1}{2}} \right)_i \Phi_{i+1,j+\frac{1}{2}} \Delta x - \left(a+b\omega_{j-\frac{1}{2}} \right)_i \Phi_{i+1,j-\frac{1}{2}} \Delta x - b_{i,j} \Phi_{i+1,j} \Delta\omega \Delta x \quad (11.10)$$

Такой прием позволяет линеаризовать уравнение, что позволит в последствии избежать трудоемких затрат, как с точки зрения реализации алгоритма, так и с точки зрения компьютерного времени.

Рассмотрим подробнее, чему равно $b_{i,j}$:

$$\begin{aligned} b_i &= \frac{(v_E - v_I)_i}{(\psi_E - \psi_I)_i} = \frac{-1}{(\psi_E - \psi_I)_i} \frac{\partial}{\partial x} (\psi_E - \psi_I)_i = \frac{-1}{(\psi_E - \psi_I)_i} \frac{(\psi_E - \psi_I)_{i+1} - (\psi_E - \psi_I)_i}{\Delta x} = \\ &= \frac{-1}{\Delta x} \left[\frac{(\psi_E - \psi_I)_{i+1}}{(\psi_E - \psi_I)_i} - 1 \right]. \quad (11.11) \end{aligned}$$

Из выражения (5.11) следует, что коэффициент b не зависит от поперечной координаты, тогда последнее слагаемое в выражении (5.10) примет вид:

$$-b_i \Phi_{i+1,j} \Delta\omega \Delta x = \left(\frac{(\psi_E - \psi_I)_{i+1}}{(\psi_E - \psi_I)_i} - 1 \right) \Phi_{i+1,j} \Delta\omega \Delta x.$$

С учетом (5.11) первое и второе слагаемые в выражении (5.10) будут иметь следующий вид:

$$\left(a + b\omega \right)_{j+\frac{1}{2}} \Phi_{i+1, j+\frac{1}{2}} \Delta x = \frac{v_{i, j+\frac{1}{2}}}{(\psi_E - \psi_I)_i} \Phi_{i+1, j+\frac{1}{2}} \Delta x, \quad (11.12)$$

$$\left(a + b\omega \right)_{j-\frac{1}{2}} \Phi_{i+1, j-\frac{1}{2}} \Delta x = \frac{v_{i, j-\frac{1}{2}}}{(\psi_E - \psi_I)_i} \Phi_{i+1, j-\frac{1}{2}} \Delta x.$$

Предположив также, что значения Φ в «половинных» узлах можно записать, как средние арифметические соседних «целых» узлов:

$$\Phi_{i+1, j \pm \frac{1}{2}} = \frac{1}{2} (\Phi_{i+1, j} + \Phi_{i+1, j \pm 1}),$$

и используя формулы (5.12), окончательно конечно-разностная аппроксимация второго интеграла будет выглядеть следующим образом:

$$I_2 \approx \frac{v_{i, j+\frac{1}{2}}}{2(\psi_E - \psi_I)_i} (\Phi_{i+1, j} + \Phi_{i+1, j+1}) \Delta x - \frac{v_{i, j-\frac{1}{2}}}{2(\psi_E - \psi_I)_i} (\Phi_{i+1, j} + \Phi_{i+1, j-1}) \Delta x + \left[\frac{(\psi_E - \psi_I)_{i+1}}{(\psi_E - \psi_I)_i} - 1 \right] \Phi_{i+1, j} \Delta \omega \quad (11.13)$$

Для третьего интеграла также используем теорему о среднем и, как и в предыдущем случае, применим метод линеаризации полученного выражения с помощью специального подбора средней точки:

$$I_3 = \int_i^{i+1} \left(c \frac{\partial \Phi}{\partial \omega} \right)_{j+\frac{1}{2}} dx - \int_i^{i+1} \left(c \frac{\partial \Phi}{\partial \omega} \right)_{j-\frac{1}{2}} dx = \left(c \frac{\partial \Phi}{\partial \omega} \right)_{i^*, j+\frac{1}{2}} \Delta x - \left(c \frac{\partial \Phi}{\partial \omega} \right)_{i^*, j-\frac{1}{2}} \Delta x.$$

Преобразуем полученное выражение следующим образом. Заменяем c в соответствии с (5.5):

$$I_3 = \left[\frac{\Gamma_\Phi \Phi}{(\psi_E - \psi_I)^2} \frac{\partial \Phi}{\partial \omega} \right]_{i^*, j+\frac{1}{2}} \Delta x - \left[\frac{\Gamma_\Phi \Phi}{(\psi_E - \psi_I)^2} \frac{\partial \Phi}{\partial \omega} \right]_{i^*, j-\frac{1}{2}} \Delta x.$$

Используем формулу перехода от u к ω :

$$\frac{\partial}{\partial y} = \frac{\Phi}{\psi_E - \psi_I} \frac{\partial}{\partial \omega}.$$

Тогда

$$I_3 = \left(\frac{v}{\psi_E - \psi_I} \frac{\partial \Phi}{\partial y} \right)_{i^*, j + \frac{1}{2}} \Delta x - \left(\frac{v}{\psi_E - \psi_I} \frac{\partial \Phi}{\partial y} \right)_{i^*, j - \frac{1}{2}} \Delta x.$$

Аппроксимируем значения производных, входящих в последнее выражение, используя для этой цели центральные конечно-разностные соотношения относительно узлов $y_{i+1/2}$ и $y_{i-1/2}$. Кроме того, в целях линеаризации полученного выражения значения Φ будут записаны в узле $i+I$, а коэффициенты при них – в узле I :

$$I_3 = \frac{v_{i, j + \frac{1}{2}}}{(\psi_E - \psi_I)_i} \frac{\Phi_{i+1, j+1} - \Phi_{i+1, j}}{\Delta y} \Delta x - \frac{v_{i, j - \frac{1}{2}}}{(\psi_E - \psi_I)_i} \frac{\Phi_{i+1, j} - \Phi_{i+1, j-1}}{\Delta y} \Delta x.$$

Введем следующие обозначения:

$$\frac{v_{i, j + \frac{1}{2}}}{\Delta y} = T_{i, j + \frac{1}{2}}, \quad \frac{v_{i, j - \frac{1}{2}}}{\Delta y} = T_{i, j - \frac{1}{2}}.$$

Таким образом, окончательно получим:

$$I_3 = \frac{\Delta x}{(\psi_E - \psi_I)_i} \left[T_{i, j + \frac{1}{2}} (\Phi_{i+1, j+1} - \Phi_{i+1, j}) - T_{i, j - \frac{1}{2}} (\Phi_{i+1, j} - \Phi_{i+1, j-1}) \right]. \quad (11.14)$$

Для последнего интеграла дважды применим теорему о среднем:

$$I_4 \approx d_{i, j} \Delta x \Delta \omega. \quad (11.15)$$

Соберем теперь все слагаемые (5.8), (5.13)-(5.15) и запишем уравнение (5.6) в конечно-разностном виде:

$$\begin{aligned} & (\Phi_{i+1, j} - \Phi_{i, j}) \Delta \omega + \frac{v_{i, j + \frac{1}{2}} \Delta x}{2(\psi_E - \psi_I)_i} (\Phi_{i+1, j} + \Phi_{i+1, j+1}) - \frac{1}{2} v_{i, j - \frac{1}{2}} \frac{\Delta x}{(\psi_E - \psi_I)_i} (\Phi_{i+1, j} + \Phi_{i+1, j-1}) + \\ & + \left[\frac{(\psi_E - \psi_I)_{i+1}}{(\psi_E - \psi_I)_i} - 1 \right] \Phi_{i+1, j} \Delta \omega = \frac{\Delta x}{(\psi_E - \psi_I)_i} \left[T_{i, j + \frac{1}{2}} (\Phi_{i+1, j+1} - \Phi_{i+1, j}) - T_{i, j - \frac{1}{2}} (\Phi_{i+1, j} - \Phi_{i+1, j-1}) \right] + d_{i, j} \Delta x \Delta \omega \end{aligned} \quad (11.16)$$

11.3 Алгоритм решения

11.3.1 Реализация метода прогонки

Полученное уравнение (5.16) представляет собой неявную конечно-разностную схему и может быть решено аналитически с помощью метода трехточечной прогонки. Уравнение (5.16) представим в следующем виде:

$$A_j \Phi_{i+1, j+1} + B_j \Phi_{i+1, j} + C_j \Phi_{i+1, j-1} = D_j \quad (5.17)$$

Для этого умножим все члены уравнения (5.16) на $\frac{(\psi_E - \psi_I)_i}{\Delta x}$:

$$\begin{aligned} & \frac{(\psi_E - \psi_I)_i}{\Delta x} \Delta \omega (\Phi_{i+1,j} - \Phi_{i,j}) + \frac{1}{2} v_{i,j+\frac{1}{2}} (\Phi_{i+1,j} + \Phi_{i+1,j+1}) - \frac{1}{2} v_{i,j-\frac{1}{2}} (\Phi_{i+1,j} + \Phi_{i+1,j-1}) + \\ & + [(\psi_E - \psi_I)_{i+1} - (\psi_E - \psi_I)_i] \Phi_{i+1,j} \frac{\Delta \omega}{\Delta x} = T_{i,j+\frac{1}{2}} (\Phi_{i+1,j+1} - \Phi_{i+1,j}) - T_{i,j-\frac{1}{2}} (\Phi_{i+1,j} - \Phi_{i+1,j-1}) + d_{i,j} \Delta \omega (\psi_E - \psi_I)_i. \end{aligned}$$

Приведем подобные:

$$\begin{aligned} & \left(-T_{i,j-\frac{1}{2}} - \frac{1}{2} v_{i,j-\frac{1}{2}} \right) \Phi_{i+1,j-1} + \left(T_{i,j-\frac{1}{2}} - \frac{1}{2} v_{i,j-\frac{1}{2}} + T_{i,j+\frac{1}{2}} + \frac{1}{2} v_{i,j+\frac{1}{2}} \right) \Phi_{i+1,j} + \frac{\Delta \omega}{\Delta x} ((\psi_E - \psi_I)_{i+1}) \Phi_{i+1,j} + \\ & + \left(-T_{i,j+\frac{1}{2}} + \frac{1}{2} v_{i,j+\frac{1}{2}} \right) \Phi_{i+1,j+1} = \frac{\Delta \omega}{\Delta x} (\psi_E - \psi_I)_i (\Phi_{i,j} + d_{i,j} \Delta x). \end{aligned}$$

Введем следующие обозначения:

$$A_j = - \left(\frac{1}{2} v_{i,j-\frac{1}{2}} + T_{i,j-\frac{1}{2}} \right) \quad (5.18)$$

$$C_j = \frac{1}{2} v_{i,j+\frac{1}{2}} - T_{i,j+\frac{1}{2}} \quad (5.19)$$

$$B_j = T_{i,j-\frac{1}{2}} - \frac{1}{2} v_{i,j-\frac{1}{2}} + T_{i,j+\frac{1}{2}} + \frac{1}{2} v_{i,j+\frac{1}{2}} + \frac{\Delta \omega}{\Delta x} (\psi_E - \psi_I)_{i+1} \quad (5.20)$$

$$D_j = \frac{\Delta \omega}{\Delta x} (\psi_E - \psi_I)_i (u_{i,j} + d_{i,j} \Delta x). \quad (5.21)$$

Вообще говоря, коэффициенты A_j , B_j , C_j , D_j являются известными функциями, однако в формулу (5.20) для коэффициента B_j входит неизвестное значение $(\psi_E - \psi_I)_{i+1}$, которое определим путем разложения в ряд Тейлора:

$$(\psi_E - \psi_I)_{i+1} = (\psi_E - \psi_I)_i + \left. \frac{\partial (\psi_E - \psi_I)}{\partial x} \right|_i \Delta x = (\psi_E - \psi_I)_i - (v_E - v_I)_i \Delta x.$$

Подставив полученное выражение в (5.20) и сделав несложные преобразования, получим:

$$B_j = -A_j - C_j + \frac{\Delta \omega}{\Delta x} (\psi_E - \psi_I)_i. \quad (5.22)$$

Таким образом, поскольку известны выражения для коэффициентов уравнения (5.17), можно считать, что уравнение (5.16) приведено к виду (5.17). Используя далее известный метод трехточечной прогонки, можно получить искомое решение.

Описанная неявная конечно-разностная схема гарантирует устойчивый счет даже при больших шагах интегрирования, однако, размер шага Δx_i может влиять на точность и сходимость решения.

Контрольные вопросы:

1. Что такое метод Сполдинга?
2. Какой алгоритм решения?
3. Что такое реализация метода прогонки?
4. Из-за чего возникает неустойчивость?
5. Напишите число Прандтля.
6. Напишите диффузионное число.
7. Напишите условие устойчивости КРС.