

Дәріс 4

Туынды ұғымы. Туынды туралы негізгі теоремалар. Функцияның дифференциалдануы.

Дифференциал.

Дифференциалдаудың негізгі ережелері. Жоғары ретті

туындылар мен дифференциалдар.

Тлеулесова А.М.

Анықтама. Аргумент x -тің x_0 нүктесіндегі өсімшесі деп $\Delta x = x - x_0$ айырмасын атайды.

Анықтама. $y = f(x)$ функцияның x_0 нүктесіндегі өсімшесі деп $\Delta f = f(x) - f(x_0) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$ айырмасын айтады.

Анықтама. Егер $y = f(x)$ функциясы x_0 нүктесінің маңайында анықталған және $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta f = 0$ болса, онда ол x_0 нүктесінде үзіліссіз деп аталады. /

Функция өсімшесі

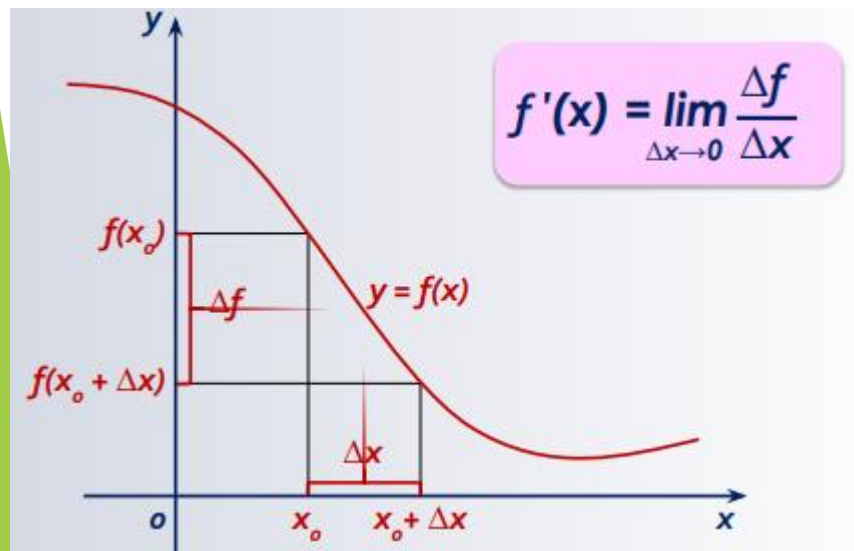
$\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$ функцияның өсімшесі

2-анықтама. Егер $y = f(x)$ функциясы x_0 нүктесінде анықталса және $\lim_{x \rightarrow 0} \Delta y = 0$ теңдігі орындалса, онда ол функцияны x_0 нүктесінде үзіліссіз дейді.

Функцияның туындысы

$$y'(x_0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

$$y'(x_0), \quad \frac{df}{dx}(x_0), \quad y' \Big|_{x=x_0}, \quad \frac{df}{dx} \Big|_{x=x_0}, \quad f'(x_0)$$



Теорема. Егер $y = f(x)$ функциясы x_0 нүктесінде дифференциалданатын функция болса, онда ол бұл нүктеде үзіліссіз болады.

1-мысал. $y = x^2$ функциясының туындысын тап.

Шешуі:

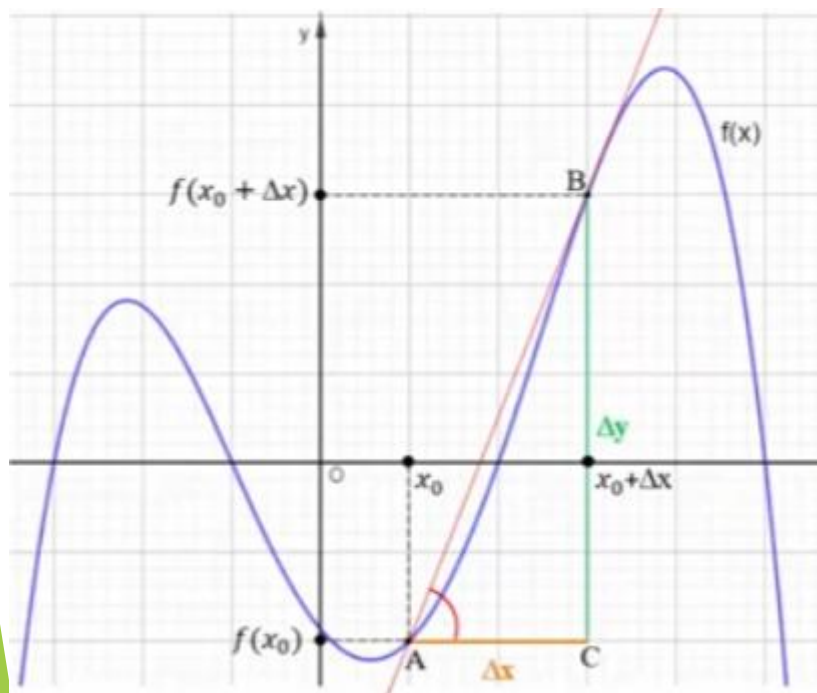
- x аргументіне Δx өсімшесін береміз;
- функция өсімшесін табамыз: Δy : $\Delta y = (x + \Delta x)^2 - x^2 = 2x \cdot \Delta x + (\Delta x)^2$

- $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ қатынасын табайық, $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{2x \cdot \Delta x + (\Delta x)^2}{\Delta x} = 2x + \Delta x$

- осы қатынастың шегін табайық: $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (2x + \Delta x) = 2x$

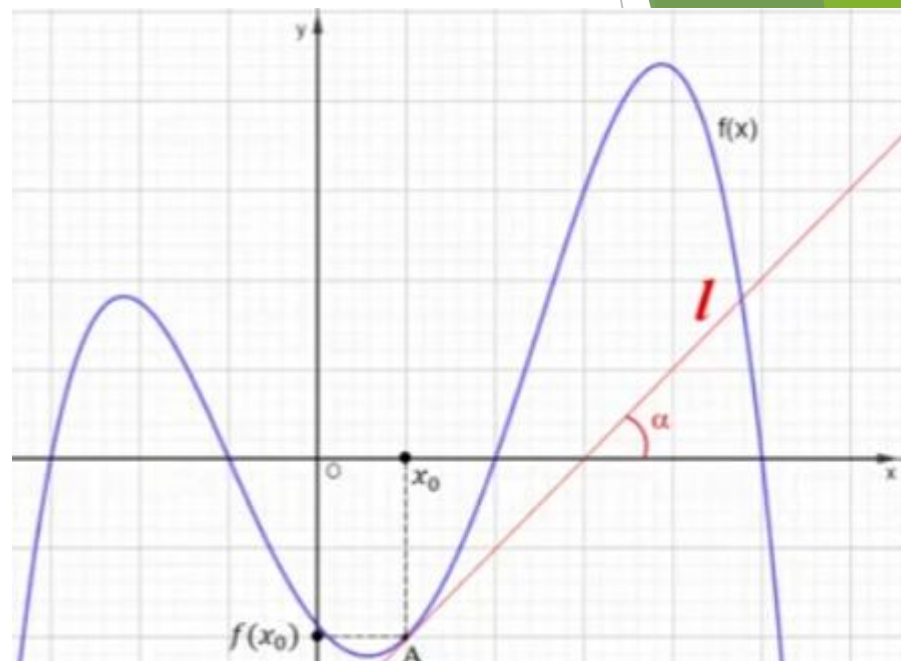
Осылайшы, $(x^2)' = 2x$.

Туындының геометриялық мағанасы



$$f'(x_0) = k$$

$$l: y - y_0 = k(x - x_0)$$



$$y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0) -$$

$$y = y_0 + f'(x_0)(x - x_0)$$

$$y_0 = f(x_0)$$

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

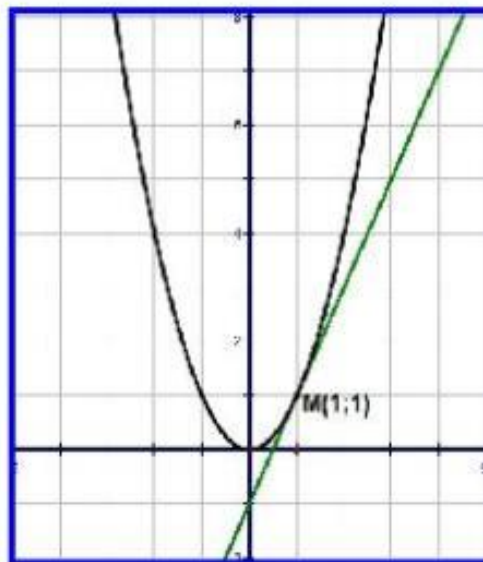
Жанама теңдеуі

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

Мысал:

$y = x^2$ функциясына $M(1;1)$ нүктесінде жүргізілген жанама теңдеуі.

Шешуі:



$$f(1) = 1^2 = 1$$

$$f'(x) = 2x$$

$$f'(1) = 2 \cdot 1 = 2$$

$$y = f(a) + f'(a)(x - a)$$

$$y = 1 + 2 \cdot (x - 1)$$

$$y = 1 + 2x - 2$$

$$y = 2x - 1$$

Туындының механикалық мағанасы

Егер x – айнымалысын уақыт деп есептеп, $f(x)$ – функциясы дененің жүрген жолын сипаттаса, онда $f'(x)$ дененің x – уақытындағы жылдамдығын білдіреді.

Жалпылай айтсақ, $y = f(x)$ функциясы қандайда физикалық процесті көрсетсе, онда туындысы осы процестің өту жылдамдығын көрсетеді.

Екі функцияның қосындысының (айырмасының) туындысы осы функциялардың туындыларының қосындысына (айырмасына) тең:

$$(u \pm v)' = u' \pm v'$$

$$(u \cdot v)' = u'v + uv'$$

Екі функцияның көбейтіндісінің туындысы бірінші көбейткіштердің туындысын екінші көбейткішке көбейтіп, екінші көбейткіштің туындысын бірінші көбейткішке көбейтіп қосқанға

$\frac{u(x)}{v(x)}$ бөлшегінің туындысы алымының туындысын бөліміне көбейтіп, бөлімінің туындысын алымына көбейтіп, олардың айырымы бөлімінің квадратына тең болады:

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2}, v \neq 0$$

Күрделі функцияның туындысы

$$y' = f'_x = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta u} \cdot \frac{\Delta u}{\Delta x} = \lim_{\Delta u \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta u} \cdot \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} = f'_u \cdot u'_x$$

$$\left(\sin x^2 \right)' = (\sin u)' \cdot (u)' = \cos u \cdot 2x = 2x \cdot \cos x^2$$

Кері функцияның туындысы

$$x'_y = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta y} = \frac{1}{\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}} = \frac{1}{y'_x}$$

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{(\sin y)'} = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2 y}} = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$$

$$1. (c)' = 0.$$

$$2. (x^a)' = ax^{a-1}.$$

$$3. (a^x)' = a^x \ln a, \quad (e^x)' = e^x.$$

$$4. (\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}, \quad (\ln x)' = \frac{1}{x}.$$

$$5. (\sin x)' = \cos x.$$

$$6. (\cos x)' = -\sin x.$$

$$7. (\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}.$$

$$8. (\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}.$$

$$9. (\operatorname{sh} x)' = \operatorname{ch} x.$$

$$10. (\operatorname{ch} x)' = \operatorname{sh} x.$$

$$11. (\operatorname{th} x)' = \frac{1}{\operatorname{ch}^2 x}.$$

$$12. (\operatorname{cth} x)' = -\frac{1}{\operatorname{sh}^2 x}.$$

$$13. (\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

$$14. (\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

$$15. (\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}.$$

$$16. (\operatorname{arcctg} x)' = -\frac{1}{1+x^2}.$$

Параметр арқылы берілген функцияның туындысы

$$\begin{cases} x = \varphi(t), \\ y = \psi(t), \end{cases} \quad t \in [\alpha, \beta].$$

$$y'_x = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \cdot \frac{dt}{dx} = \frac{dy}{dt} \cdot \frac{1}{\frac{dx}{dt}} = \frac{y'_t}{x'_t}$$

$$\begin{cases} x = t^3 \\ y = t^2 \end{cases}$$

$$y'_x = \frac{y'_t}{x'_t} = \frac{2t}{3t^2} = \frac{2}{3t}$$

Функцияның дифференциалы

$$dy = f'(x) \Delta x$$

Дифференциалды есептеу ережесі.

$$d(u \pm v) = du \pm dv, \quad d(u + c) = du$$

$$d(u \cdot v) = vdu + u dv, \quad d(cu) = c \cdot du$$

$$d\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{vdu - u dv}{v^2}$$

Дифференциалды жуықтап есептеуге қолдану

$$f(x + \Delta x) \approx f(x) + dy = f(x) + f'(x)\Delta x$$

$$\sin 46^\circ$$

$$f(x) = \sin x, f'(x) = (\sin x)' = \cos x, x_0 = 45^\circ = \frac{\pi}{4}, \Delta x = 1^\circ = \frac{\pi}{180}$$

$$\sin(45^\circ + 1^\circ) \approx \sin \frac{\pi}{4} + \cos \frac{\pi}{4} \cdot \frac{\pi}{180} = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{3,14}{180} \approx 0,7191$$

Жоғарғы ретті туындылар және дифференциалдар

$$f^{(k)}(x) = \left(f^{(k-1)}(x) \right)'$$

$$y = a^x$$

$$f'(x) = a^x \cdot \ln a$$

$$f''(x) = (f'(x))' = (a^x \cdot \ln a)' = a^x \cdot (\ln a)^2$$

$$f'''(x) = (f''(x))' = (a^x \cdot (\ln a)^2)' = a^x \cdot (\ln a)^3$$

$$f^{(k)}(x) = a^x \cdot (\ln a)^k$$

$$d^k f = d(d^{k-1} f)$$

$$df = f'(x)dx$$

$$d^2 f = d(df) = (f'(x)dx)'dx = f''(x)(dx)^2$$

$$d^3 f = d(d^2 f) = (f''(x)(dx)^2)'dx = f'''(x)(dx)^3$$

$$d^k f = f^{(k)}(x)(dx)^k$$

$$d^k (f + g) = d^k f + d^k g$$

$$d^k (f \cdot g) = \sum_{m=0}^k \frac{k!}{m!(k-m)!} d^{k-m} f \cdot d^m g$$

Бекіту сұрақтары

- ▶ Туындының анықтамасын келтіріңіз. Оның механикалық және геометриялық мағынасы қандай?
- ▶ Кері функцияның туындысы туралы теорема. Кері тригонометриялық функцияларды дифференциалдау формулаларын жазыңыз.
- ▶ Функцияның дифференциалының анықтамасын келтіріңіз.
- ▶ Жуықтап есептеуде дифференциалдың қолдануы неге негізделген?
- ▶ Жоғары ретті туындының анықтамасын беріңіз.
- ▶ Жоғары ретті дифференциалдың анықтамасын беріңіз.