



Әл-Фараби атындағы Қазақ ұлттық университеті
Механика-математика факультеті



Бастапқы есепті шешу әдістері

Темирбеков Нурлан Муханович ф-м.ғ.д., профессор

Жоспар

1. Бірінші ретті дифференциалдық теңдеу.
2. Эйлер әдісі.
3. Рунге-Кутта әдістері.
4. Есепті шығару үлгісі.

Мақсаты

Бірінші ретті дифференциалдық теңдеулердің сандық шешімін табу және есептеу бағдарламасын жүзеге асыру.

Бірінші ретті дифференциалдық теңдеу

Бірінші ретті дифференциалдық теңдеудің жалпы түрі:

$$y' = f(x, y) \quad (6.1a)$$

$$y(a) = \alpha \quad (6.1b)$$

мұндағы $y' = dy/dx$ және $f(x, y)$ берілген функция.

n ретті қарапайым дифференциалдық теңдеуді

$$y^{(n)} = f(x, y, y', y'', \dots, y^{(n-1)}) \quad (6.2)$$

$$y_0 = y, \quad y_1 = y', \quad y_2 = y'' \quad \dots \quad y_{n-1} = y^{(n-1)} \quad (6.3)$$

эквивалентті бірінші ретті теңдеулер мына түрде жазылады

$$y'_0 = y_1, \quad y'_1 = y_2, \quad y'_2 = y_3 \quad \dots \quad y'_n = f(x, y_0, y_1, y_2, \dots, y_{n-1}) \quad (6.4a)$$

$$y_0(a) = \alpha_0, y_1(a) = \alpha_1, y_2(a) = \alpha_2, \dots, y_{n-1}(a) = \alpha_{n-1} \quad (6.4b)$$

$$y' = F(x, y) \quad y(a) = \alpha \quad (6.5a)$$

$$\text{мұндағы } F(x, y) = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ f(x, y) \end{bmatrix} \quad (6.5b)$$

Эйлер әдісі

$$y(x+h) \approx y(x) + y'(x)h \quad (6.6)$$

(6.6) теңдеудегі қателік

$$E = \frac{1}{2} y''(\xi) h^2 = O(h^2), \quad x < \xi < x+h \quad (6.7)$$

$$E_{\text{ЖИН}} = nE = \frac{x_n - x_0}{h} E = O(h) \quad (6.8)$$

Euler модулі

```
##module euler
```

```
import numpy as np
```

```
def integrate(F,x,y,xStop,h):
```

```
    X = []
```

```
    Y = []
```

```
    X.append(x)
```

```
    Y.append(y)
```

```
    while x < xStop:
```

```
        h = min(h,xStop - x)
```

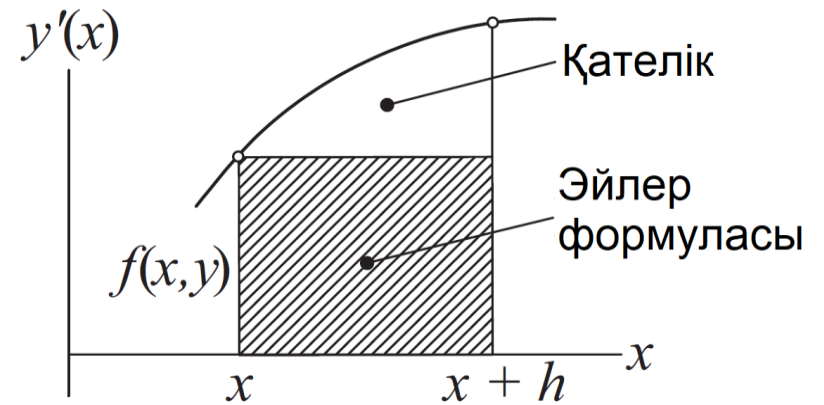
```
        y = y + h*F(x,y)
```

```
        x = x + h
```

```
        X.append(x)
```

```
        Y.append(y)
```

```
    return np.array(X),np.array(Y)
```



6.1-сурет. Эйлер формуласының графикалық көрінісі

Эйлер әдісі

МЫСАЛ 6.1

$$y'' = -0,1y' - x \quad y(0) = 0 \quad y'(0) = 1$$

бастапқы мән есебін Эйлер әдісімен $x=0$ -ден 2-ге дейін $h=0.05$ қадаммен интегралдаңыз.

Есептелген y мәнін аналитикалық шешіммен

$$y = 100x - 5x^2 + 990(e^{-0.1x} - 1)$$

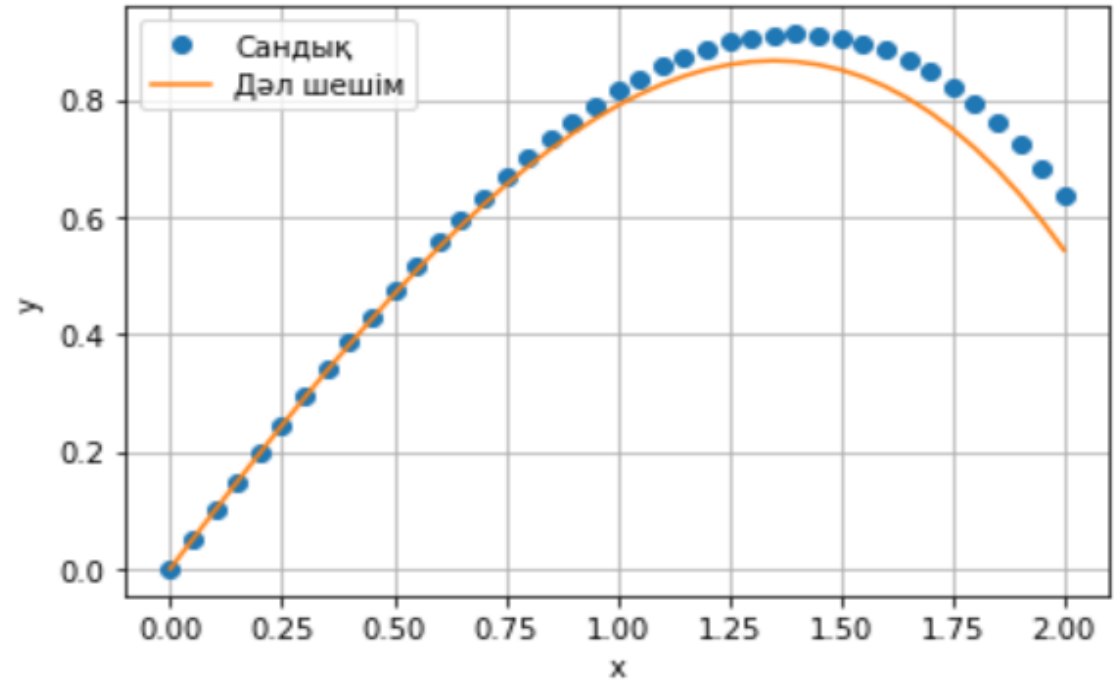
бірге сызыңыз.

Шешуі. $y_0 = y$ және $y_1 = y'$ белгілеуімен эквивалентті бірінші ретті теңдеулер мен бастапқы шарттар мына түрде болады

$$F(x, y) = \begin{bmatrix} y'_0 \\ y'_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 \\ -0,1y_1 - x \end{bmatrix} \quad y(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Бағдарламалық код дәріс материалында келтірілген.

Сандық шешімінің графигі



Рунге-Кутта әдістері. Екінші ретті Рунге-Кутта әдісі

$$y(x+h) = y(x) + c_0 F(x, y) \cdot h + c_1 F[x+ph, y+qhF(x, y)] \cdot h \quad (a)$$

$$y(x+h) = y(x) + y'(x)h + \frac{1}{2!} y''(x)h^2 = y(x) + F(x, y)h + \frac{1}{2} F'(x, y)h^2 \quad (b)$$

$$y(x+h) = y(x) + F(x, y)h + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial F}{\partial x} + \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\partial F}{\partial y_i} F_i(x, y) \right) h^2 \quad (c)$$

$$F[x+ph, y+qhF(x, y)] = F(x, y) + \frac{\partial F}{\partial x} ph + qh \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\partial F}{\partial y_i} F_i(x, y)$$

$$y(x+h) = y(x) + (c_0 + c_1)F(x, y) \cdot h + c_1 \left[\frac{\partial F}{\partial x} ph + qh \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\partial F}{\partial y_i} F_i(x, y) \right] \cdot h \quad (d)$$

$$c_0 + c_1 = 1, \quad c_1 p = \frac{1}{2}, \quad c_1 q = \frac{1}{2} \quad (e)$$

$c_0 = 0$ $c_1 = 1$ $p = 1/2$ $q = 1/2$ **Модификацияланған Эйлер әдісі**

$c_0 = 1/2$ $c_1 = 1/2$ $p = 1$ $q = 1$ **Хен әдісі**

$c_0 = 1/3$ $c_1 = 2/3$ $p = 3/4$ $q = 3/4$ **Ралстон әдісі**

Төртінші ретті Рунге-Кутта әдісі

$$K_0 = h \cdot F(x, y)$$

$$K_1 = h \cdot F\left(x + \frac{h}{2}, y + \frac{K_0}{2}\right)$$

$$K_2 = h \cdot F\left(x + \frac{h}{2}, y + \frac{K_1}{2}\right)$$

$$K_3 = h \cdot F(x + h, y + K_2)$$

$$y(x + h) = y(x) + \frac{1}{6}(K_0 + 2K_1 + 2K_2 + K_3)$$

run_kut4 модулі

```
## module run_kut4
```

```
import numpy as np
```

```
def integrate(F,x,y,xStop,h):
```

```
    def run_kut4(F,x,y,h):
```

```
        K0 = h*F(x,y)
```

```
        K1 = h*F(x + h/2.0, y + K0/2.0)
```

```
        K2 = h*F(x + h/2.0, y + K1/2.0)
```

```
        K3 = h*F(x + h, y + K2)
```

```
        return (K0 + 2.0*K1 + 2.0*K2 + K3)/6.0
```

```
X = []
```

```
Y = []
```

```
X.append(x)
```

```
Y.append(y)
```

```
while x < xStop:
```

```
    h = min(h,xStop - x)
```

```
    y = y + run_kut4(F,x,y,h)
```

```
    x = x + h
```

```
    X.append(x)
```

```
    Y.append(y)
```

```
return np.array(X),np.array(Y)
```

Есепті шығару үлгісі

МЫСАЛ 6.2

$$y'' = -0,1y' - x \quad y(0) = 0 \quad y'(0) = 1$$

бастапқы мән есебін төртінші ретті Рунге-Кутта әдісімен $x=0$ -ден 2-ге дейін $h=0.2$ қадаммен интегралдаңыз.

Есептелген y мәнін аналитикалық шешіммен

$$y = 100x - 5x^2 + 990(e^{-0.1x} - 1)$$

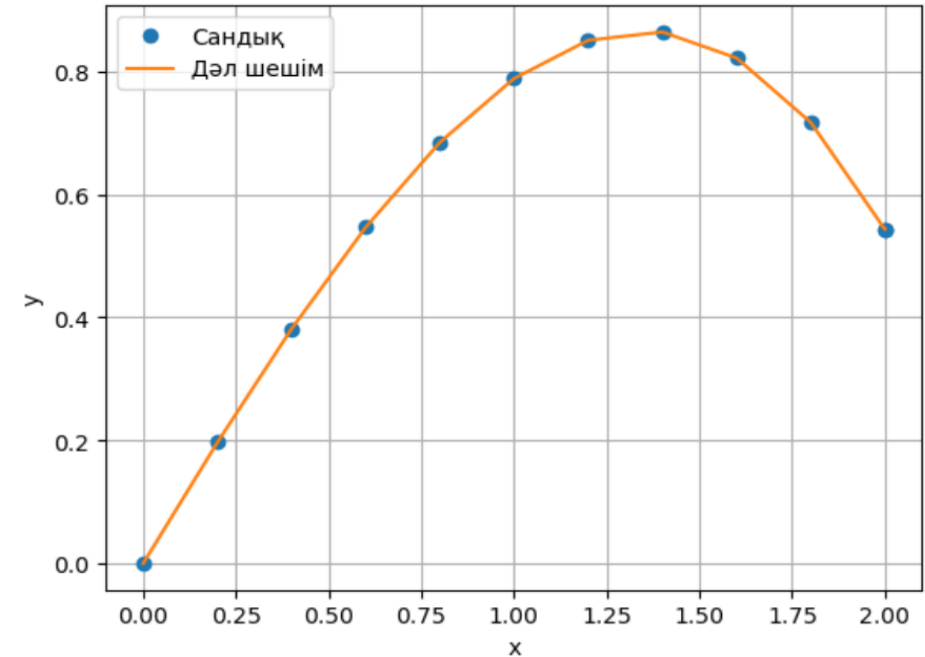
бірге сызыңыз.

Шешуі. $y_0 = y$ және $y_1 = y'$ белгілеуімен эквивалентті бірінші ретті теңдеулер мен бастапқы шарттар мына түрде болады

$$F(x, y) = \begin{bmatrix} y'_0 \\ y'_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 \\ -0,1y_1 - x \end{bmatrix} \quad y(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Бағдарламалық код дәріс материалында келтірілген.

Сандық шешімінің графигі



Қорытынды

1. Бірінші ретті дифференциалдық теңдеу сандық шешімі.
2. Эйлер әдісі.
3. Рунге-Куттаның екінші, төртінші ретті әдістері.
4. Есепті шығарудың сандық үлгісі.

Пайдаланылган әдебиеттер тізімі

1. Jaan Kiusalaas. Numerical methods in engineering with Python. Cambridge University Press.
ISBN 978-1-107-03385
2. Вабищевич П.Н. Численные методы: Вычислительный практикум. — М.: Книжный дом «ЛИБРОКОМ», 2010. — 320 с.
3. Киреев В. И., Пантелеев А. В. Численные методы в примерах и задачах: Учебное пособие. — СПб.: Издательство «Лань», 2015. — 448 с.