Дәріс 12. Дифференциалды теңдеулер

Анықтама. ***Дифференциалды теңдеу*** *деп x тәуелсіз айнымалы, y(x) ізделінді функция және оның түрлі ретті туындыларын өз ара байланыстыратын теңдеуді айтамыз*

$$F(x, y, y', ..., y^{(n)}) = 0 . \qquad (1)$$

Дифференциалды теңдеу реті деп теңдеудегі туындының жоғары ретін айтамыз.

Мысалы, $xy'+y=0$, $x(y')^2 + y = e^{-x}$ - бірінші ретті дифференциалды теңдеулер; $y'' + xy' + y = e^{-x}$ - екінші ретті дифференциалды теңдеу; $y''' = 5x + 7$ - үшінші ретті дифференциалды теңдеу.

Бірінші ретті дифференциалды теңдеуді қарастырайық,

$$F(x, y, y') = 0 . \qquad (2)$$

Егер осы теңдеу функция туындысына қатысты шешіліп тұрса,

$$y' = f(x, y) \qquad (2')$$

деп жазылады.

Дифференциалды теңдеудегі орнына қойғанда оны тепе-теңдікке айналдыратын, дифференциалданатын ***y=q(x,C)*** функциясын теңдеудің **жалпы шешімі** деп айтамыз.

Мысалы, $xy'+y=0$ теңдеудің жалпы шешімі $y = \frac{C}{x}$ болады. Шынында да, осы функция теңдеуді тепе-теңдікке айналдырады,

$$x\left(\frac{C}{x}\right)' + \frac{C}{x} = 0 \Rightarrow x\left(-\frac{C}{x^2}\right) + \frac{C}{x} = 0 \Rightarrow 0 \equiv 0 .$$

Дифференциалды теңдеудің жалпы шешімінен қандай да бір нақты $C=C_0$ мәнінде алынатын шешім теңдеудің **дербес**

шешімі деп аталады.

Анықтама. $y' = f(x, y)$ *теңдеудің берілген бастапқы* $y(x_0)=y_0$ *шартты қанағаттандыратын шешімін табуды* ***Коши есебі*** *дейді.*

Дифференциалды теңдеудің шешімін табу процесін **теңдеуді интегралдау** дейді.

Дифференциалды теңдеулер түрлерімен танысайық.

1. **Айнымалысы ажыратылатын дифференциалды теңдеу.** Егер (2) теңдеу мынадай түрде

$$f_1(x)g_1(y)dx + f_2(x)g_2(y)dy = 0 \qquad (3)$$

жазылатын болса, ол **айнымалысы ажыратылатын дифференциалды теңдеу** деп аталады.

Бұл теңдеуді шешу үшін теңдеудің екі жағын $g_1(y)f_2(x)$ көбейткішке бөлеміз:

$$\frac{f_1(x)}{f_2(x)}dx + \frac{g_2(y)}{g_1(y)}dy = 0$$

Сонда dx алдында тек x-тен тәуелді, ал dy алдында тек y-тен тәуелді функция тұрады да, теңдеудің айнымалылары ажыратылады**.** Енді теңдеуді мүшелеп интегралдап шешімін табуға болады:

$$\int \frac{f_1(x)}{f_2(x)}dx + \int \frac{g_2(y)}{g_1(y)}dy = C\ .$$

Мысалы, $xy'+y=0$ дифференциалды теңдеудің шешімін табайық. $y' = \dfrac{dy}{dx}$ екенін ескеріп теңдеуді мына түрде жазайық:

$$xdy + ydx = 0\ .$$

Теңдеудің екі жағын xy көбейткішке бөліп айнымалысын ажыратамыз: $\frac{dy}{y}+\frac{dx}{x}=0$. Мүшелеп интегралдасақ, *lny+lnx=lnC,* осыдан $y=\frac{C}{x}$ екендігі шығады.

2. Біртекті дифференциалды теңдеу. Егер теңдеу (2’) мынадай түрде

$$y'= g\left(\frac{y}{x}\right) \tag{4}$$

жазылатын болса, ол **біртекті дифференциалды теңдеу** деп аталады.

Бұл теңдеуді шешу үшін $z=\frac{y}{x}$ деген жаңа айнымалы енгіземіз. Осыдан $y=x\cdot z$, дифференциалдап, $y'=z+x\cdot z'$, (4) теңдеуге қоямыз: $z+x\cdot z'=g(z)$. $z'=\frac{dz}{dx}$ екенін ескеріп теңдеуді мына түрде көшіріп жазсақ:

$$x\cdot dz=(g(z)-z)dx.$$

Айнымалысы ажыратылатын теңдеу аламыз. Теңдеудің екі жағын $x\cdot(g(z)-z)$ көбейткішке бөліп айнымалысын ажыратамыз,

$$\frac{dz}{g(z)-z}=\frac{dx}{x}.$$

Біртекті дифференциалды теңдеу біртекті функция ұғымымен байланысты. $y=f(x,y)$ функциясы **k ретті біртекті функция** деп аталады, егер кез-келген α саны үшін мынадай теңдік орындалса:

$$f(\alpha x,\alpha y)=\alpha^k f(x,y).$$

Мысалы, $f(x,y)=x^2+xy$ - екінші ретті біртекті функция, себебі

$$f(\alpha x, \alpha y) = (\alpha x)^2 + \alpha x \alpha y = \alpha^2 (x^2 + xy) = \alpha^2 f(x, y) .$$

Ал $f(x, y) = \dfrac{x^2 + xy}{x^2}$ - нолінші ретті біртекті функция, себебі

$$f(\alpha x, \alpha y) = \frac{(\alpha x)^2 + \alpha x \alpha y}{(\alpha x)^2} = \frac{\alpha^2 \left(x^2 + xy\right)}{\alpha^2 x^2} = \alpha^0 f(x, y) .$$

$y' = f(x, y)$ дифференциалды теңдеудегі $f(x, y)$ функция нолінші ретті біртекті функция болса, онда теңдеу (4) біртекті түрге келтіріледі.

Мысалы, $(x - y)y dx - x^2 dy = 0$ теңдеуді шешу керек.

Шешуі. $y' = \dfrac{dy}{dx}$ екенін ескеріп теңдеуді мына түрде жазайық: $y' = \dfrac{(x - y)y}{x^2}$. Сонда $f(x, y) = \dfrac{(x - y)y}{x^2}$ - нолінші ретті біртекті функция болғандықтан ол біртекті түрге келеді:

$$y' = \frac{y}{x} - \left(\frac{y}{x}\right)^2 .$$

Шешу үшін $z = \dfrac{y}{x}$ деген жаңа айнымалы енгізіп, осыдан $y = x \cdot z$, дифференциалдап, $y' = z + x \cdot z'$, теңдеуге қоямыз: $z + x \cdot z' = z - z^2$. $z' = \dfrac{dz}{dx}$ екенін ескеріп теңдеуді мына түрде көшіріп жазсақ: $x \cdot dz = -z^2 dx$. Айнымалысы ажыратылатын теңдеу аламыз. Теңдеудің екі жағын $x \cdot z^2$ көбейткішке бөліп айнымалысын ажыратамыз,

$$\frac{dz}{z^2} = -\frac{dx}{x}.$$

Мүшелеп интегралдасақ, $-\frac{1}{z} = -\ln x + \ln C$, осыдан $\frac{1}{z} = \ln\frac{x}{C}$.

Енді $z = \frac{y}{x}$ белгілеуді орнына қойсақ $\frac{x}{y} = \ln\frac{x}{C}$ екендігі шығады. Алынған шешім болып тұрған функция айқын емес түрде алынды. Кейде оны дифференциалды теңдеудің **жалпы интегралы** деп те атайды.

3. Сызықты дифференциалды теңдеу. ***Бірінші ретті дифференциалды теңдеу сызықты деп аталады, егер ол мынадай түрде жазылатын болса:***

$$y'+P(x)y=Q(x) \qquad (5)$$

Егер (5) теңдеудегі $Q(x)=0$ болса сызықты теңдеу **біртекті** деп аталады

$$y'+P(x)y=0. \qquad (6)$$

Сызықты біртекті дифференциалды теңдеу шешімін бірден алуға болады:

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = 0 \Rightarrow \frac{dy}{y} = -P(x)dx \Rightarrow \ln y = -\int P(x)dx + \ln C \Rightarrow$$

$$\ln\frac{y}{C} = -\int P(x)dx \Rightarrow y = Ce^{-\int P(x)dx}$$

Сонымен, сызықты біртекті дифференциалды теңдеудің жалпы шешімі мынадай:

$$y = Ce^{-\int P(x)dx}.$$

Енді (5) теңдеуді шешумен айналысайық. Лагранж әдісі: Бұл әдіс (5) теңдеу шешімін сәйкес біртекті теңдеуінің шешімінен алады. Біртекті теңдеуінің шешіміндегі С шаманы x-тен тәуелді функция деп қарастырамыз:

$$y = C(x)e^{-\int P(x)dx} \qquad (*).$$

С(х) функциясын табу үшін y және y' мәндерін (5) теңдеуге қоямыз. y' тауып алайық:

$$y' = C'(x)e^{-\int P(x)dx} + C(x)\left[-P(x)e^{-\int P(x)dx}\right].$$

Енді y және y' мәндерін (5) теңдеуге қоямыз:

$$C'(x)e^{-\int P(x)dx} + C(x)\left[-P(x)e^{-\int P(x)dx}\right] + P(x)C(x)e^{-\int P(x)dx} = Q(x)$$

$$C'(x)e^{-\int P(x)dx} = Q(x)\,;\; C'(x) = e^{\int P(x)dx}Q(x)$$

$C'(x) = \dfrac{dC(x)}{dx}$ екенін ескеріп, мынаны аламыз:

$$dC(x) = e^{\int P(x)dx}Q(x)dx\,.$$

Мүшелеп интегралдап, белгісіз С(х) функцияны табамыз:

$$C(x) = \int e^{\int P(x)dx}Q(x)dx + C$$

С(х) функция мәнін (*) теңдеуге қойып *(5)* сызықты дифференциалды теңдеу шешімін аламыз:

$$y = e^{-\int P(x)dx}\left[C + \int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx\right] \qquad (7)$$

Мысал. $xy' - 2y = 2x^4$ дифференциалды теңдеуді шешу керек.

Шешуі. Теңдеудің екі жағын *x*-ке бөлсек, сызықты теңдеу аламыз: $y' - \frac{2}{x}y = 2x^3$, мұнда $P(x) = -\frac{2}{x}$, $Q(x)=2x^3$. Теңдеудің шешімін табу үшін (7) формуланы қолданамыз.

$$y = e^{-\int\left(-\frac{2}{x}\right)dx}\left[C + \int 2x^3 e^{\int\left(-\frac{2}{x}\right)dx}dx\right] = e^{2\ln x}\left[C + \int 2x^3 e^{-2\ln x}dx\right] =$$

$$x^2\left[C + \int 2x^3 x^{-2}dx\right] = x^2[C + \int 2xdx] = x^2\left[C + x^2\right]$$

Сонымен, берілген сызықты теңдеу шешімі:

$$y = x^2\left[C + x^2\right].$$

ТЕОРИЯЛЫҚ СҰРАҚТАР.

- Дифференциалды теңдеудің жалпы және дербес шешімі дегеніміз не?
- Айнымалысы ажыратылатын дифференциалды теңдеуді жаз.
- Қандай теңдеуді сызықты дифференциалды теңдеу дейміз?