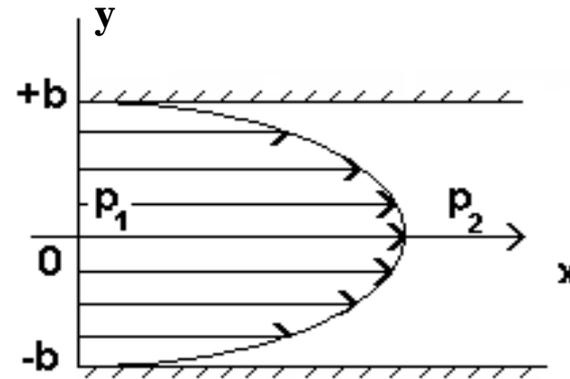
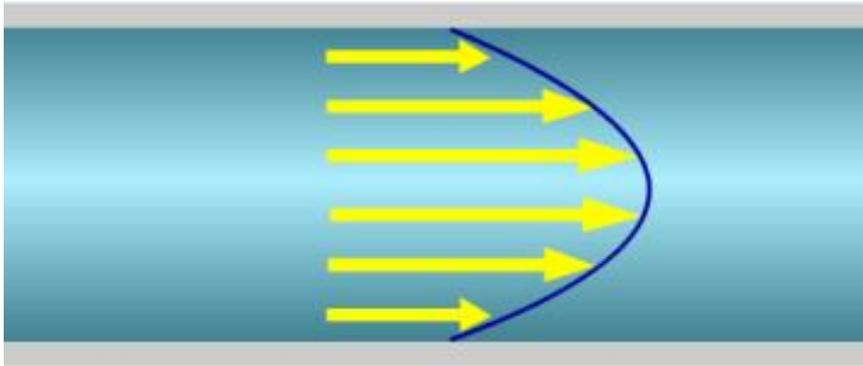


# ПЛОСКОЕ ТЕЧЕНИЕ ПУАЗЕЙЛЯ



$$p_1 > p_2; \quad \frac{\partial p}{\partial x} < 0$$

Расстояние между стенками:  $2b$

$$\frac{\partial p}{\partial x} \neq 0; \quad p_1 \neq p_2$$

## Динамическая задача

$$\frac{dp}{dx} = \mu \frac{d^2 u}{dy^2}$$

$$\frac{dp}{dy} = \frac{dp}{dz} = 0$$

Граничные условия:

$$y = +b \quad \longrightarrow \quad u = 0$$

$$y = -b \quad \longrightarrow \quad u = 0$$

Зависимость от различных переменных  $\longrightarrow \frac{dp}{dx} = const \longrightarrow p = Ax + C$

**Проинтегрируем уравнение движения:**

$$\frac{d^2 u}{dy^2} = \frac{1}{\mu} \frac{dp}{dx}$$

$$\frac{du}{dy} = \frac{1}{\mu} \frac{dp}{dx} y + C_1$$

$$u = \frac{1}{2\mu} \frac{dp}{dx} y^2 + C_1 y + C_2$$

**Определим  $C_1$  и  $C_2$  из граничных условий:**

$$y = b; u = 0 \quad 0 = \frac{1}{\mu} \frac{dp}{dx} \frac{b^2}{2} + C_1 b + C_2 \quad (4)$$

$$y = -b; u = 0 \quad 0 = \frac{1}{\mu} \frac{dp}{dx} \frac{b^2}{2} - C_1 b + C_2 \quad (5)$$

$$\rightarrow C_1 = 0; \quad C_2 = -\frac{1}{\mu} \frac{dp}{dx} \frac{b^2}{2}$$

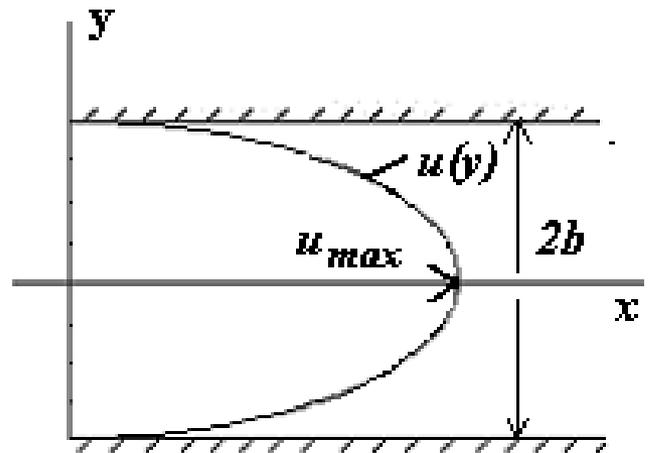
$$u = \frac{1}{2\mu} \frac{dp}{dx} y^2 - \frac{1}{\mu} \frac{dp}{dx} \frac{b^2}{2} = -\frac{1}{2\mu} \frac{dp}{dx} b^2 \left( 1 - \frac{y^2}{b^2} \right) \quad \text{- профиль скорости для слоистого течения Пуазейля}$$

$$u = -\frac{1}{2\mu} \frac{dp}{dx} b^2 \left( 1 - \frac{y^2}{b^2} \right)$$

При  $y=0$ :  $u(0) = u_{max}$

$$u_{max} = -\frac{1}{2\mu} \frac{dp}{dx} b^2$$

$$u = u_{max} \left( 1 - \frac{y^2}{b^2} \right) \text{ - профиль скорости.}$$



$$\frac{u}{u_{max}} = 1 - \frac{y^2}{b^2}$$

- безразмерный профиль скорости.

## РАСХОД ЖИДКОСТИ $Q$ :

- количество жидкости, протекающей в единицу времени через поперечное сечение канала.

$$Q = \int_{-b}^{+b} u dy = u_{max} \int_{-b}^{+b} \left(1 - \frac{y^2}{b^2}\right) dy = u_{max} \left[ y \Big|_{-b}^{+b} - \frac{y^3}{3b^2} \Big|_{-b}^{+b} \right] = u_{max} \left[ 2b - \frac{2}{3} \frac{b^3}{b^2} \right] =$$
$$= u_{max} \left( 2b - \frac{2}{3} b \right) = \frac{4}{3} b u_{max}$$

Полученное решение справедливо для любого  $Re < Re_{кр}$   $Re_{кр} = 2300$ .

$$u_{max} = -\frac{1}{2\mu} \frac{dp}{dx} b^2 \quad \longrightarrow \quad Q = -\frac{4}{3} b \frac{1}{2\mu} \frac{dp}{dx} b^2 = -\frac{2}{3} \frac{b^3}{\mu} \frac{dp}{dx}$$

$$Q = -\frac{2}{3} \frac{b^3}{\mu} \frac{dp}{dx}$$

## СРЕДНЯЯ СКОРОСТЬ $u_{cp}$

$$u_{cp} = \frac{\int_0^b u dy}{b} =$$

$u = u_{max} \left(1 - \frac{y^2}{b^2}\right)$
$y = b \quad \frac{y^2}{b^2} = 1$
$y = 0 \quad \frac{y^2}{b^2} = 0$

$$= \int_0^1 u d\left(\frac{y}{b}\right) = u_{max} \int_0^1 \left(1 - \frac{y^2}{b^2}\right) d\frac{y}{b} = \frac{2}{3} u_{max}$$

$$u_{cp} = \frac{2}{3} u_{max}$$

$$\int_0^1 \left(1 - \frac{y^2}{b^2}\right) d\frac{y}{b} = \frac{y}{b} \Big|_0^1 - \frac{1}{3} \frac{y^3}{b^3} \Big|_0^1 = 1 - 0 - \frac{1}{3} - 0 = \frac{2}{3}$$

$$u = u_{max} \left(1 - \frac{y^2}{b^2}\right)$$

Вычислим градиент давления вдоль канала:

$$\frac{dp}{dx} = \mu \frac{d^2 u}{dy^2} \rightarrow \frac{d^2 u}{dy^2} = \frac{d^2}{dy^2} \left( u_{max} - u_{max} \frac{y^2}{b^2} \right) = -\frac{u_{max}}{b^2} \frac{d^2}{dy^2} (y^2) = -\frac{2u_{max}}{b^2}$$

$$\frac{dp}{dx} = -2\mu \frac{u_{max}}{b^2}$$

Найдем изменение давления на участке конечной длины  $dx = l$

$$dp = -2\mu \frac{u_{max}}{b^2} dx; \quad u_{max} = \frac{3}{2} u_{cp} \longrightarrow dp = \nabla p = -2\mu \frac{u_{max}}{b^2} l$$

$$h = 2b \longrightarrow b = \frac{h}{2} \longrightarrow b^2 = \frac{h^2}{4}$$

$$\nabla p = -2\mu \frac{3 u_{cp} l \cdot 4}{2 h^2} = -12\mu \frac{u_{cp} l}{h^2} = \left| Re = \frac{\rho u_{cp} h}{\mu} \right| = -12\mu \frac{u_{cp} l}{h \cdot h} \cdot \frac{\rho}{\rho} \cdot \frac{u_{cp}}{u_{cp}} =$$

$$= -12 \frac{u_{cp}^2 \cdot \rho}{Re} \cdot \frac{l}{h} \cdot \frac{2}{2} = -\frac{24}{Re} u_{cp}^2 \cdot \frac{l}{h} \cdot \frac{\rho}{2} = \left| \lambda = \frac{24}{Re} \right| = -\lambda \frac{\rho}{2} u_{cp}^2 \cdot \frac{l}{h}$$

$\lambda$  - коэффициент сопротивления движению жидкости  
или коэффициент потерь на трение.

$$\boxed{\nabla p = -\lambda \frac{\rho}{2} u_{cp}^2 \cdot \frac{l}{h}} \quad \text{- формула Дарси}$$

Вычислим трение  $\tau_w$  на стенке канала:

$$u = -\frac{1}{2\mu} \frac{dp}{dx} b^2 \left( 1 - \frac{y^2}{b^2} \right)$$

$$\tau_w \Big|_{y=-b} = \mu \frac{du}{dy} \Big|_{y=-b} = \mu \frac{d}{dy} \left( -\frac{1}{2\mu} \frac{dp}{dx} b^2 + \frac{1}{2\mu} \frac{dp}{dx} b^2 \frac{y^2}{b^2} \right) \Big|_{y=-b} = \frac{1}{2} \frac{dp}{dx} \frac{y}{b} \Big|_{y=-b} =$$

$$= -\frac{dp}{dx} b = \left| \begin{array}{l} \frac{dp}{dx} = -2\mu \frac{u_{max}}{b^2} \\ u_{max} = \frac{3}{2} u_{cp} \end{array} \right| = \mu \frac{3 u_{cp}}{b} = \left| b = \frac{h}{2} \right| = 3\mu u_{cp} \frac{2}{h} = 6 \frac{\mu u_{cp}}{h}$$

Найдем коэффициент поверхностного трения  $C_f$ :

$$C_f = \frac{\tau_w}{\rho \frac{u_{cp}^2}{2}} = \frac{6\mu}{h} \cdot \frac{2}{\rho u_{cp}} = \frac{12\mu}{\rho u_{cp} h} = \frac{12}{Re} \quad \text{или} \quad C_f = \frac{\lambda}{2}$$



Динамическая задача решена