Лекция 11. Исследование функции: достаточное условие локального экстремума, выпуклые функции, неравенство Йенсена, асимптоты

Определение. Точка a называется точкой локального минимума (максимума) функкии f, если f определена в окрестности $a(U(a))$ и $\forall x \in U(a) f(x) \geq f(a)$ $(f(x) \leq f(a)$).

Если $\forall x \in U'(a)$ неравенства строгие, то точка a - точка строгого локального (минимума) максимума.

Точки локального минимума или максимума называются точками локального экстремума f.

Теорема Ферма - необходимое условие локального экстремума.
Если функция f дифференцируема в точке a и точка a - точка внутреннего локального экстремума, то $f'(a) = 0$.

После теоремы Лагранжа было доказано, что

1. если f дифференцируема на $(a;b)$, то $f' \geq 0 \Longleftrightarrow f$ не убывает
2. если f дифференцируема на $(a;b)$ и $f > 0(f < 0)$, то f возрастает (убывает).

Утверждение. Пусть f непрерывна в окрестности $U(a)$ и дифферениируема ${}_8U'(a)$

1. если $f' \geq 0$ при $x < a$ и $f' \leq 0$ при $x > a$, то a - точка локального максимума (если строгие неравенства, то строгого локального максимума)
2. если $f' \leq 0$ при $x < a$ и $f' \geq 0$ при $x > a$, то a - точка локального минимума.

Достаточное условие локального экстремума

Теорема (достаточное условие локального экстремума). Пусть $fn(\geq 2)$ раз дифферениируема в точке а (f определена в $U(a)$) и $f'(a) = \ldots = f^{(n-1)}(a) = 0$, но $f^{(n)}(a) \neq 0$.

Если $n = 2k+1$, то а не является точкой локального экстремума.
Если $n = 2k$, то

1. $f^{(n)}(a) > 0 \Longrightarrow a$ - точка строгого локального минимума
2. $f^{(n)}(a) < 0 \Longrightarrow a$-точка строгого локального максимума

☐ Доказательство. По формуле Тейлора

$$f(x) = f(a) + \frac{f^{(n)}(a)(x-a)^n}{n!} + \bar{o}\left((x-a)^n\right).$$

$$f(x) - f(a) = (x-a)^n \left(\frac{f^{(n)}(a)}{n!} + \bar{o}(1) \right).$$

Так как $\bar{o}(1)$ - функция, стремящаяся к 0 при $x \to a$, то существует $U'(a)$ такая, что знак $\left(\frac{f^{(n)}(a)}{n!} + \bar{o}(1)\right)$ совпадает со знаком $f^{(n)}(a)$.

- $n = 2k+1 \Longrightarrow (x-a)^n$ меняет знак при переходе x через $a \Longrightarrow$ меняет знак выражение $f(x) - f(a) \Longrightarrow$ точка a не является экстремумом.
- $n = 2k \Longrightarrow (x-a)^n > 0 \forall x \in U'(a) \Longrightarrow$ знак $f(x) - f(a)$ совпадает со знаком $f^{(n)}$. Следовательно, если $f^{(n)} > 0$, то $f(x) - f(a) > 0$ и $a-$ строгий минимум. Если $f^{(n)} < 0$, то a - строгий максимум.

■

Выпуклые функции

Пусть f определена на интервале $(a;b)$.
Определение. Функция f называется выпуклой функцией на интервале $(a;b)$, если $\forall x_1, x_2 \in (a;b)$ $\forall \alpha \in [0;1]$

$$f(\alpha x_1 + (1-\alpha)x_2) \leq \alpha f(x_1) + (1-\alpha) f(x_2)$$

Геометрический смысл: значение функции не больше значения на хорде (хорда не ниже дуги графика, которую она стягивает).

Утверждение. Функция f выпукла на $(a;b) \Longleftrightarrow \forall x_1 < x < x_2$ из $(a;b)$

$$\frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} \leq \frac{f(x_2) - f(x)}{x_2 - x}$$

□ Доказательство. По определению

$$f(\alpha x_1 + (1-\alpha)x_2) \leq \alpha f(x_1) + (1-\alpha) f(x_2),$$
$$\alpha x_1 + (1-\alpha)x_2 = x,$$
$$\alpha = \frac{x - x_2}{x_1 - x_2} = \frac{x_2 - x}{x_2 - x_1},$$
$$1 - \alpha = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1},$$
$$f(x) \leq \frac{x_2 - x}{x_2 - x_1} f(x_1) + \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} f(x_2) \Bigg| \quad \text{умножим на} \quad (x_2 - x_1),$$
$$(x_2 - x_1) f(x) \leq (x_2 - x_1) f(x_1) + (x - x_1) f(x_2),$$
$$(x_2 - x)(f(x) - f(x_1)) \leq (x - x_1)(f(x_2) - f(x)),$$
$$\frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} \leq \frac{f(x_2) - f(x)}{x_2 - x}.$$

■

Теорема. Пусть f выпукла на $(a;b)$, тогда $\forall [c;d] \subset (a;b) \exists M > 0 :$

$$|f(x)-f(y)| \leq M|x-y| \quad \forall x, y \in [c; d]$$

В частности, выпуклые функиии на интервале непрерывны.

□ Доказательство.

$$\frac{f(c)-f(u)}{c-u} \leq \frac{f(y)-f(x)}{y-x} \leq \frac{f(v)-f(d)}{v-d}.$$

Берем $M>0$:

$$-M \leq \frac{f(c)-f(u)}{c-u}, \quad M \geq \frac{f(v)-f(d)}{v-d}.$$

Для всяких $x, y \in [c; d]$

$$-M \leq \frac{f(x)-f(y)}{x-y} \leq M.$$

■

Теорема. Пусть f дифферениируема на интервале $(a; b)$. Тогда следующие утверждения эквивалентны:

1. f выпуклая
2. f не убывает на $(a; b)$
3. $f(x) \geq f(y)+f'(y)(x-y)$.

□ Доказательство.

$1 \Rightarrow 2$ Рассмотрим точки $u<x_1<x_2<v$

$$\frac{f\left(x_1\right)-f(u)}{x_1-u} \leq \frac{f(v)-f\left(x_2\right)}{v-x_2} \longrightarrow f'\left(x_2\right) \text{ при } v \rightarrow x_2$$

Теперь пусть $u \longrightarrow x_1$. По аналогии получим

$$f'\left(x_1\right) \leq f'\left(x_2\right)$$

$2 \Rightarrow 3$

а) Пусть $x>y$. При делении на $(x-y)$ знак не изменится

$$\frac{f(x)-f(y)}{x-y} \geq f(y) \Longrightarrow f'(c) \geq f'(y)$$

- т.к. по пункту 2 производная не убывает, точка c лежит правее y.
  б) Пусть $x<y$. Доказательство проводим аналогично пункту а) (и знак, и положение точки по отношению к y поменяется).

$3 \Rightarrow 1$ Рассмотрим точки $x_1<x<x_2$. Докажем, что

$$\frac{f(x)-f(x_1)}{x-x_1} \leq \frac{f(x_2)-f(x)}{x_2-x} \tag{11.1}$$

Сравним правую и левую часть с $f'(x)$. Верно ли, что

$$\frac{f(x)-f(x_1)}{x-x_1} \leq f'(x)?$$

Имеем: $f(x)+f'(x)(x_1-x) \leq f(x_1)$ – в точности свойство 3, где $x \sim x_1, y \sim x$, а значит, неравенство верно.

Верно ли, что

$$\frac{f(x_2)-f(x)}{x_2-x} \geq f'(x)?$$

Имеем: $f(x)+f'(x)(x_2-x) \leq f(x_2)$ – в точности свойство 3, где $x \sim x_2, y \sim x$, а значит, неравенство верно.

Следовательно, неравенство (11.1) верно. ■

Следствие. Пусть f дважды диффереиируема на $(\ a; b\ )$.

Тогда f выпукла $\Longleftrightarrow f'' \geq 0$.

□ Доказательство. Производная f' не убывает $\Longleftrightarrow f'' \geq 0$.

Неравенство Йенсена

Теорема (Неравенство Йенсена). Пусть
f выпукла на интервале $(a; b)$;
$\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in [0; 1]$;
$\sum \alpha_k = 1,\ x_1, \ldots, x_n \in (a; b)$.

Тогда

$$f(\alpha_1 x_1 + \ldots + \alpha_n x_n) \leq \alpha_1 f(x_1) + \ldots \alpha_n f(x_n)$$

□ Доказательство. Будем доказывать по индукции. Предположим, что для n доказано. Докажем для $n+1$.

$$f(\alpha_1 x_1 + \ldots + \alpha_{n+1} x_{n+1}) =$$
$$= f\left((\alpha_1 + \ldots + \alpha_n)\left(\frac{\alpha_1}{\alpha_1 + \ldots + \alpha_n} x_1 + \ldots + \frac{\alpha_n}{\alpha_1 + \ldots + \alpha_n} x_n\right) + \alpha_{n+1} x_n\right) \leq$$
$$\leq (\alpha_1 + \ldots + \alpha_n) f\left(\frac{\alpha_1}{\alpha_1 + \ldots + \alpha_n} x_1 + \ldots + \frac{\alpha_n}{\alpha_1 + \ldots + \alpha_n} x_n\right) + \alpha_{n+1} f(x_{n+1}) \leq *$$

Отделили последнее слагаемое, а остальные записали удобным нам образом. Далее можем вынести $(\alpha_1 + \ldots + \alpha_n)$, так как если бы этот множитель был бы нулем, то $\alpha_{n+1} = 1$, и это тривиальная очевидная ситуация. Обозначим $(\alpha_1 + \ldots + \alpha_n) = A$

$$* \leq A\left(\frac{\alpha_1}{A} f\left(x_1\right)+\ldots+\frac{\alpha_n}{A} f\left(x_n\right)\right)+\alpha_{n+1} f\left(x_{n+1}\right)=\alpha_1 f\left(x_1\right)+\ldots+\alpha_{n+1} f\left(x_{n+1}\right).$$

■

Пример 67. 1) Пусть $x_i > 0$. Тогда

$$\frac{x_1+\ldots+x_n}{n} \geq \sqrt[n]{x_1 \ldots x_n}$$

□ Доказательство. Прологарифмируем:

$$\ln\left(\frac{x_1+\ldots+x_n}{n}\right) \geq \frac{1}{n} \ln x_1+\ldots+\frac{1}{n} \ln x_n$$

$$-\ln\left(\frac{x_1+\ldots+x_n}{n}\right) \geq \frac{1}{n}\left(-\ln x_1\right)+\ldots+\frac{1}{n}\left(-\ln x_n\right).$$

Функция $f(x)=-\ln x$ выпуклая.

$$f'(x)=-\frac{1}{x}, \quad f''(x)=\frac{1}{x^2}>0 \Longrightarrow$$

выпукла $\Longrightarrow$ неравенство верно.

2) Энтропия.

Функция $x \ln x-$ выпуклая: $(x \ln x)'=\frac{1}{x}>0$.

Положим $H=-\sum_{i=1}^n p_i \ln p_i-$ энтропия. Сравним H и $\ln n$.

$$-\frac{1}{n} \ln n=\left(\frac{p_1+\ldots+p_n}{n}\right) \ln(\frac{p_1+\ldots+p_n}{n}\right) \leq \left.\frac{1}{n} p_1 \ln p_1+\ldots+\frac{1}{n} p_n \ln p_n\right| \cdot(-n).$$

$$-\sum_{i=1}^n p_i \ln p_i \leq \ln n.$$

Итак, H меньше энтропии в случае, когда все $p_i=\frac{1}{n}$. Значит, энтропия всегда меньше или равна, чем энтропия в самой неопределенной ситуации. Самая маленькая энтропия - энтропия, когда один из исходов точно известен.

Строгая выпуклость

Определение. Функция f на интервале $(a;b)$ называется строго выпуклой, если $\forall x_1, x_2 \in (a;b), x_1 \neq x_2$ и $\forall \alpha \in (0;1)$:

$$f\left(\alpha x_1+(1-\alpha) x_2\right)<\alpha f\left(x_1\right)+(1-\alpha) f\left(x_2\right).$$

Функция строго выпукла $\Longleftrightarrow$ при $x_1<x<x_2$

$$\frac{f(x)-f\left(x_1\right)}{x-x_1}<\frac{f\left(x_2\right)-f(x)}{x_2-x}.$$

Теорема. Пусть f дифферениируема на ($a;b$). Тогда следующие утверждения равносильны

1. f строго выпуклая
2. f' строго возрастает
3. $f(x)>f(y)+f'(y)(x-y)\forall x\neq y$.

□ Доказательство. $1 \Longleftrightarrow 2$

$$f'\left(x_1\right)\leq f'\left(c_1\right)=\frac{f(x)-f\left(x_1\right)}{x-x_1}<\frac{f\left(x_2\right)-f(x)}{x_2-x}=f'\left(c_2\right)\leq f'\left(x_2\right).$$

$2\Longrightarrow 3 f(x)>f(y)+f'(y)(x-y), x>y$.

$$f'(c)=\frac{f(x)-f(y)}{x-y}>f'(y).$$

Аналогично для $x<y$.

$3\Longrightarrow 1$ Пусть $x_1<x<x_2$

$$\frac{f(x)-f\left(x_1\right)}{x-x_1}<f'(x)<\frac{f\left(x_2\right)-f(x)}{x_2-x}.$$

■

Следствие. Пусть f дважды дифферениируема на $(a;b)$. Если $f''>0$, то f строго выпукла.

Замечание. 1) Выпуклые функции иногда называются «выпуклые вниз».
2) Если - f выпукла, то f называют «выпуклой вверх».
3) Если f определена в окрестности $U(a)$ и при $x<a$ функция f выпукла (вогнута), при $x>a$ функция f вогнута (выпукла), т.е. f меняет выпуклость в точке a, то говорят, что a - точка перегиба f.

Асимптоты

Асимптотой графика функции f называют прямую, к которой график функции "неограниченно приближается когда точка $(x,f(x))$ графика уходит в бесконечность. Различают вертикальные и наклонные (в частности, горизонтальные) асимптоты.

Определение. Пусть функция f определена в проколотой окрестности точки a, двусторонней или односторонней. Прямую $x=$ назовём вертикальной асимптотой графика функиии f, если хотя бы один из пределов $\lim\limits_{x\to a\pm 0} f(x)=\pm\infty$.

Примеры. 1. $y = \frac{1}{x}$. Функция определена на всей вещественной оси, кроме точки $a = 0$.

$$\lim_{x\to -0}\frac{1}{x} = -\infty; \quad \lim_{x\to +0}\frac{1}{x} = +\infty.$$

Прямая $x = 0-$ вертикальная асимптота.

2. $y = \frac{1}{x^2}$. Функция определена на всей вещественной оси, кроме точки $a = 0$.

$$\lim_{x\to -0}\frac{1}{x^2} = +\infty; \quad \lim_{x\to +0}\frac{1}{x^2} = +\infty$$

Прямая $x = 0$ - вертикальная асимптота.

3. $y = \ln x$. Функция определена на $(0; +\infty)$.

$$\lim_{x\to +0}\ln x = -\infty$$

Прямая $x = 0-$ вертикальная асимптота.

4. $y = e^{1/x}$. Функция определена на всей вещественной оси, кроме точки $a = 0$.

$$\lim_{x\to -0} e^{1/x} = 0; \quad \lim_{x\to +0} e^{1/x} = +\infty$$

Прямая $x = 0-$ вертикальная асимптота.

Определение. Пусть функиия f определена в окрестности (правосторонней окрестности, левосторонней окрестности) бесконечно удалённой точки. Прямую $y = kx + b$ назовём астмптотой графика функции f при стремлении $x\kappa\infty, (+\infty, -\infty)$, если

$$\lim_{x\to\infty}(f(x) - (kx + b)) = 0 \tag{11.2}$$

$$\left(\lim_{x\to +\infty}(f(x) - (kx + b)) = 0, \quad \lim_{x\to -\infty}(f(x) - (kx + b)) = 0\right).$$

Теорема. Пусть функция f определена в окрестности бесконечно удалённой точки. Прямая $y = kx + b$ служит асимптотой графика функиии f при стремлении x х ∞ тогда и толвко тогда, когда выполнены следующие условия:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x} = k; \quad \lim_{x\to\infty}(f(x) - kx) = b. \tag{11.3}$$

□ Доказательство. Пусть прямая $y = kx+b$ служит асимптотой графика функции f при стремлении x к ∞. Тогда выполнено (4.94) и, используя теорему 3.15 , можно утверждать, что $f(x) - kx - b = \alpha(x)$, где $\alpha(x)$ - бесконечно малая функция при $x \to \infty$. Отсюда имеем:

$$f(x) = kx + b + \alpha(x) \tag{11.4}$$

или, разделив на x, $\frac{f(x)}{x} = k + \frac{b}{x} + \frac{\alpha(x)}{x}$. Устремив здесь x к ∞, получим первое из условий (11.3). Второе из условий (11.3) получим, если в (11.4) перенесём слагаемое kx в левую часть и перейдём к пределу при $x \to \infty$. Необходимость доказана.

Пусть выполнены условия (11.3). Второе из них эквивалентно (11.2), следовательно, прямая $y = kx + b$– наклонная асимптота. Доказана и достаточность. ■

Условия существования наклонной асимптоты при $x \to \pm\infty$ формулируются и доказываются совершенно аналогично.

Пример. Найти наклонные асимптоты графика функции

$$y = \frac{x^3}{(x+1)^2}$$

Решение. Данная функция определена на всей вещественной оси, кроме точки $x = -1$, поэтому вопрос о существовании у её графика наклонных асимптот правомерен. Попробуем найти k и b при $x \to \infty$, используя формулы 4.95.

$$k = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^3}{x(x+1)^2} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^3}{x^3(1+1/x)^2} = 1,$$

$$b = \lim_{x\to\infty} (f(x) - kx) = \lim_{x\to\infty} \left(\frac{x^3}{(x+1)^2} - x \right) = -\lim_{x\to\infty} \frac{2x^2+x}{(x+1)^2} = -\lim_{x\to\infty} \frac{2+1/x}{(1+1/x)^2} = -2.$$

Поскольку k и b найдены, то прямая $y = x - 2$ служит наклонной асимптотой графика данной функции при $x \to \infty$.

Пример. Найти наклонные асимптоты графика функции

$$y = x + e^{-x}$$

Решение. Данная функция определена на всей вещественной прямой. Так как поведение функции e^{-x} резко различно при $x \to +\infty$ и $x \to -\infty$, то будем искать наклонные асимптоты при $x \to +\infty$ и при $x \to -\infty$ отдельно.

a) Пусть $x \to +\infty$.

$$k = \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x+e^{-x}}{x} = \lim_{x\to+\infty} \left(1 + \frac{e^{-x}}{x}\right) = 1$$

$$b = \lim_{x\to+\infty} (f(x) - kx) = \lim_{x\to+\infty} e^{-x} = 0.$$

Итак, прямая $y = x$ является наклонной асимптотой графика данной функции при $x \to +\infty$.

b) Пусть $x \to -\infty$.

$$k = \lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{x+e^{-x}}{x} = \lim_{x\to-\infty} \left(1 + \frac{e^{-x}}{x}\right) = +\infty.$$

Поскольку k найти не удалось, то график данной функции при $x \to -\infty$ асимптоты не имеет.

Пример. Найти наклонные асимптоты графика функции

$$y = x \operatorname{arctg} x$$

Решение. Данная функция определена на всей вещественной прямой. Так как поведение функции $\operatorname{arctg} x$ при $x \to +\infty$ и при $x \to -\infty$ тоже различно, то снова будем искать асимптоты отдельно при $x \to +\infty$ и при $x \to -\infty$.

a) $x \to +\infty$.

$$k = \lim_{x\to+\infty} \frac{x \operatorname{arctg} x}{x} = \lim_{x\to+\infty} \operatorname{arctg} x = \frac{\pi}{2};$$
$$b = \lim_{x\to+\infty} \left(x \operatorname{arctg} x - \frac{\pi}{2} \cdot x \right) = \lim_{x\to+\infty} x \left(\operatorname{arctg} x - \frac{\pi}{2} \right) = (\infty \cdot 0) =$$
$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{\operatorname{arctg} x - \pi/2}{x^{-1}} = \left(\frac{0}{0} \right) = \lim_{x\to+\infty} \frac{1/(1+x)^2}{-1/x^2} = -1.$$

(При раскрытии неопределённости было использовано правило Лопиталя.)

Итак, при $x \to +\infty$ график функции имеет асимптотой прямую $y = \frac{\pi}{2}x - 1$.

b) Так как рассматриваемая функция - чётная, то её график симметричен относительно оси ординат, пюэтому и асимптота при $x \to -\infty$ будет симметрична асимптоте при $x \to +\infty$, то есть это будет прямая $y = -\frac{\pi}{2}x - 1$